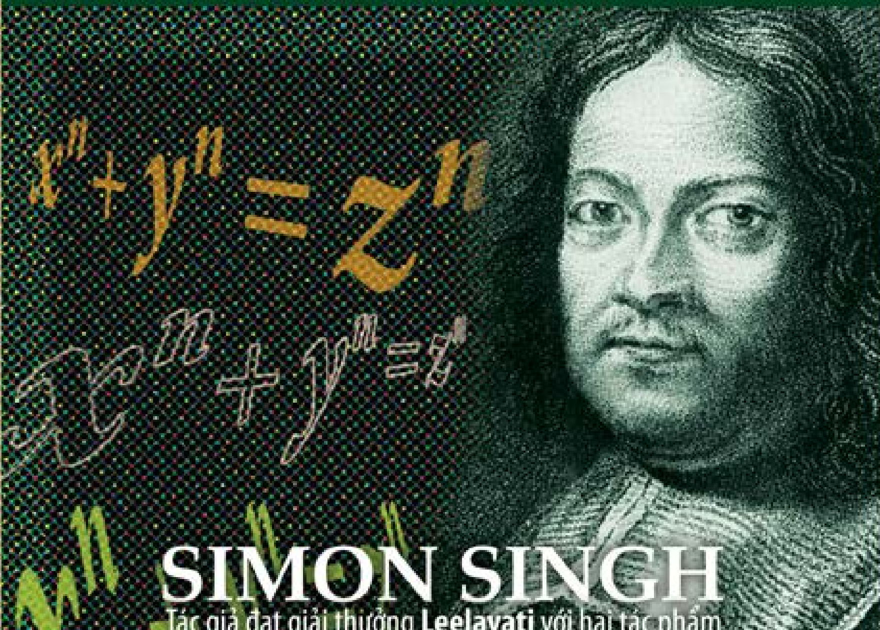
KHOA HỌC KHÁM PHÁ

ĐỊNH LÝ CUỐI CÙNG CỦA FERMAT

FERMAT'S ENIGMA

Từng đứng vị trí số 1 danh sách **bestseller** của báo *The Times*, UK

HÀNH TRÌNH ĐI TÌM LỜI GIẢI CHO BÀI TOÁN KHÓ BẬC NHẤT TRONG LỊCH SỬ



SIMON SINGH

Tác giả đạt giải thưởng **Leelavati** với hai tác phẩm *Định lý cuối cùng của Fermat* và *Mật mã*

NHÀ XUẤT BẢN TRẺ

ĐỊNH LÝ CUỐI CÙNG CỦA FERMAT

SIMON SINGH

ĐỊNH LÝ CUỐI CÙNG CỦA FERMAT

CÂU CHUYỆN VỀ MỘT THÁCH ĐỐ ĐÃ TỪNG LÀM BỐI RỐI NHỮNG BỘ ÓC VĨ ĐẠI CỦA NHÂN LOẠI TRONG SUỐT 358 NĂM

Phạm Văn Thiều - Phạm Việt Hưng dịch

Tái bản lần thứ 2

NHÀ XUẤT BẢN TRẺ

Mục lục

GIỚI THIỆU 5

LỜI TỰA 14

I. "CÓ LẼ TÔI XIN PHÉP ĐƯỢC DỪNG Ở ĐÂY..." 17

II. TÁC GIẢ CỦA NHỮNG CÂU ĐỐ 59

III. SỰ TỦI HỔ CỦA TOÁN HỌC 103

IV. ĐI VÀO TRỪU TƯỢNG 163

V. CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG 231

VI. NHỮNG TÍNH TOÁN BÍ MẬT 269

VII. MỘT BÀI TOÁN NHỎ 327

VIII. TOÁN HỌC THỐNG NHẤT 354

PHỤ LỤC 388

LỜI GIỚI THIỆU

Cuối cùng chúng tôi cũng đã cùng có mặt trong căn phòng, không đông người, nhưng đủ rộng để chứa toàn bộ Khoa Toán của trường Đại học Princeton trong những dịp lễ lạt lớn. Vào buổi chiều đặc biệt đó, xung quanh không nhiều người lắm, nhưng đủ để tôi khó xác định được người nào là Andrew Wiles. Sau một lát, tôi nhận ra một người trông có vẻ rụt rè, đang lắng nghe xung quanh chuyện trò, nhấm nháp ly trà, và thả mình trong những tư tưởng mà các nhà toán học trên khắp thế giới đang chú ý theo dõi sẽ diễn ra vào khoảng bốn giờ chiều nay. Ông ta dễ dàng đoán được tôi là ai.

Đó là thời điểm kết thúc một tuần lễ phi thường. Tôi đã gặp gỡ một số nhà toán học tuyệt vời nhất đang còn sống, và bắt đầu cố gắng xâm nhập vào bên trong thế giới của họ. Nhưng bất chấp mọi ý đồ tiếp cận với Andrew Wiles, để nói chuyện với ông, và để thuyết phục ông tham gia vào một cuốn phim tài liệu trong chương trình Horizon của đài BBC về thành tựu của ông, đây là cuộc gặp mặt đầu tiên của chúng tôi. Đó là người mới đây đã thông báo rằng ông ta đã tìm thấy Chiếc Chén Thánh[1] *của toán học; người tuyên bố đã chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat. Như tôi đã nói, Wiles có một vẻ lơ đãng rụt rè, và mặc dù rất lịch sự và thân ái, nhưng rõ ràng là ông muốn tôi càng tránh xa ông càng tốt. Ông giải thích rất đơn giản rằng ông không thể tập trung vào bất cứ việc gì lúc này ngoài công việc đang vào chặng quyết định, nhưng có thể sau này, khi áp lực hiện thời được giải tỏa, ông sẽ vui lòng tham gia. Tôi biết, và ông cũng biết tôi biết, rằng ông đang phải đối*

[1]. Chiếc Chén Thánh là chiếc ly Chúa Giêsu đã dùng trong bữa tiệc ly - bữa tiệc cuối cùng với các môn đệ trước khi Chúa bị hành hình. Đây là một thuật ngữ ví von thường hay được dùng trong nền văn hóa Tây phương để nhấn mạnh vai trò quan trọng và cốt yếu của cái được ví. Trong trường hợp này đó là chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat (ND).

mặt với sự sụp đổ hoài bão của đời ông, và rằng Chiếc Cốc Thánh mà ông đang cầm trong tay bây giờ đang bị phát giác ra rằng chẳng phải là đẹp đẽ, giá trị gì lắm, mà chỉ là một chiếc cốc uống nước thông thường mà thôi. Bởi vì ông đã thấy một sai lầm trong chứng minh đã công bố.

Câu chuyện về Định lý cuối cùng của Fermat là một câu chuyện độc nhất vô nhị. Cho tới lúc gặp Andrew Wiles, tôi đã biết rằng đó thật sự là một trong những trang sử vĩ đại nhất của những nỗ lực khoa học và học thuật. Mùa hè năm 1993, tôi đã nhìn thấy những tiêu đề lớn đưa toán học lên trang nhất của những tờ báo tầm cỡ quốc gia trên khắp thế giới, loan báo việc chứng minh định lý này. Vào thời điểm ấy, tôi chỉ có một hồi ức lờ mờ về Định lý cuối cùng của Fermat, nhưng đã thấy ngay rằng đó là một cái gì rất đặc biệt, rất hợp với một cuốn phim trong chương trình Horizon. Tôi đã dành thì giờ trong những tuần lễ tiếp theo để nói chuyện với nhiều nhà toán học: những người có liên hệ gần gũi với câu chuyện này, hoặc gần gũi Andrew, hoặc những người chỉ đơn giản là đã chia sẻ sự xúc động khi chứng kiến một thời điểm vĩ đại trong lĩnh vực hoạt động của họ. Tất cả đã rộng lượng chia sẻ những hiểu biết sâu sắc của họ về lịch sử toán học, và kiên nhẫn nói chuyện với tôi mặc dù kiến thức về toán học của tôi quá kém cỏi so với những khái niệm về những vấn đề có liên quan. Vấn đề nhanh chóng trở nên rõ ràng rằng đây có lẽ là một đề tài mà trên thế giới chỉ có khoảng 5, 6 người có thể hiểu được một cách thấu đáo và đầy đủ. Trong một thời gian, tôi đã băn khoăn không biết mình có điên rồ khi định làm một cuốn phim về đề tài này. Nhưng từ những nhà toán học mà tôi trò chuyện, tôi đã hiểu được lịch sử phong phú và ý nghĩa sâu sắc hơn của định lý Fermat đối với toán học cũng như đối với những người làm toán, và cuối cùng tôi cũng nhận được ra câu chuyện thật sự nằm ở đâu.

Tôi đã nắm được nguồn gốc cổ Hy Lạp của bài toán, và hiểu rằng Định lý cuối cùng của Fermat là đỉnh Himalaya của lý thuyết số. Tôi được dẫn dắt vào cái đẹp đầy quyến rũ của toán học, và bắt đầu đánh giá được vì sao toán học được mô tả như là ngôn ngữ của tự nhiên.

Thông qua những người cùng thời với Wiles, tôi đã biết rõ rằng bản chất công việc của ông đòi hỏi một tư duy mạnh mẽ kinh khủng đến chừng nào trong việc tập hợp tất cả những kỹ thuật tân tiến nhất của lý thuyết số với nhau nhằm áp dụng cho chứng minh của ông. Từ những người bạn của ông ở Đại học Princeton, tôi đã nghe nói về sự tiến triển rất phức tạp của những năm nghiên cứu biệt lập của Andrew. Tôi dựng nên một hình ảnh phi thường xung quanh Andrew Wiles và bài toán thách đố ngự trị cuộc đời ông, nhưng dường như tôi chưa bao giờ có ý định tìm gặp chính bản thân ông.

Mặc dù nội dung toán học liên quan đến chứng minh của Wiles nằm trong số những vấn đề khó nhất của toán học, nhưng tôi nhận thấy vẻ đẹp của Định lý cuối cùng của Fermat nằm ngay trong sự cực kỳ đơn giản và dễ hiểu của bản thân bài toán đó. Đúng là một câu đố vì nó được phát biểu bằng những ngôn từ quen thuộc với mọi học sinh phổ thông. Pierre de Fermat là một con người thuộc truyền thống Phục hưng, sống giữa trào lưu tái khám phá kho trí tuệ cổ Hy Lạp, nhưng ông đã đặt ra một câu hỏi mà người Hy Lạp không hề nghĩ ra để hỏi; và khi làm như vậy, ông đã đặt ra một bài toán khó nhất trên thế gian để cho những người khác phải giải. Và như muốn trêu ngươi, ông để lại cho hậu thế mấy dòng ghi chú trong đó thông báo rằng ông đã tìm ra một lời giải, nhưng không cho biết lời giải đó ra sao. Đó là phút khởi đầu cho một cuộc săn đuổi kéo dài tới ba thế kỷ.

Độ dài thời gian đó đã nói lên ý nghĩa đặc biệt của câu đố này. Thật khó mà hình dung được một bài toán nào, trong bất kỳ một lĩnh vực khoa học nào, được phát biểu đơn giản và rõ ràng đến như thế mà lại có thể chống chọi được với sự công phá của trí tuệ lâu dài đến thế. Chúng ta nhớ lại những bước nhảy vọt trong nhận thức vật lý, hóa học, sinh học, y học và công nghệ đã xảy ra từ thế kỷ 17. Từ "các thể dịch"[1] trong y học, chúng ta đã tiến tới ghép nối được các gene, đã nhận dạng được

[1]. Xưa kia người ta quan niệm rằng các thể dịch này là những yếu tố quyết định sức khỏe và tâm trạng của sinh vật. (ND)

các hạt cơ bản trong nguyên tử, và đã đưa được con người lên Mặt trăng; nhưng trong lý thuyết số Định lý cuối cùng của Fermat vẫn không thể nào vượt qua được.

Trong khi tìm hiểu, đôi khi tôi muốn biết lý do tại sao Định lý cuối cùng không gây được sự chú ý đối với mọi người mà chỉ đặc biệt đối với các nhà toán học, và tại sao nó quan trọng đến nỗi tạo ra cả một chương trình nghiên cứu về nó như thế. Toán học có hằng hà sa số ứng dụng thực tiễn, nhưng trong trường hợp lý thuyết số, những ứng dụng hấp dẫn nhất mà tôi được biết là trong khoa học mật mã, trong việc thiết kế các bộ tiêu âm, và trong việc liên lạc từ những con tàu vũ trụ xa xôi. Nhưng chẳng có cái nào trong những ứng dụng đó có sự hấp dẫn đặc biệt đối với công chúng. Điều hấp dẫn chúng ta nhiều hơn chính là bản thân các nhà toán học, và cái cảm xúc say sưa mà tất cả bọn họ đều biểu lộ ra khi nói về bài toán Fermat.

Toán học là một trong các dạng thuần khiết nhất của tư duy, và đối với người ngoài ngành toán, các nhà toán học hầu hết đều có vẻ như những người ở thế giới khác. Điều gây ấn tượng mạnh đối với tôi trong mọi cuộc thảo luận giữa tôi với họ là tính chính xác khác thường trong câu chuyện trao đổi của họ. Một câu hỏi hiếm khi được trả lời ngay tức khắc, tôi thường phải chờ đợi trong khi cấu trúc chính xác của câu trả lời được định hình trong đầu họ; nhưng khi nó được nói ra, thì đúng là một lời phát biểu rành mạch rõ ràng và thận trọng mà bản thân tôi rất muốn có được. Khi tôi nói với Peter Sarnak, một người bạn của Andrew Wiles, về điều này, ông đã giải thích rằng đơn giản vì các nhà toán học không thích tạo ra một mệnh đề sai. Tất nhiên, họ cũng vận dụng trực giác và ngẫu hứng, nhưng những lập luận hình thức phải là tuyệt đối. Chứng minh là cái nằm trong trái tim của toán học, và là cái đánh dấu phân biệt nó với các khoa học khác. Các khoa học khác có những giả thuyết được kiểm chứng bằng thực nghiệm cho tới khi chúng bị bác bỏ và được thay thế bởi những giả thuyết mới. Trong toán học, chứng minh tuyệt đối là mục tiêu, và khi một cái gì đó được chứng minh, nó *sẽ được khẳng định mãi mãi, không có chỗ để cho nó thay đổi. Trong Định lý cuối cùng, các nhà toán học phải đối mặt với một sự thách thức lớn nhất về chứng minh, và người tìm ra câu trả lời sẽ nhận được sự ngưỡng mộ của toàn bộ giới toán học.*

Những giải thưởng đã được đặt ra, và sự đua tài bùng phát. Định lý cuối cùng có một lịch sử hết sức phong phú dính dáng tới cả cái chết và sự lường gạt, nhưng nó cũng đã thúc đẩy sự phát triển của toán học. Như nhà toán học Barry Mazur đã nói, Fermat đã thổi "hồn" vào các lĩnh vực toán học đã từng gắn liền với những ý đồ đầu tiên chứng minh định lý đó. Do sự trớ trêu của số phận, hóa ra một trong những lĩnh vực toán học như thế lại chiếm vị trí trung tâm trong chứng minh cuối cùng của Wiles.

Nhặt nhạnh dần dần những hiểu biết về một lĩnh vực không quen thuộc, tôi đã đi tới chỗ đánh giá Định lý cuối cùng của Fermat như là trung tâm, và thậm chí có lịch sử song song với lịch sử phát triển của chính toán học. Fermat là cha đẻ của lý thuyết số hiện đại, và từ thời ông các nhà toán học đã phát triển, thúc đẩy và đa dạng hóa nó thành nhiều lĩnh vực chuyên sâu, ở đó các kỹ thuật mới lại đẻ ra những lĩnh vực mới của toán học, rồi trở thành những ngành toán học độc lập. Nhiều thế kỷ trôi qua, Định lý cuối cùng dường như ngày càng ít có liên quan với những nghiên cứu toán học thuộc thế hệ trước, và càng ngày càng trở thành một thứ của lạ. Nhưng bây giờ rõ ràng là vai trò trung tâm của nó đối với toán học thực ra chưa bao giờ thuyên giảm.

Những bài toán về số, như bài toán mà Fermat đã đặt ra chẳng hạn, rất giống với những trò chơi thách đố, mà các nhà toán học vốn lại thích giải các câu đố. Đối với Andrew Wiles, đây là một thách đố rất đặc biệt, và chẳng có gì khác hơn, đó chính là hoài bão của đời ông. Ba mươi năm trước, sau khi bất ngờ gặp Định lý cuối cùng của Fermat trong một thư viện công cộng, cậu bé Wiles đã say mê nó. Giấc mơ tuổi thơ và tuổi trưởng thành của Wiles là giải được bài toán đó, và khi ông công bố chứng minh đầu tiên của mình vào mùa hè năm 1993, thì đó *là thời điểm kết thúc của một chặng đường bảy năm làm việc hết mình cho bài toán, với một mức độ tập trung và quyết tâm khó có thể tưởng tượng được. Khi mới bắt tay vào công việc, nhiều kỹ thuật mà ông sử dụng sau đó còn chưa được sáng tạo. Ông cũng kết hợp các công trình của nhiều nhà toán học xuất sắc với nhau, kết nối các ý tưởng và sáng tạo ra những khái niệm mà những người khác đã sợ không dám làm. Theo một nghĩa nào đó, như Barry Mazur nhớ lại, hóa ra là mọi người đều đã làm việc cho bài toán Fermat, nhưng biệt lập với nhau và không coi nó là mục tiêu, vì chứng minh này đòi hỏi phải huy động toàn bộ sức mạnh của toán học hiện đại mới tìm ta lời giải cho nó. Cái mà Wiles đã làm được là một lần nữa kết nối các lĩnh vực toán học tưởng như xa rời nhau lại với nhau. Do đó công trình của ông dường như là một sự biện hộ cho quá trình đa dạng hóa đã diễn ra trong toán học kể từ khi bài toán Fermat được nêu ra.*

Tại điểm mấu chốt trong chứng minh bài toán Fermat, Andrew đã chứng minh một ý tưởng được gọi là giả thuyết Taniyama - Shimura, giả thuyết tạo nên chiếc cầu mới bắc giữa các thế giới toán học vốn khác xa nhau. Đối với nhiều người, việc tiến tới một toán học thống nhất là mục tiêu tối cao, và giả thuyết Taniyama - Shimura chính là sự thoáng hiện của một lý thuyết thống nhất như thế. Vì vậy khi chứng minh bài toán Fermat, Andrew Wiles đã củng cố một số phần quan trọng nhất của lý thuyết số thời hậu chiến, và đã xây dựng nên nền móng vững chắc cho tòa tháp của những giả thuyết xây trên nền móng đó. Do đó, chứng minh của Wiles không đơn thuần chỉ là giải một bài toán thách đố tồn đọng lâu dài nhất nữa, mà nó còn mở rộng biên giới của bản thân toán học. Điều đó cũng có nghĩa là nếu bài toán đơn giản của Fermat đã ra đời vào lúc toán học còn ấu trĩ thì nó cần phải chờ đợi đến thời điểm này.

Câu chuyện về Fermat đã kết thúc theo một kiểu cách hết sức ngoạn mục. Đối với Andrew Wiles, đó là sự kết thúc của kiểu làm việc cô lập vốn xa lạ với toán học, một hoạt động thường đòi hỏi sự hợp tác. Giờ uống trà buổi chiều theo thông lệ tại các Viện hoặc các Khoa toán của *các trường đại học trên khắp thế giới là thời gian để các ý tưởng gặp nhau, và chia sẻ những hiểu biết thấu đáo trước khi việc công bố trở thành chính thức. Ken Ribet, một nhà toán học mà bản thân ông cũng có những đóng góp quan trọng trong chứng minh Định lý Fermat, đã gợi ý nửa đùa nửa thật với tôi rằng chính sự không chắc chắn và an toàn của các nhà toán học đã đòi hỏi một cấu trúc hỗ trợ từ phía các đồng nghiệp của mình. Tuy nhiên, Andrew Wiles đã tránh tất cả những cái đó, và giữ kín công việc của mình chỉ cho riêng bản thân mình trong toàn bộ tiến trình, trừ những bước cuối cùng. Đó cũng là một thước đo tầm quan trọng của bài toán Fermat. Wiles có niềm đam mê thực sự mạnh mẽ được là người duy nhất giải trọn vẹn bài toán này, một niềm đam mê đủ mạnh để dâng hiến bảy năm trời của cuộc đời cho nó và để giữ được mục tiêu đó cho chính mình. Ông biết rằng dù bài toán có vẻ không liên quan mấy đến những nghiên cứu hiện đại, nhưng cuộc chạy đua đối với bài toán Fermat không bao giờ lơi lỏng, vì thế ông chẳng bao giờ dám đánh liều để lộ những gì mà mình đang làm.*

Sau nhiều tuần lễ tìm hiểu vấn đề này, tôi liền tới Đại học Princeton. Đối với các nhà toán học, mức độ hồi hộp lúc này đã lên tới mức căng thẳng. Tôi đã khám phá ra ở đó một câu chuyện về sự ganh đua, thành bại, về sự cô lập, tài năng, chiến thắng, ghen tị, áp lực căng thẳng, mất mát và thậm chí cả bi kịch nữa. Ngay trong lòng giả thuyết Taniyama - Shimura, một giả thuyết cực kỳ quan trọng trong tiến trình chứng minh của Wiles, là cuộc sống hậu chiến bi thảm ở Nhật Bản của Yukita Taniyama, câu chuyện mà tôi được đặc ân nghe kể từ Goro Shimura, người bạn thân của ông. Từ Shimura tôi cũng học được khái niệm "cái thiện" trong toán học, nơi mà mọi thứ đều được cảm thấy đơn giản là đúng vì chúng đều là "thiện". Không biết làm sao mà cảm giác về cái thiện tỏa khắp bầu không khí toán học vào mùa hè năm đó. Tất cả đều say sưa trong một thời khắc vinh quang.

Với tất cả những điều vừa nói ở trên, sẽ chẳng có gì phải ngạc nhiên về gánh nặng của trách nhiệm mà Andrew cảm thấy khi một sai lầm *đã dần dần lộ ra qua mùa thu năm 1993. Với những con mắt của thế giới đổ dồn vào ông, và việc các đồng nghiệp của ông kêu gọi công bố chứng minh một cách công khai, có lẽ chỉ có ông biết tại sao mình đã không bị gục ngã. Ông đã phải chuyển từ việc làm toán biệt lập, một mình theo tốc độ riêng của mình đến chỗ bỗng nhiên phải làm việc với công chúng. Andrew là một người rất kín đáo, ông đã phải đấu tranh một cách khó khăn để giữ cho gia đình mình tồn tại vượt qua bão tố nổ ra xung quanh ông. Trong suốt tuần lễ ở Princeton, tôi gọi điện thoại, rồi để lại giấy nhắn tin tại nơi làm việc của ông, trên bậc cửa ra vào nhà ông, và thông qua bạn bè ông; thậm chí tôi còn gửi quà tặng cho ông, một hộp trà Anh và một chiếc nồi bằng gốm để nấu súp. Nhưng ông tránh mọi lời mời chào thân ái của tôi, mãi cho đến cuộc gặp mặt vào hôm tôi phải lên đường. Một cuộc nói chuyện tĩnh lặng, căng thẳng kéo dài vừa đủ mười lăm phút thì kết thúc.*

Khi chia tay chiều hôm đó, giữa chúng tôi đã có một sự cảm thông. Nếu Andrew tìm được cách sửa chữa chứng minh thì ông sẽ đến gặp tôi để thảo luận về cuốn phim; còn tôi sẽ chuẩn bị để chờ đợi. Nhưng khi bay về nhà ở London đêm đó thì dường như, đối với tôi, chương trình truyền hình dự định coi như đã chết. Trong suốt ba thế kỷ, chưa từng có ai sửa chữa nổi lỗ hổng trong nhiều chứng minh với ý định giải bài toán Fermat. Lịch sử đầy rẫy những chứng minh sai lầm, và mặc dù tôi rất mong ông là một ngoại lệ, nhưng thật khó mà tưởng tượng được rằng Andrew tuyệt nhiên không phải là một tấm bia khác trong cái nghĩa địa toán học ấy.

Một năm sau tôi nhận được một cú điện thoại. Sau một sự xoay chuyển toán học phi thường, và một chớp sáng của trực giác và cảm hứng, Andrew đã đi tới chứng minh kết thúc bài toán Fermat trong cuộc đời nghề nghiệp của ông. Một năm sau nữa, chúng tôi sắp xếp được thời gian cho ông để tập trung làm phim. Vào thời gian đó tôi cũng đã mời Simon Singh cùng với tôi làm phim, và cùng dành thì giờ với Andrew, để lắng nghe từ bản thân con người này toàn bộ câu chuyện về bảy năm *nghiên cứu biệt lập và một năm đau khổ tiếp theo đó của ông. Khi quay phim, Andrew nói với chúng tôi những cảm xúc sâu kín nhất của ông về những gì ông đã làm mà trước đó ông chưa hề nói với ai; rằng trong suốt ba mươi năm ông đã đeo đẳng giấc mơ thuở thiếu thời ra sao; rằng rất nhiều phần toán học mà ông đã phải nghiên cứu, do không có sự hiểu biết thấu đáo ở thời kỳ đó, thực sự là để tập hợp các công cụ cần thiết nhằm giải quyết sự thách thức của định lý Fermat, một thách thức đã thống trị sự nghiệp của đời ông; về cảm xúc mất mát của ông đối với bài toán mà nó sẽ không còn là người bạn đường của ông nữa; và về cảm xúc trào dâng của sự giải thoát mà giờ đây ông đang cảm thấy. Đối với một lĩnh vực mà thực chất nội dung của nó quá khó về mặt kỹ thuật để một khán giả không chuyên có thể hiểu được như ta có thể hình dung, thì mức độ xúc cảm trong cuộc nói chuyện của chúng tôi lớn hơn bất kỳ một thứ gì khác mà tôi đã từng trải nghiệm trong nghề làm phim khoa học của mình. Đối với Andrew, đó là sự kết thúc một chương trong cuộc đời của ông. Đối với tôi, đó là một đặc ân để được gần gũi với nó.*

Cuốn phim đã được phát trên Đài truyền hình BBC với tiêu đề Horizon: Định Lý cuối cùng của Fermat. *Giờ đây, trong cuốn sách này, Simon Singh đã phát triển những ý tưởng và những cuộc nói chuyện thân mật đó, cùng với những chi tiết hết sức phong phú trong câu chuyện về Fermat cũng như trong lịch sử và toán học tạo nên bối cảnh của câu chuyện này. Cuốn sách đã mô tả một cách đầy đủ và sáng rõ một trong những câu chuyện vĩ đại nhất trong tư duy nhân loại.*

JOHN LYNCH

Giám đốc Chương trình Horizon
của Đài truyền hình BBC
Tháng 3 năm 1997

Lời tựa

Câu chuyện về Định lý cuối cùng của Fermat gắn bó một cách khăng khít với lịch sử toán học, nó đụng chạm đến tất cả những chủ đề chủ yếu của lý thuyết số. Nó cho ta một cái nhìn thấu đáo về vấn đề dẫn dắt toán học, và có lẽ quan trọng hơn, là cái đã truyền cảm hứng cho các nhà toán học. Định lý cuối cùng nằm trong phần cốt lõi của một huyền thoại đầy hấp dẫn về lòng can đảm, sự lừa bịp, xảo quyệt và bi kịch, có dính dáng đến tất cả những nhân vật vĩ đại nhất của toán học.

Định lý cuối cùng của Fermat có nguồn gốc từ trong toán học cổ Hy Lạp, hai ngàn năm trước khi Pierre de Fermat dựng nên bài toán dưới dạng chúng ta biết hôm nay. Vì thế, nó kết nối những nền tảng của toán học được sáng tạo bởi Pythagore với những tư tưởng tinh vi nhất của toán học hiện đại. Để viết cuốn sách này, tôi lựa chọn một cấu trúc biên niên sử là chủ yếu, bắt đầu bằng việc mô tả đặc tính cách mạng của trường phái Pythagore, và kết thúc với câu chuyện về cá nhân của Andrew Wiles trong cuộc đấu tranh của ông tìm cách chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat.

Chương 1 nói về câu chuyện của Pythagore, và mô tả định lý Pythagore như là tổ tiên trực tiếp của Định lý cuối cùng ra sao. Chương này cũng thảo luận một vài khái niệm cơ bản của toán học sẽ được nhắc đến trong suốt quyển sách. Chương 2 kể câu chuyện từ cổ Hy Lạp đến nước Pháp thế kỷ 17, nơi Pierre de Fermat đã sáng tạo ra một câu đố sâu sắc nhất trong lịch sử toán học. Để trình bày tính cách phi thường của Fermat và những đóng góp của ông đối với toán học, những đóng *góp vượt xa ra ngoài Định lý cuối cùng, tôi đã dành một số trang để mô tả cuộc sống của ông, và một số trong những khám phá sáng chói khác của ông.*

Chương 3 và 4 mô tả một số ý đồ chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat trong thế kỷ 18, 19 và đầu thế kỷ 20. Mặc dù những cố gắng này kết thúc thất bại nhưng chúng đã tạo ra một kho khổng lồ các kỹ thuật và công cụ toán học mà một số trong chúng đã được sử dụng trong những ý đồ chứng minh Định lý cuối cùng gần đây nhất. Bên cạnh việc mô tả toán học, tôi cũng đã dành phần lớn những chương này cho các nhà toán học, những người đã bị ám ảnh bởi di sản của Fermat. Những câu chuyện của họ cho thấy các nhà toán học đã được chuẩn bị ra sao để hy sinh mọi thứ trong cuộc tìm kiếm chân lý, và toán học đã tiến triển như thế nào qua các thế kỷ đó.

Những chương còn lại của quyển sách ghi chép những sự kiện phi thường trong bốn mươi năm gần đây đã tạo nên những thay đổi cách mạng trong việc nghiên cứu Định lý cuối cùng của Fermat. Đặc biệt là chương 6 và chương 7 tập trung vào công trình của Andrew Wiles, mà những đột phá của nó trong thập kỷ vừa qua đã làm cộng đồng toán học phải kinh ngạc. Những chương sau dựa trên các cuộc phỏng vấn mở rộng đối với Wiles. Đây là cơ hội duy nhất đối với tôi, trước hết để được nghe một trong những cuộc hành trình trí tuệ phi thường nhất của thế kỷ 20 và tôi hy vọng rằng tôi đã có thể truyền đạt được tính sáng tạo và chủ nghĩa anh hùng cần phải có trong suốt mười năm thử thách của Wiles đến độc giả.

Trong khi kể lại câu chuyện về Pierre de Fermat và câu đố hóc búa của ông, tôi đã cố gắng mô tả những khái niệm toán học mà không dùng đến các phương trình, nhưng thỉnh thoảng cũng không thể tránh để cho mấy chữ x, y, z chẳng thú vị gì xuất hiện. Khi các phương trình xuất hiện trong từng vấn đề, tôi đã cố gắng cung cấp một sự giải thích để sao cho thậm chí độc giả không có kiến thức về toán học vẫn có thể hiểu được ý *nghĩa của chúng. Đối với những độc giả có kiến thức về chủ đề này sâu hơn một chút, tôi đã cung cấp một loạt các Phụ lục nhằm mở rộng các ý tưởng toán học được trình bày trong vấn đề chính.*

Cuốn sách này sẽ không thể ra mắt nếu không có sự giúp đỡ và tham gia của nhiều người. Đặc biệt tôi muốn cảm ơn Andrew Wiles vì đã phải từ bỏ nếp sống bình thường để trả lời những cuộc phỏng vấn dài dòng và chi tiết trong thời gian phải chịu những áp lực căng thẳng. Trong suốt bảy năm trời làm một nhà báo khoa học, tôi chưa bao giờ gặp người nào có một nỗi say đắm và tinh thần dâng hiến cho mục tiêu của mình lớn hơn thế, và tôi mãi mãi biết ơn giáo sư Wiles vì sự sẵn sàng chia sẻ câu chuyện của ông với tôi.

Tôi cũng muốn cảm ơn các nhà toán học khác đã giúp đỡ tôi viết cuốn sách này và đã cho phép tôi phỏng vấn một thời gian dài. Một số trong các nhà toán học đó đã dính dáng sâu sắc đến việc giải quyết Định lý cuối cùng của Fermat, trong khi một số khác là những nhân chứng đối với những sự kiện lịch sử trong bốn chục năm vừa qua. Thì giờ tôi dành để lục vấn và tán chuyện với họ thật vô cùng thú vị và tôi đánh giá cao sự kiên trì và nhiệt tình của họ trong việc giải thích rất nhiều khái niệm toán học đẹp đẽ cho tôi.

SIMON SINGH

Thakari, Phagwara

1997

I
"CÓ LẼ TÔI XIN PHÉP ĐƯỢC DỪNG Ở ĐÂY..."

Người ta sẽ còn nhớ tới Archimede trong khi có thể sẽ lãng quên Eschyle, bởi vì các ngôn ngữ rồi sẽ chết, nhưng các tư tưởng toán học thì sẽ còn mãi. "Bất tử" là một từ trống rỗng, nhưng một nhà toán học có nhiều khả năng được hưởng hương vị của nó hơn bất cứ một ai khác.

G. H. HARD

Cambridge, ngày 23 tháng 6 năm 1993

Đó là một hội nghị toán học quan trọng nhất thế kỷ. Có tới hai trăm nhà toán học tham dự. Có lẽ chỉ một phần tư trong số họ hiểu được một cách đầy đủ mấy chiếc bảng dày đặc những tính toán đại số và các ký hiệu Hy Lạp. Số còn lại ngồi đó cốt được chứng kiến điều mà họ hy vọng sẽ là một sự kiện lịch sử thực sự.

Những lời đồn đại đã được loan truyền từ hôm trước. Qua thư từ điện tử trao đổi trên Internet, người ta phong thanh đoán được rằng hội nghị này sẽ đạt tới điểm kết thúc trong việc chứng minh *Định lý cuối cùng của Fermat*, một bài toán nổi tiếng nhất thế giới. Nhưng những loại tin đồn kiểu như thế này không hiếm. Đề tài về định lý Fermat vốn thường xuyên xuất hiện vào những giờ giải lao uống trà và các nhà toán học say sưa đưa ra những phỏng đoán này nọ về ai đó trong số họ đã làm được điều này điều kia. Đôi khi, ngay trong phòng họp cổ kính này, những cuộc trao đổi nghề nghiệp kín đáo cũng lại biến thành những lời đồn đại về một đột phá nào đó, nhưng rồi cuối cùng cũng chẳng đi đến đâu.

Nhưng lần này, tin đồn khác hẳn. Một nhà nghiên cứu trẻ ở Cambridge đã tin chắc đến mức sẵn sàng đặt 10 bảng Anh cho người ghi sổ đánh cược về lời giải bài toán đó sẽ được đưa ra trong tuần này. Tuy nhiên, người ghi đánh cuộc đã đánh hơi thấy nguy hiểm nên từ chối không nhận số tiền đặt cược đó. Đây là nghiên cứu sinh thứ năm đặt cược cùng một số tiền như thế trong ngày. Mặc dù thực tế là những bộ óc vĩ đại nhất của hành tinh đã phải nhức đầu vì bài toán Fermat trong suốt ba thế kỷ nay, nhưng giờ đây ngay cả người ghi đánh cuộc cũng bắt đầu ngờ rằng lần này không phải như vậy nữa.

Ba chiếc bảng đen đã được viết kín đặc những tính toán và người trình bày dừng lại để chiếc bảng thứ nhất được lau đi, rồi lại tiếp tục. Mỗi một dòng tính toán dường như lại thêm một bước nhỏ nữa tiến gần tới lời giải, nhưng sau ba mươi phút rồi mà diễn giả vẫn chưa hề tuyên bố định lý đã được chứng minh. Các giáo sư chen chúc ngồi ở hàng ghế đầu nôn nóng chờ lời kết luận. Số đông nghiên cứu sinh và sinh viên đứng ở phía sau nhìn các bậc đàn anh một cách dò xét với hy vọng từ nét mặt hoặc thái độ của họ có thể đoán được ra điều mà diễn giả sẽ kết luận. Liệu phiên họp đang diễn ra có đi tới một chứng minh hoàn chỉnh của Định lý cuối cùng không hay là diễn giả mới chỉ phác ra một sơ đồ chứng minh còn chưa hoàn chỉnh?

Diễn giả đây là Andrew Wiles, một người Anh kín đáo, đã định cư ở Mỹ từ những năm 1980 và hiện là giáo sư toán ở đại học

Princeton. Tại đây ông đã nổi tiếng là một trong số những nhà toán học xuất sắc nhất của thế hệ mình. Tuy nhiên, mấy năm trở lại đây ông đã biến mất trong những hội nghị và các seminar thường niên, khiến cho các đồng nghiệp đã bắt đầu nghĩ rằng sự nghiệp của Wiles đã kết thúc. Việc tinh hoa của những bộ óc trẻ tuổi và xuất sắc phát tiết hết quá sớm cũng là chuyện thường tình, như nhà toán học Alfred Adler đã từng nói: "Cuộc đời toán học của một nhà toán học rất ngắn ngủi. Sức làm việc khó mà tốt hơn được sau hai mươi lăm hoặc ba mươi tuổi. Trước thời gian đó mà chưa làm được điều gì thật đáng kể thì sau đó sẽ không thể có được nữa".

"Những người trẻ tuổi phải chứng minh các định lý, còn những ông già thì nên ngồi viết sách" - đó là lời nhận xét của nhà toán học G. H. Hardy trong cuốn sách *Lời xin lỗi của một nhà toán học.* "Đừng bao giờ có nhà toán học nào được quên rằng toán học hơn bất cứ một bộ môn nghệ thuật hay khoa học nào khác là sân chơi của những người trẻ tuổi. Một minh họa đơn giản là tuổi bình quân của những người được bầu vào Hội Hoàng gia Luân Đôn thấp nhất là trong lĩnh vực toán học". Chính một học trò xuất sắc nhất của Hardy là Srinivasa Ramanujan đã được bầu vào Hội Hoàng gia chỉ mới ở tuổi 31, sau khi đã thực hiện được một loạt những đột phá quan trọng ở tuổi thanh niên. Mặc dù thời niên thiếu ở làng Kumbakonam quê hương ông (phía Nam Ấn Độ), Ramanujan không được học tập đến nơi đến chốn, nhưng ông đã phát minh ra những định lý và những lời giải mà các nhà toán học phương Tây không biết. Trong toán học, kinh nghiệm có được cùng với tuổi tác dường như không quan trọng bằng trực giác và sự táo bạo của tuổi trẻ. Khi Ramanujan gửi những kết quả của mình cho Hardy, vị giáo sư đại học Cambridge này đã khâm phục tới mức mời anh hãy bỏ ngay công việc của một viên chức hạng bét ở Nam Ấn Độ để tới học ở trường Trinity College (một trường đại học nổi tiếng của Anh quốc), nơi anh có điều kiện được tiếp xúc với những nhà lý thuyết số hàng đầu thế giới. Thật đáng buồn thay, khí hậu mùa đông ở miền Đông nước Anh quá khắc nghiệt đối với Ramanujan, khiến anh mắc bệnh lao và mất ở tuổi 33.

Nhiều nhà toán học khác cũng xuất sắc không kém, nhưng sự nghiệp cũng thật ngắn ngủi. Nhà toán học Na Uy thế kỷ XIX, Niels Henrik Abel, cũng đã có những đóng góp vĩ đại nhất của ông cho toán học ở tuổi 19 và chỉ tám năm sau đã qua đời trong nghèo khổ, cũng do bệnh lao phổi. Một người cùng thời và cũng xuất sắc không kém Abel là Evarist Galois, ông đã có những đột phá quan trọng khi tuổi đời còn chưa tới 20 và cũng chết một cách bi thảm ở tuổi 21.

Nêu ra những ví dụ này không phải để chứng tỏ rằng các nhà toán học đều chết sớm và chết một cách bi thảm, mà thực tế cốt là để cho thấy những ý tưởng xuất sắc nhất của họ thường nảy sinh khi họ còn trẻ và như Hardy có lần đã nói: "Tôi chưa hề biết một tiến bộ toán học quan trọng nào lại được thực hiện bởi một người đã ở tuổi ngoại ngũ tuần". Các nhà toán học đã đứng tuổi thường hòa lẫn nhạt nhòa vào cái nền chung, họ sống phần đời còn lại của mình chủ yếu làm công tác giảng dạy hoặc quản lý hơn là nghiên cứu, nhưng đó không phải là trường hợp của Wiles. Mặc dù đã ở tuổi tứ tuần đáng kính, nhưng ông đã dành cả bảy năm trời làm việc một cách hoàn toàn bí mật nhằm giải bài toán vĩ đại nhất của toán học. Trong khi một số người ngờ rằng nguồn sáng tạo của ông đã khô kiệt, Wiles đã đạt được những bước tiến thần kỳ, đã phát minh ra nhiều kỹ thuật và công cụ mà giờ đây ông sắp sửa hé lộ. Quyết định làm việc hoàn toàn đơn độc của Wiles là một chiến lược có độ rủi ro rất cao, chưa hề có tiền lệ trong thế giới toán học.

Khoa toán của các trường đại học có lẽ là nơi ít có những bí mật nhất: thực tế nó không hề có những phát minh được cấp bằng sáng chế. Cộng đồng của khoa thường tự hào về sự trao đổi tự do, cởi mở và giờ giải lao uống trà đã trở thành tục lệ hàng ngày, ở đó người ta chia sẻ, phân tích những khái niệm bên những cốc trà đen và bánh biscuit. Kết quả là người ta thấy ngày càng có nhiều bài báo được công bố ký tên của nhiều đồng tác giả hoặc cả một nhóm các nhà toán học và do đó vinh quang sẽ được chia đều cho tất cả. Tuy nhiên, nếu như giáo sư Wiles thực sự đã chứng minh được một cách hoàn chỉnh *Định lý cuối cùng của Fermat*, thì cái giải thưởng toán học được mơ ước nhất sẽ chỉ thuộc về ông, một mình ông mà thôi. Nhưng ông sẽ phải trả giá cho điều đó, bởi vì trước đấy những ý tưởng của ông không được thảo luận và phán xét bởi cộng đồng các nhà toán học, nên rất có nguy cơ phạm một sai lầm cơ bản nào đó.

Wiles cũng muốn dành nhiều thời gian hơn để kiểm tra lại toàn bộ bản thảo cuối cùng của mình, nhưng cơ hội hiếm hoi được công bố phát minh của mình tại Viện Isaac Newton ở Cambridge khiến ông đành phải từ bỏ sự thận trọng đó. Mục tiêu duy nhất của Viện này là tập hợp những bộ óc xuất sắc nhất thế giới trong một vài tuần lễ để họ tổ chức các seminar về những đề tài mũi nhọn nhất theo sự lựa chọn của họ. Tọa lạc ở góc xa của khuôn viên trường đại học, xa sinh viên và những nơi ồn ào, tòa nhà của Viện được thiết kế đặc biệt nhằm tạo cho các học giả có điều kiện tập trung vào việc trao đổi và tranh luận. Ở đây không có những hành lang kín đáo để ẩn mình, tất cả các phòng làm việc đều nhìn ra một hội trường trung tâm. Các nhà toán học được khuyến khích dành nhiều thời gian ở hội trường này chứ không giam mình kín mít trong phòng làm việc. Sự hợp tác ngay khi đi lại trong Viện cũng được khuyến khích, ngay trong thang máy lên xuống chỉ có ba tầng cũng treo sẵn một chiếc bảng đen. Thực ra tất cả các phòng trong Viện này, kể cả phòng tắm, cũng đều có treo bảng cả. Lần này, seminar ở Viện Newton được thông báo có tiêu đề: "Về các hàm -L và Số học". Rất nhiều nhà lý thuyết hàng đầu trên khắp thế giới đã tụ hội về đây để thảo luận về một lĩnh vực chuyên môn rất cao siêu của toán học thuần túy, nhưng chỉ có Wiles là biết được rằng chính các hàm này nắm giữ chiếc chìa khóa để chứng minh *Định lý cuối cùng của Fermat.*

Mặc dù được trình bày công trình của mình trước những cử tọa xuất sắc như thế này là một cơ hội rất hấp dẫn, nhưng nguyên nhân chính để Wiles chọn Viện Newton để làm việc là bởi Cambridge là thành phố quê hương ông. Chính đây là nơi ông đã sinh ra và lớn lên, nơi đã hình thành và phát triển niềm đam mê của ông đối với các con số, và cũng là nơi ông phát hiện ra bài toán mà ông đã đeo đẳng suốt phần còn lại của cuộc đời mình.

BÀI TOÁN CUỐI CÙNG

Năm 1963, lúc mới lên 10 tuổi, Wiles đã rất mê toán. "Tôi rất ham làm các bài tập toán ở trường, tôi mang cả về nhà và còn sáng tạo ra những bài toán của riêng tôi. Nhưng bài toán hay nhất mà tôi đã phát hiện ra đó là bài toán tôi tìm thấy trong thư viện thành phố".

Một lần, trên đường từ trường về nhà, Wiles quyết định ghé vào thư viện thành phố nằm trên phố Milton Road. So với thư viện của các trường đại học thì đây là một thư viện khá nghèo nàn, nhưng

Andrew Wiles ở tuổi lên mười khi lần đầu tiên bắt gặp Định lý Fermat ở đây cũng có một bộ sách về các câu đố khá phong phú, đó là một đề tài mà Wiles thường rất quan tâm. Những cuốn sách đó chứa đủ loại những vấn đề khó của khoa học và những câu đố về toán học mà lời giải thường cho sẵn ở cuối sách. Nhưng lần này Andrew lại vớ được cuốn sách chỉ có một bài toán mà lại không có lời giải.

Đó là cuốn *Bài toán cuối cùng* của tác giả Eric Temple Bell. Cuốn sách viết về lịch sử một bài toán có nguồn gốc từ thời cổ Hy Lạp nhưng chỉ đạt tới sự chín muồi của nó vào thế kỷ XVII, khi mà nhà toán học vĩ đại người Pháp tên là Pierre de Fermat lặng lẽ tung ra như một lời thách thức với toàn thế giới. Hết nhà toán học vĩ đại này đến nhà toán học vĩ đại khác đều thất bại trước di sản ấy của Fermat, và trong gần ba thế kỷ không ai giải được bài toán đó. Tất nhiên, trong toán học có nhiều bài toán còn chưa giải được, nhưng bài toán của Fermat trở nên đặc biệt như vậy là do vẻ bề ngoài đơn giản nhưng đầy lừa dối của nó. Ba mươi năm sau lần đầu tiên đọc cuốn sách của Bell, Wiles đã kể lại với tôi cảm giác của ông ở thời điểm làm quen với *Định lý cuối cùng của Fermat* như sau: "Nó nhìn khá đơn giản thế mà tất cả các nhà toán học vĩ đại trong lịch sử đều không giải được. Đây là một bài toán mà tôi, một cậu bé 10 tuổi, còn hiểu được, và tôi biết rằng từ thời điểm đó tôi sẽ không để cho nó bị sổng mất. Tôi sẽ phải giải được nó".

Sở dĩ bài toán nhìn có vẻ "ngon lành" như vậy là do nó dựa trên một định lý toán học mà hầu hết chúng ta ai cũng biết - định lý Pythagore:

> Trong một tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.

Với cách phát biểu như câu hát ngắn đó, định lý này đã in đậm trong óc hàng triệu, nếu không muốn nói là hàng tỷ con người. Đây là một định lý cơ bản mà bất cứ một cậu học trò nào cũng buộc phải học. Tuy nhiên, mặc dù ngay cả một cậu bé 10 tuổi cũng có thể hiểu được định lý đó, nhưng sáng tạo của Pythagore đã là cảm hứng để dẫn đến một bài toán đã từng thách thức những bộ óc toán học vĩ đại nhất trong lịch sử.

Pythagore xứ Samos là một trong số những nhân vật có nhiều ảnh hưởng và còn nhiều bí ẩn nhất trong toán học. Do không có những thông tin chuẩn về cuộc đời và các công trình của ông, nên bao quanh nhân vật này là cả một bức màn huyền thoại và truyền thuyết, khiến cho các nhà lịch sử khó mà phân biệt được đâu là sự thật, đâu là hư cấu. Nhưng có một điều chắc chắn, đó là Pythagore đã phát triển ý tưởng về logic số và là người đã tạo ra thời kỳ hoàng kim đầu tiên trong toán học. Chính nhờ thiên tài của ông mà các con số không còn đơn thuần chỉ dùng để đếm và tính toán mà còn có giá trị nội tại riêng của chúng nữa. Ông đã nghiên cứu tính chất của những con số đặc biệt, những mối quan hệ giữa chúng và những hình mẫu do chúng tạo nên. Pythagore đã nhận thấy các con số tồn tại độc lập với thế giới, sờ mó được và do đó sự nghiên cứu chúng sẽ giúp ta tránh được sự thiếu chính xác của cảm giác. Điều này nghĩa là ông có thể phát hiện ra những chân lý độc lập với những quan niệm hoặc định kiến và do đó những chân lý ấy có tính tuyệt đối hơn so với bất kỳ tri thức nào đã biết trước đó.

Sống ở thế kỷ thứ VI trước Công nguyên, Pythagore đã lĩnh hội được nhiều tri thức toán học thông qua những chuyến chu du trong khắp thế giới cổ đại. Người ta kể rằng ông đã tới tận Ấn Độ và xứ

Bretagne, nhưng điều chắc chắn hơn là ông đã thu thập được nhiều kỹ thuật và công cụ toán học từ những người Ai Cập và Babilon. Cả hai dân tộc cổ xưa này đều đã vượt ra ngoài giới hạn của sự đo đếm thuần túy, họ đã thực hiện những phép tính phức tạp cho phép tạo ra được các hệ đếm tinh xảo và xây dựng nên những công trình đồ sộ. Thật ra, họ coi toán học thuần túy chỉ là công cụ để giải quyết những bài toán thực tế, động cơ phía sau việc phát minh ra một số quy tắc hình học là để họ dựng lại được ranh giới những mảnh ruộng đã bị xóa sạch bởi nạn lụt hằng năm của sông Nil. Chính bản thân chữ "geometry" (hình học) có nghĩa là "đạc điền".

Pythagore đã quan sát thấy rằng những người Ai Cập và Babilon tiến hành mỗi tính toán đều theo một "công thức" mà người ta áp dụng nó một cách mù quáng. Những "công thức" như vậy được truyền từ thế hệ này sang thế hệ khác và luôn luôn cho đáp số đúng, nên không ai bận tâm kiểm tra lại hoặc phân tích logic đằng sau những phương trình đó. Điều quan trọng đối với các nền văn minh này là những tính toán đó phải cho kết quả đúng, còn lý do tại sao lại như vậy thì họ không mấy quan tâm.

Sau khoảng hai mươi năm chu du thiên hạ, Pythagore đã nắm được hầu như tất cả những quy tắc toán học của thế giới mà ông biết. Ông trở về quê hương Samos của mình, một hòn đảo ở biển Aege, với ý định thành lập một trường chuyên nghiên cứu triết học và đặc biệt là nghiên cứu những quy tắc toán học mà ông mới lĩnh hội được. Ông muốn tìm hiểu các con số chứ không đơn thuần chỉ sử dụng chúng. Ông hy vọng sẽ tìm được nhiều thanh niên với tư tưởng tự do giúp được ông phát triển những triết lý mới và cấp tiến. Nhưng trong thời gian ông xa quê hương, tên bạo chúa Polycrates đã biến Samos vốn từng là hòn đảo tự do thành một xã hội bảo thủ và cố chấp. Polycrates đã mời Pythagore tới cung đình của mình, nhà triết học hiểu ngay rằng đó chẳng qua chỉ là thủ đoạn nhằm bịt miệng ông và ông đã từ chối vinh dự đó. Ông bỏ thành phố quê hương tới sống trong một hang đá ở một nơi hoang vắng trên đảo, nơi ông có thể tự do suy tư mà không bị quấy rầy.

Sự đơn độc đè nặng lên cuộc sống của Pythagore và cuối cùng ông đã phải bỏ tiền cho một chú bé để nó đồng ý là học trò của mình. Mặc dù nhân thân của người học trò đầu tiên này còn nhiều điều đáng ngờ, theo một số nhà lịch sử thì tên cậu ta cũng là Pythagore và sau này cũng được nổi tiếng, là người đầu tiên cho rằng các vận động viên điền kinh cần phải ăn thịt để tăng cường thể chất của mình. Pythagore-thầy đã phải trả cho Pythagore-trò mỗi buổi học ba "oboli" và chỉ sau vài tuần ông thầy nhận thấy rằng sự ngại học ban đầu của trò đã chuyển thành niềm ham mê hiểu biết thực sự. Để đo lường mức độ thành công của mình, Pythagore giả vờ nói rằng ông không thể trả tiền cho học sinh được nữa và đành phải dừng lại không thể dạy tiếp. Nghe thấy vậy, cậu học sinh bèn đề nghị sẽ trả tiền thầy chứ không chịu ngừng học. Bây giờ cậu học trò đã trở thành một môn đồ thực sự. Thật không may đó là sự chuyển đổi duy nhất mà Pythagore thực hiện được ở Samos. Cũng đã có một trường được biết tới dưới cái tên Hemicycle Pythagore, tuy nhiên những quan niệm của ông về cải cách xã hội không được chấp nhận, cuối cùng nhà triết học đành phải cùng với mẹ và một môn đồ duy nhất khăn gói ra đi.

Pythagore lên thuyền đi tới miền Nam Italia, hồi đó còn thuộc Hy Lạp. Ông dừng chân ở Croton, tại đây ông đã may mắn tìm được một người bảo trợ lý tưởng, đó là Milo, một cự phú ở Croton và cũng là một trong số những người khỏe nhất trong lịch sử. Mặc dù tiếng tăm của Pythagore đã lan truyền khắp Hy Lạp như một nhà thông thái của Samos, nhưng tiếng tăm của Milo còn nổi hơn nhiều. Ông này là người có thân hình như Hercule và đã từng mười hai lần đoạt chức vô địch trong các cuộc thi đấu Olympic và Pythic. Ngoài điền kinh ra, Milo còn rất trân trọng và nghiên cứu cả triết học và toán học, ông đã dành một phần ngôi nhà của mình để Pythagore đủ chỗ lập một trường học. Đây chính là hiện thân của sự kết hợp giữa một bộ óc sáng tạo nhất với một cơ thể cường tráng nhất.

Sau khi an cư trong ngôi nhà mới, Pythagore đã lập nên Hội ái hữu, gồm tới sáu trăm môn đồ, những người không chỉ có khả năng hiểu được những điều do ông giảng dạy mà còn làm phong phú thêm bằng những ý tưởng và chứng minh mới. Khi gia nhập Hội, mỗi môn đồ phải hiến toàn bộ tài sản của mình cho một quỹ chung và nếu có ai đó muốn rời Hội, thì họ sẽ nhận được số tài sản lớn gấp đôi so với số tài sản đóng góp lúc ban đầu và sẽ được dựng một tấm bia đá để tưởng nhớ. Hội ái hữu là một tổ chức bình đẳng, có cả một số phụ nữ. Một đồ đệ yêu của Pythagore chính là cô con gái của Milo, cô Theano xinh đẹp, mặc dù chênh lệch về tuổi tác, cuối cùng họ cũng đã cưới nhau.

Ít lâu sau khi thành lập Hội ái hữu, Pythagore đã phát minh ra từ "philosopher", nghĩa là triết gia đồng thời cũng là mục đích của Hội. Trong thời gian dự các cuộc thi đấu Olympic, Leon - Hoàng tử xứ Phlius - có hỏi Pythagore: "Ông tự định nghĩa mình là người như thế nào?". Pythagore đáp: "Tôi là một triết gia", nhưng Leon chưa bao giờ nghe thấy từ đó nên đề nghị Pythagore giải thích.

"Thưa Hoàng tử, cuộc sống cũng có thể được so sánh với những cuộc thi đấu đang diễn ra kia, bởi vì trong đám đông bạt ngàn tụ tập ở đây, có những người đến để kiếm lợi, có những người đến với hy vọng được nổi tiếng và vinh quang nhưng cũng có một số ít người tới để quan sát và tìm hiểu tất cả những gì đang diễn ra ở đây.

Cuộc sống cũng như vậy. Một số người được dẫn dắt bởi ham muốn của cải, một số khác lại được dẫn dắt một cách mù quáng bởi sự thèm khát điên cuồng đối với quyền lực và sự thống trị, nhưng người cao thượng nhất là người hiến dâng mình cho sự nghiệp tìm ra ý nghĩa và mục đích của chính cuộc sống, là người tìm cách phát hiện ra những bí mật của tự nhiên. Tôi gọi người đó là triết gia, bởi vì mặc dù không có ai thông thái trên mọi phương diện, nhưng người đó có thể yêu sự thông thái như là chìa khóa mở ra mọi bí mật của tự nhiên."

Có nhiều người biết những khát vọng của Pythagore, nhưng những người ở ngoài Hội thì không thể biết được quy mô cũng như các chi tiết trong những thành công của ông. Mỗi một thành viên của trường phải tuyên thệ không được để lộ ra ngoài bất kỳ một phát minh toán học nào. Sau khi Pythagore qua đời, một thành viên của Hội đã bị dìm chết vì không giữ được lời thề: *anh ta đã tiết lộ phát minh của Hội về một khối đa diện đều mới, đó là khối tạo bởi 12 ngũ giác đều.* Tính bí mật rất cao của Hội ái hữu là một phần của nguyên nhân dẫn tới những huyền thoại xung quanh những nghi lễ lạ lùng mà có thể Hội này đã tiến hành, và điều này cũng giải thích tại sao có rất ít những bằng chứng về các thành tựu toán học mà Hội đã đạt được. Điều mà người ta biết chắc chắn, đó là Pythagore đã thiết lập được một đạo lý làm thay đổi đường hướng phát triển của toán học. Có thể nói Hội ái hữu là một cộng đồng mang tính chất tôn giáo, mà một trong những thần tượng mà nó tôn thờ là *Con số*. Những thành viên của Hội cho rằng thông qua việc tìm hiểu những mối quan hệ giữa các con số, họ sẽ phát hiện ra những bí mật tâm linh của Vũ trụ và tiến gần hơn tới các thần. Hội đặc biệt quan tâm nghiên cứu những số đếm (1, 2, 3...) và các phân số. Những số đếm này cũng còn được gọi là các số nguyên dương hay số tự nhiên, và cùng với các phân số (tức tỷ số của hai số nguyên), theo thuật ngữ chuyên môn, được gọi là các số hữu tỷ. Trong vô hạn các con số, Hội ái hữu tìm kiếm các số có tầm quan trọng đặc biệt đối với họ, trong đó đặc biệt nhất là các số được gọi là "hoàn hảo".

Theo Pythagore, sự hoàn hảo của các con số phụ thuộc vào các ước số của nó (tức là những số mà số đó chia hết). Ví dụ, số 12 có các ước số là 1, 2, 3, 4 và 6. Khi tổng các ước số của một số lớn hơn chính số đó thì nó được gọi là số "dôi". Số 12 là một số dôi vì tổng các ước số của nó là 16. Trái lại, khi tổng các ước số của một số nhỏ hơn chính số đó thì nó được gọi là số "khuyết". Ví dụ, 10 là số khuyết bởi vì tổng các ước số của nó (là 1, 2 và 5) chỉ bằng 8.

Các số có ý nghĩa nhất và cũng hiếm hoi nhất là những số có tổng các ước số bằng chính số đó và đấy là những "số hoàn hảo". Số 6 có các ước số là 1, 2 và 3, do đó nó là số hoàn hảo bởi vì 1+ 2 + 3 = 6. Số hoàn hảo tiếp theo là 28, bởi vì 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.

Ngoài ý nghĩa toán học đối với Hội ái hữu, sự hoàn hảo của các con số 6 và 28 cũng đã được thừa nhận bởi các nền văn hóa khác, trong đó người ta quan sát thấy rằng Mặt trăng quay một vòng xung quanh Trái đất hết 28 ngày hay cho rằng Chúa đã tạo ra thế giới trong 6 ngày. Trong cuốn Thành phố của Chúa, thánh Augustine khẳng định rằng mặc dù Chúa thừa sức tạo ra thế giới trong chớp mắt, nhưng Người đã quyết định làm trong 6 ngày để phản ánh sự hoàn hảo của Vũ trụ. Ngoài ra, ông còn cho rằng con số 6 là hoàn hảo không phải do Chúa đã chọn nó mà bởi vì sự hoàn hảo là một thuộc tính cố hữu của con số đó: "Số 6 tự nó đã là hoàn hảo chứ không phải Chúa đã tạo ra vạn vật trong 6 ngày; thực ra thì ngược lại mới đúng, Chúa tạo ra vạn vật trong 6 ngày bởi vì đó là con số hoàn hảo và nó vẫn cứ là hoàn hảo thậm chí nếu như chuyện đó không xảy ra."

Các số nguyên dương càng lớn thì các số hoàn hảo càng trở nên khó tìm hơn. Số hoàn hảo thứ ba người ta tìm được là số 496, số thứ tư là 8.128, số thứ năm là 33.550.336 và số thứ sáu là 8.589.869.056. Pythagore còn nhận thấy rằng các số hoàn hảo ngoài tính chất cũng là tổng của các ước số, chúng còn có nhiều tính chất khác cũng rất lý thú. Ví dụ, các số hoàn hảo luôn bằng tổng của dãy các số nguyên dương. Chẳng hạn, ta có:

$$
\begin{aligned}
6 &= 1 + 2 + 3,\\
28 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7,\\
496 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + \ldots + 30 + 31,\\
8.128 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + \ldots + 126 + 127.
\end{aligned}
$$

Pythagore rất đam mê các con số hoàn hảo, nhưng ông không hài lòng chỉ gói gọn ở mức độ thu thập các con số đó, mà còn muốn phát hiện ra những ý nghĩa sâu xa của chúng. Một trong số những phát hiện của ông là sự hoàn hảo gắn liền với "tính nhị phân". Các con số $4 = 2\times2$, $8 = 2\times2\times2$, $16 = 2\times2\times2\times2$, v.v., như ta đã biết, đều được biểu diễn qua các lũy thừa của 2 và có thể được viết dưới dạng 2^n, với n con số 2 nhân với nhau. Tất cả những lũy thừa của 2 này chỉ suýt soát là số hoàn hảo vì tổng các ước số của chúng chỉ nhỏ hơn chính số đó có một đơn vị, nghĩa là các số này là những số chỉ hơi khuyết:

$2^2 = 2\times2$	= **4**	Các ước số: 1, 2	Tổng = **3**,
$2^3 = 2\times2\times2$	= **8**	Các ước số: 1, 2, 4	Tổng = **7**,
$2^4 = 2\times2\times2\times2$	= **16**	Các ước số: 1, 2, 4, 8	Tổng = **15**,
$2^5 = 2\times2\times2\times2\times2$	= **32**	Các ước số: 1, 2, 4, 8, 16	Tổng = **31**.

Hai thế kỷ sau Euclid đã "tinh luyện" thêm mối quan hệ giữa "tính nhị phân" và "tính hoàn hảo". Ông đã phát hiện ra rằng các số hoàn hảo luôn bằng tích của hai số, trong đó một số là lũy thừa của 2 và số kia là lũy thừa tiếp sau của 2 trừ đi 1. Cụ thể là:

$$6 = 2^1(2^2 - 1)$$

$$28 = 2^2(2^3 - 1)$$

$$496 = 2^4(2^5 - 1)$$

$$8.128 = 2^6(2^7 - 1)$$

Các máy tính hiện nay vẫn tiếp tục săn tìm các số hoàn hảo và nó đã tìm được một số cực lớn có dạng: $2^{216090}(2^{216091} - 1)$, đây là con số có hơn 130.000 chữ số và tuân theo đúng qui tắc của Euclid. Pythagore mê đắm cấu trúc và những tính chất phong phú của các số hoàn hảo cũng như khâm phục trước sự tinh tế và kì diệu của chúng. Thoạt nhìn, tính hoàn hảo là một khái niệm tương đối dễ dàng nắm bắt, thế mà những người cổ Hy Lạp vẫn không thể phát hiện ra một số điểm cơ bản của nó. Chẳng hạn như có rất nhiều các số có tổng các ước số chỉ nhỏ hơn chính các số đó một đơn vị, tức là chỉ hơi khuyết một chút thôi, nhưng dường như lại không tồn tại các số chỉ hơi dôi. Những người cổ Hy Lạp không thể tìm được số nào có tổng các ước số lớn hơn chính số đó một đơn vị, mà họ cũng không giải thích được tại sao lại như vậy. Một điều hết sức thất vọng là mặc dù họ không phát hiện được các số hơi dôi, nhưng họ cũng không chứng minh được các số đó là không tồn tại. Biết được tại sao không tồn tại những số hơi dôi, tất nhiên, chẳng có một ý nghĩa thực tế nào, nhưng đó là vấn đề có thể soi sáng bản chất của các con số và do đó đáng để ta nghiên cứu. Những câu đố kiểu như vậy rất hấp dẫn Hội ái hữu của Pythagore và trong suốt hơn hai ngàn rưỡi năm sau, các nhà toán học vẫn chưa thể chứng minh được những con số hơi dôi là không tồn tại.

Tất cả đều là con số

Ngoài việc nghiên cứu mối quan hệ giữa các con số, Pythagore cũng rất quan tâm tới mối liên hệ giữa các con số và tự nhiên. Ông nhận thấy rằng các hiện tượng tự nhiên được chi phối bởi các qui luật và các qui luật này đều có thể được diễn tả bởi các phương trình toán học. Một trong số những mối liên hệ mà Pythagore đã phát hiện ra là mối quan hệ cơ bản giữa sự hài hòa của âm nhạc và sự hài hòa của các con số.

Nhạc cụ quan trọng nhất thời cổ Hy Lạp là cây đàn lyre bốn dây. Trước Pythagore, một số nhạc sĩ đã biết rằng một số nốt nhạc khi hòa với nhau sẽ tạo ra một hiệu quả âm thanh thú vị và họ thường chỉnh đàn sao cho khi bật hai dây cùng một lúc sẽ tạo được một sự hòa âm như vậy. Tuy nhiên, họ không hiểu được tại sao một số nốt lại hài hòa với nhau và do đó không có được một hệ thống khách quan để chỉnh các nhạc cụ của họ. Họ chỉ chỉnh theo đôi tai của họ cho đến khi cảm thấy nghe đã êm tai - một quá trình mà Platon gọi là "sự hành hạ các nút chỉnh nhạc".

Iamblichus, một học giả ở thế kỷ IV đã viết chín cuốn sách về giáo phái Pythagore, đã mô tả về quá trình Pythagore phát hiện ra những nguyên lý nằm sau các nhạc cụ như sau:

> Một lần Pythagore nảy ra ý định chế tạo một dụng cụ bổ trợ cho thính giác, sao cho vừa hiệu quả vừa chính xác. Dụng cụ này có thể sánh với la bàn, thước kẻ và các dụng cụ quang học bổ trợ cho thị giác. Tương tự, xúc giác cũng có sự cân đo của nó. Do một sự tình cờ may mắn, ông đi qua gần một xưởng lò rèn và nghe thấy tiếng những chiếc búa đập xuống sắt tạo ra trong đó sự hài hòa rất phong phú của những tiếng dội, trừ duy nhất một tổ hợp âm thanh.

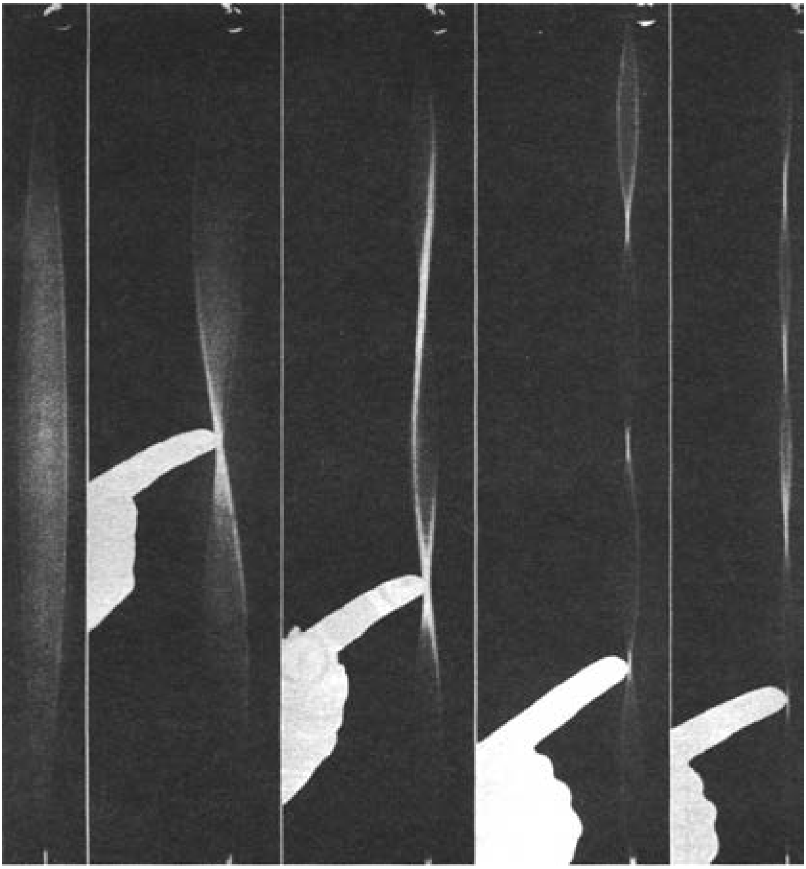
Theo Iamblichus, Pythagore chạy ngay vào xưởng rèn để nghiên cứu sự hòa âm của những chiếc búa. Ông nhận thấy rằng phần lớn những chiếc búa đập đồng thời đều tạo ra những âm thanh hài hòa, trong khi đó một tổ hợp có chứa một chiếc búa đặc biệt lại luôn luôn cho những âm thanh nghe rất chói tai. Ông phân tích những chiếc búa và phát hiện ra rằng những chiếc búa cho âm thanh hài hòa với nhau có một quan hệ toán học rất đơn giản: khối lượng của chúng bằng một phân số đơn của nhau. Cụ thể là những chiếc búa này có khối lượng bằng 1/2, 2/3 hay 3/4 khối lượng của một chiếc búa nào đó trong nhóm. Trái lại, chiếc búa khi đập cùng những chiếc búa khác gây ra những âm thanh chối tai là chiếc búa có khối lượng không thỏa mãn hệ thức nói trên so với những chiếc búa khác trong nhóm.

Như vậy Pythagore đã phát hiện ra rằng chính những tỷ số đơn giản trên đã tạo ra sự hài hòa trong âm nhạc. Một số nhà khoa học không tin lắm vào câu chuyện trên của Iamblichus, nhưng chắc chắn cách thức mà Pythagore đã áp dụng lý thuyết mới của mình về các tỷ số âm nhạc cho cây đàn lyre là bằng cách xem xét những tính chất của một dây riêng rẽ. Chỉ đơn giản gảy dây đó lên là phát ra một nốt chuẩn hay một tone, âm này do toàn bộ chiều dài của dây rung động tạo ra. Bằng cách giữ chặt dây đàn ở những điểm cụ thể nào đó dọc theo chiều dài của dây là có thể tạo ra những dao động và nốt nhạc khác như minh họa trên Hình 1. Điều cực kỳ quan trọng là những nốt đó chỉ hài hòa ở những điểm rất xác định. Ví dụ, bằng cách cố định dây đàn tại điểm ở chính giữa của nó, khi gảy lên, ta sẽ nhận được một nốt cao hơn một quãng tám và nốt này hài hòa với nốt ban đầu. Tương tự, nếu ta cố định dây đàn tại điểm ở đúng một phần ba, một phần tư hay một phần năm chiều dài của nó, thì sẽ nhận được những nốt hài hòa khác. Nhưng nếu cố định dây đàn không ở đúng những điểm có tính chất đó thì nốt nhạc tạo ra sẽ không hài hòa với những nốt khác.

Pythagore cũng là người đầu tiên phát hiện ra quy tắc toán học chi phối các hiện tượng vật lý và chứng minh được rằng có một mối quan hệ cơ bản giữa toán học và khoa học. Từ khi có phát minh đó, các nhà khoa học đã lao vào tìm kiếm những quy tắc toán học chi phối từng quá trình vật lý và nhận thấy rằng các con số đã xuất hiện trong tất cả các hiện tượng tự nhiên theo đủ mọi cách. Ví dụ, có một con số đặc biệt đã xuất hiện và giữ vai trò quyết định trong việc đo chiều dài của rất nhiều con sông. Giáo sư Hans-Henrik Stlum, nhà khoa học về Trái đất thuộc trường đại học Cambridge đã tiến hành tính toán tỷ số giữa chiều dài thực của các con sông, từ nguồn đến cửa sông, và độ dài tính theo đường chim bay của chúng. Mặc dù tỷ số này có giá trị khác nhau đối với các con sông khác nhau, nhưng tính trung bình thì nó chỉ lớn hơn 3 một chút, tức là có thể nói rằng chiều dài thực của các con sông chỉ lớn hơn chiều dài theo đường chim bay của chúng gần ba lần. Thực ra, tỷ số này xấp xỉ bằng 3,14, rất gần với số π, tức là tỷ số giữa chu vi và đường kính của hình tròn.

Số π ban đầu được dẫn ra từ hình học của các vòng tròn, nhưng nó xuất hiện lại nhiều lần trong các bối cảnh khoa học rất khác nhau. Trong trường hợp tỷ số chiều dài của các con sông, sự xuất hiện của số π là do sự cạnh tranh giữa trật tự và hỗn độn. Einstein là người đầu tiên nêu ra ý tưởng cho rằng các con sông ngày càng có xu hướng đi theo một đường vòng khép kín, bởi vì một độ cong dù nhỏ cũng sẽ làm cho dòng chảy của nó trở nên mạnh hơn ở phía ngoài, tạo ra sự xói lở mạnh hơn và con sông trở nên uốn cong nhiều hơn. Sự uốn cong càng nhiều thì dòng chảy ở phía ngoài lại càng mạnh, sự xói lở càng gia tăng và con sông lại càng bị uốn cong hơn nữa... Nhưng trong thực tế, có một hiện tượng tự nhiên kiềm chế sự hỗn độn đó: sự tăng độ uốn cong của các con sông cuối cùng sẽ làm cho chúng quanh trở lại và chập vào chính nó. Con sông sẽ trở nên thẳng hơn khi để lại một vòng khép kín của nó sang một bên dưới dạng một cái hồ hình sừng bò. Sự cân bằng giữa hai nhân tố đối nghịch nhau này dẫn tới tỷ số trung bình giữa chiều dài thực và chiều dài theo đường chim bay của các con sông gần bằng số π. Tỷ số này thường được tìm thấy đối với các con sông chảy hiền hòa trong vùng bình nguyên thoai thoải ở Braxin hay vùng Siberi.

Pythagore đã nhận thấy rằng các con số ẩn giấu trong vạn vật, từ những hòa âm trong âm nhạc cho tới quỹ đạo của các hành tinh,



Hình 1. Một dây đàn dao động tự do sẽ phát ra một âm cơ bản. Bằng cách tạo một nút ở chính giữa chiều dài của nó (tức cố định không cho dây dao động tại điểm đó), nốt được tạo ra sẽ cao hơn nốt cơ bản một quãng tám. Nếu ta di chuyển điểm nút này tới những điểm ứng với chiều dài là phân số đơn (ví dụ như bằng một phần ba, một phần tư hay một phần năm, chẳng hạn) của chiều dài dây đàn thì ta sẽ nhận được các hợp âm khác.

và điều đó khiến ông phải tuyên bố rằng: "Tất cả đều là Con số". Thông qua sự khám phá ý nghĩa của toán học, Pythagore đã phát triển được một ngôn ngữ cho phép ông và những người khác mô tả được bản chất của Vũ trụ. Từ đó, mỗi một đột phá trong toán học lại cung cấp cho các nhà khoa học từ vựng mà họ cần để giải thích tốt hơn những hiện tượng diễn ra xung quanh. Thực tế, những phát triển trong toán học còn kích thích những cuộc cách mạng trong khoa học.

Khi phát minh ra định luật vạn vật hấp dẫn, Newton đã là một nhà toán học kiệt xuất. Đóng góp vĩ đại nhất của ông cho toán học là phát triển phép tính vi tích phân, và trong những năm sau đó, các nhà vật lý đã dùng ngôn ngữ của phép tính này để mô tả tốt hơn các định luật về hấp dẫn và giải các bài toán về hấp dẫn. Lý thuyết cổ điển của Newton về hấp dẫn đã tồn tại hàng thế kỷ cho tới khi bị thuyết tương đối rộng của Einstein thay thế lý thuyết mới này đưa ra một cách giải thích khác, chi tiết hơn về hấp dẫn. Những ý tưởng riêng của Einstein chỉ có thể thực hiện được là do đã có các khái niệm toán học mới, cung cấp cho ông một ngôn ngữ tinh xảo hơn, phù hợp với những ý tưởng khoa học phức tạp hơn của ông. Ngày nay, sự giải thích hấp dẫn lại một lần nữa chịu ảnh hưởng của những đột phát trong toán học. Những lý thuyết lượng tử mới nhất về hấp dẫn gắn liền với sự phát triển của các dây toán học, đây là một lý thuyết trong đó các tính chất hình học và tôpô của các ống dường như có thể giải thích tốt nhất các lực trong tự nhiên.

Trong số tất cả các mối liên hệ giữa các con số và tự nhiên được Hội ái hữu của Pythagore nghiên cứu, quan trọng nhất có lẽ là hệ thức mang tên người sáng lập ra nó. Định lí Pythagore cho ta một phương trình đúng đối với tất cả các tam giác vuông và do đó nó cũng là phương trình định nghĩa chính các tam giác đó. Mà góc vuông lại xác định đường vuông góc, tức là quan hệ giữa đường thẳng đứng và đường nằm ngang và xét cho đến cùng cũng là quan hệ của ba chiều trong Vũ trụ quen thuộc của chúng ta. Như vậy, toán học thông qua các góc vuông xác định chính cấu trúc của không gian chúng ta đang sống.

Đây là một nhận thức rất sâu sắc, nhưng kiến thức toán học cần thiết để lĩnh hội định lý này lại tương đối đơn giản. Để hiểu được nó ta chỉ cần bắt đầu bằng việc đo chiều dài hai cạnh góc vuông (x và y), sau đó bình phương các số đo được (x^2 và y^2) rồi cộng lại ($x^2 + y^2$) ta sẽ tìm được con số cuối cùng. Nếu bạn tìm con số đó cho tam giác vuông trên hình 2, thì đáp số là 25.

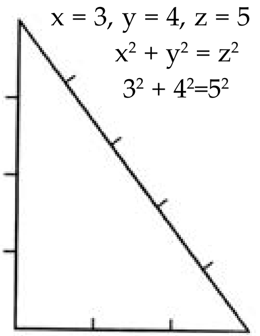
Bây giờ bạn hãy tiến hành đo cạnh huyền (z), rồi bình phương con số đo được. Bạn sẽ nhận thấy kết quả thật lý thú: số z^2 đúng bằng con số bạn vừa tính được ở trên, tức là $5^2 = 25$. Điều này có nghĩa là:

> Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền đúng bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.

Nói một cách khác:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Điều này rõ ràng là đúng đối với tam giác trên hình 2, nhưng tuyệt vời ở chỗ định lý Pythagore đúng với bất kỳ một tam giác vuông nào mà bạn có thể tưởng tượng ra. Đây là một quy luật phổ quát của toán học và bạn có thể dựa vào nó bất cứ khi nào bạn gặp một tam giác có góc vuông. Ngược lại, nếu bạn có một tam giác



Hình 2. Tất cả các tam giác vuông đều tuân theo định lý Pythagore.

tuân theo định lý Pythagore, thì bạn có thể tuyệt đối tin tưởng rằng đó là một tam giác vuông.

Ở đây cũng cần phải nói rõ rằng mặc dù định lý này luôn luôn gắn liền với tên tuổi của Pythagore, nhưng thực ra nó đã được người Trung Hoa và người Babylon sử dụng từ hơn 1.000 năm trước đó. Tuy nhiên, các nền văn hóa này lại không biết được rằng định lý đó đúng với mọi tam giác vuông. Chắc chắn là nó đúng đối với tất cả các tam giác vuông mà họ đã kiểm tra, nhưng họ không có cách nào chứng tỏ được rằng nó cũng đúng với cả những tam giác vuông mà họ chưa kiểm tra. Lý do để khẳng định nó trở thành một định lý là ở chỗ Pythagore là người đầu tiên chứng minh được nó là một chân lý phổ biến.

Nhưng làm thế nào mà Pythagore biết được rằng định lý của ông đúng với mọi tam giác vuông? Tất nhiên, ông không thể hy vọng kiểm tra được hết một số vô hạn các tam giác vuông và do đó chưa thể tin chắc một trăm phần trăm định lý của mình là tuyệt đối đúng. Lý do để Pythagore tin tưởng vào sự đúng đắn của mình nằm trong khái niệm chứng minh toán học. Sự tìm tòi một chứng minh toán học cũng chính là sự tìm tòi một tri thức có tính tuyệt đối hơn tri thức đã được tích lũy bởi bất cứ một bộ môn nào khác. Khát vọng tìm kiếm chân lý tối hậu thông qua phương pháp chứng minh chính là động lực thôi thúc các nhà toán học trong suốt 2.500 năm qua.

Chứng minh tuyệt đối

Câu chuyện về định lý cuối cùng của Fermat xoay quanh việc tìm kiếm một chứng minh đã thất lạc. Chứng minh toán học có công hiệu và chặt chẽ hơn rất nhiều so với khái niệm chứng minh mà chúng ta đôi khi vẫn dùng trong ngôn ngữ hằng ngày, hoặc thậm chí khái niệm chứng minh như các nhà vật lý và hóa học vẫn hiểu. Sự khác nhau giữa chứng minh trong khoa học nói chung và trong toán học là điều khá tinh tế và sâu sắc, đồng thời cũng là điều hết sức quan trọng để hiểu được công việc của tất cả các nhà toán học kể từ thời Pythagore.

Ý tưởng về một chứng minh toán học kinh điển được bắt đầu từ một loạt các tiên đề, tức là các mệnh đề được coi là đúng hoặc là một sự thật hiển nhiên. Sau đó bằng những suy luận logic, từng bước một, người ta đi tới một kết luận. Nếu những tiên đề là đúng và quá trình suy luận logic không có sai sót thì kết luận rút ra là không thể phủ nhận được. Và kết luận đó chính là một định lý.

Những chứng minh toán học dựa trên quá trình suy luận logic này và một khi đã được xác lập, chúng sẽ còn đúng mãi mãi. Những chứng minh toán học là tuyệt đối. Để đánh giá hết ý nghĩa của những chứng minh toán học ta hãy so sánh nó với người họ hàng "bình dân" hơn, đó là những chứng minh trong khoa học. Trong khoa học, người ta đưa ra một giả thuyết để giải thích một hiện tượng vật lý. Nếu những quan sát về hiện tượng phù hợp tốt với giả thuyết nêu ra, thì đó là một bằng chứng có lợi cho giả thuyết đó. Hơn thế nữa, giả thuyết này có thể không chỉ đơn thuần mô tả được hiện tượng đang xét mà còn tiên đoán được các hiện tượng khác. Khi đó người ta sẽ tiến hành những thực nghiệm nhằm kiểm tra sức mạnh tiên đoán của giả thuyết và nếu như vẫn tiếp tục thành công thì lại có thêm những bằng chứng mới hậu thuẫn cho nó. Cuối cùng, nếu như những bằng chứng trở nên áp đảo, thì giả thuyết đó sẽ được thừa nhận là một lý thuyết khoa học.

Lý thuyết khoa học không bao giờ được chứng minh ở mức tuyệt đối như một định lý toán học: nó đơn thuần chỉ được xem là có tính hợp lý cao trên cơ sở những bằng chứng hiện có. Chứng minh khoa học dựa trên quan sát và cảm thức, mà cả hai cái đó đều có thể sai lầm và chỉ cho ta sự mô tả gần đúng của chân lý. Như Bertrand Russell đã chỉ ra: "Mặc dù điều này xem ra có vẻ nghịch lý, nhưng toàn bộ khoa học chính xác đều được ngự trị bởi ý tưởng gần đúng". Ngay cả những "chứng minh" khoa học được chấp nhận rộng rãi nhất đi nữa cũng luôn lảng vảng đâu đó một tí chút nghi ngờ. Đôi khi sự nghi ngờ này thu nhỏ dần, mặc dù không bao giờ biến mất hoàn toàn, nhưng trong nhiều trường hợp khác sự chứng minh đó cuối cùng hóa ra lại là sai. Chính những điểm yếu này của các chứng minh khoa học thường dẫn tới những cuộc cách mạng trong khoa học, trong đó một lý thuyết đã từng được xem là đúng đắn được thay thế bằng một lý thuyết khác, có thể chỉ đơn thuần là sự hoàn thiện hơn lý thuyết cũ, nhưng cũng có thể là hoàn toàn mâu thuẫn với lý thuyết cũ.

Ví dụ, công cuộc tìm kiếm các hạt cơ bản của vật chất thuộc mỗi thế hệ các nhà vật lý có thể làm đảo lộn hoặc ít nhất cũng làm hoàn thiện thêm lý thuyết của các bậc tiền bối. Cuộc săn tìm này về thực chất bắt đầu từ đầu thế kỷ XIX khi mà hàng loạt thực nghiệm đã dẫn John Dalton đi tới giả thuyết rằng mọi vật đều được cấu thành từ các nguyên tử gián đoạn và các nguyên tử chính là các hạt cơ bản.

Tới cuối thế kỷ đó, J.J. Thomson đã phát hiện ra electron, đây là hạt nội nguyên tử đầu tiên được biết tới, và do đó nguyên tử không còn là hạt cơ bản nữa.

Trong những năm đầu của thế kỷ XX, các nhà vật lý đã xây dựng được một bức tranh "hoàn chỉnh" về nguyên tử: nó gồm một hạt nhân cấu tạo bởi các proton và neutron, và có các electron quay xung quanh. Khi này proton, neutron và electron được kiêu hãnh xem là những thành phần hoàn chỉnh của Vũ trụ. Nhưng sau đó những thực nghiệm với tia vũ trụ lại phát hiện ra sự tồn tại của nhiều hạt cơ bản khác, như pion và muon. Và một cuộc cách mạng lớn hơn đã nổ ra sau khi người ta phát hiện ra phản vật chất vào năm 1932, đó là sự phát hiện ra phản-electron (hay positron) và sau đó là phản-proton, phản-neutron, v.v.. Vào thời đó các nhà vật lý hạt không chắc là còn tồn tại bao nhiêu hạt khác nữa, nhưng ít nhất thì họ cũng tin chắc rằng những hạt mà họ vừa tìm được thực sự là cơ bản. Điều này kéo dài cho đến tận những năm 1960, khi khái niệm về các hạt quark ra đời. Người ta thấy rằng bản thân proton dường như lại được cấu tạo từ các hạt quark có điện tích phân số; và các hạt neutron, pion và muon cũng như vậy. Bài học "luân lý" rút ra từ câu chuyện này là các nhà vật lý luôn luôn thay đổi bức tranh của mình về Vũ trụ, nếu không muốn nói là xoá sạch nó và làm tất cả lại từ đầu. Trong thập niên tiếp sau, chính quan niệm coi các hạt như những điểm toán học thậm chí có thể được thay thế bằng quan niệm coi các hạt như các dây - chính là các dây đã cho giải thích tốt nhất về hấp dẫn mà ta đã nói tới ở trên. Theo lý thuyết mới này, các dây có chiều dài chỉ cỡ một phần tỷ tỷ tỷ (10^{-27}) mét (nhỏ tới mức chúng dường như là các điểm) có thể dao động theo những cách khác nhau và mỗi dao động đó làm xuất hiện một hạt[1]. Điều này tương tự với phát hiện của Pythagore thấy rằng một dây đàn có thể tạo ra các nốt khác nhau tùy thuộc vào việc nó dao động như thế nào.

Nhà văn khoa học viễn tưởng và cũng là nhà tương lai học Arthur C. Clarke đã viết rằng nếu một giáo sư xuất chúng nào đó tuyên bố một điều gì đó là chắc chắn đúng thì rất có thể ngày hôm sau nó lại được chứng minh là sai. Chứng minh khoa học là không mấy vững chắc và dễ đổ vỡ. Trái lại, chứng minh toán học là tuyệt đối và nằm ngoài mọi nghi ngờ. Pythagore chết với niềm tin sâu sắc rằng định lý của ông, một định lý đúng vào năm 500 trước Công nguyên, vẫn sẽ còn đúng mãi mãi.

Khoa học vận hành tựa như hệ thống tòa án. Một lý thuyết được coi là đúng nếu nó có đủ bằng chứng chứng tỏ rằng "nó nằm ngoài mọi sự nghi ngờ hợp lý nào". Trái lại, toán học không dựa trên những bằng chứng rút ra từ thực nghiệm vốn dễ mắc sai sót mà dựa trên logic chặt chẽ. Điều này được minh họa bằng bài toán bàn cờ bị cắt góc dưới đây (xem H.3).

Ta có một bàn cờ bị cắt đi hai góc đối diện, khiến cho nó chỉ còn lại 62 ô. Bây giờ ta lấy 31 quân đôminô có kích thước sao cho mỗi quân đặt vừa khít hai ô bàn cờ. Bài toán đặt ra là có thể dùng 31 quân đôminô nói trên phủ kín toàn bộ 62 ô của bàn cờ bị cắt hai góc hay không?

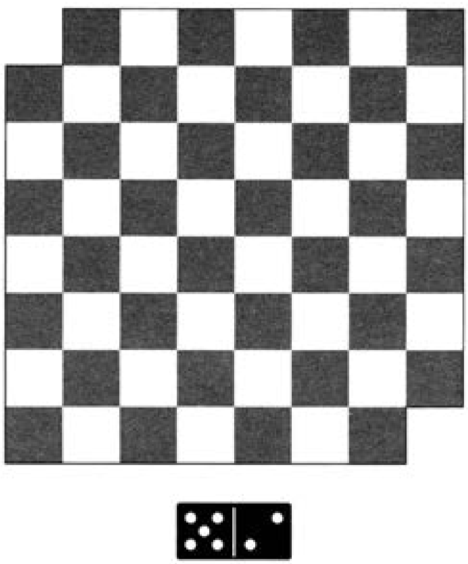
---

[1]. Bạn đọc muốn biết thêm về lý thuyết này có thể xem cuốn *Giai điệu dây và bản giao hưởng Vũ trụ,* một cuốn sách phổ biến rất thành công của nhà vật lý xuất sắc người Mỹ mới 37 tuổi, Brian Greene, bản dịch tiếng Việt của Phạm Văn Thiều do Tạp chí Tia Sáng và Nhà Xuất bản Trẻ ấn hành tháng 3 năm 2003. (ND)

Có hai cách tiếp cận bài toán này.

(1) Cách tiếp cận kiểu khoa học

Nhà khoa học chắc hẳn sẽ thử giải bài toán trên bằng con đường thực nghiệm, và sau khi mày mò khoảng vài ba chục cách xếp, anh ta phát hiện ra rằng không thể xếp được. Cuối cùng, nhà khoa học tin là đã có đủ bằng chứng để nói rằng không thể phủ kín bàn cờ bằng 31 quân đôminô. Tuy nhiên, nhà khoa học không bao giờ có thể đảm bảo chắc chắn rằng điều đó là đúng, bởi vì biết đâu có một cách xếp nào đó mà anh ta chưa thử lại phủ kín được bàn cờ thì sao. Thực tế, có hàng triệu cách sắp xếp mà ta chỉ có thể khảo sát được



Hình 3. Bài toán bàn cờ bị cắt góc

một phần rất nhỏ trong đó mà thôi. Kết luận rằng nhiệm vụ đặt ra không thể thực hiện được là một lý thuyết dựa trên thực nghiệm, và nhà khoa học đành phải sống với nỗi phấp phỏng rằng một ngày nào đó lý thuyết này có thể sẽ bị lật đổ.

(2) Cách tiếp cận toán học

Nhà toán học sẽ thử trả lời câu hỏi đặt ra bằng cách phát triển những lập luận logic để dẫn tới một kết luận đúng đắn không thể bác bỏ và sẽ còn đúng mãi mãi. Một trong những cách lập luận đó như sau:

- Hai góc bị cắt của bàn cờ đều là hai ô trắng. Như vậy còn lại 32 ô đen và chỉ có 30 ô trắng.
- Mỗi quân đôminô phủ kín hai ô cạnh nhau mà các ô cạnh nhau lại luôn luôn có màu khác nhau, một trắng và một đen.
- Như vậy, bất kể cách sắp xếp là như thế nào, 30 quân đôminô đầu tiên được đặt trên bàn cờ sẽ phủ kín 30 ô trắng và 30 ô đen.
- Do đó, dù xếp thế nào thì cuối cùng cũng sẽ còn lại một quân đôminô và hai ô đen.
- Nhưng cần nhớ rằng tất cả các quân đôminô đều phủ kín hai ô cạnh nhau và các ô cạnh nhau đều khác màu. Tuy nhiên, vì hai ô còn lại đều cùng màu, nên chúng không thể được phủ kín chỉ bởi một quân đôminô. Do đó việc phủ kín bàn cờ bị cắt góc bằng các quân đôminô là không thể làm được.

Chứng minh trên cho thấy rằng mọi cách sắp xếp các quân đôminô đều không thể phủ kín bàn cờ bị cắt góc. Tương tự, Pythagore đã xây dựng được một phương pháp chứng minh cho thấy mọi tam giác vuông đều phải tuân theo định lý của ông. Đối với Pythagore, khái niệm chứng minh toán học là điều gì đó rất thiêng liêng và cũng chính phép chứng minh đã cho phép Hội ái hữu của ông phát minh ra rất nhiều điều. Những chứng minh toán học hiện đại cực kỳ phức tạp và theo một logic mà người bình thường không thể hiểu nổi; nhưng may mắn thay, trong trường hợp định lý Pythagore, đó là những suy luận tương đối dễ hiểu và chỉ dựa trên những kiến thức toán học ở trường trung học. Chứng minh này được trình bày ngắn gọn trong Phụ lục I ở cuối sách.

Chứng minh của Pythagore là không thể bác bỏ được. Nó chứng tỏ rằng định lý của ông đúng với mọi tam giác vuông trong Vũ trụ. Phát minh này đã gây xúc động tới mức cả một trăm con bò đã phải hiến sinh để tỏ lòng biết ơn đối với các vị thần. Chứng minh của Pythagore là một cột mốc trong toán học và cũng là một trong những đột phá quan trọng nhất trong lịch sử nền văn minh nhân loại. Tầm quan trọng của nó nằm ở hai khía cạnh. Thứ nhất, nó đã đưa ra được ý tưởng về sự chứng minh toán học. Một kết quả toán học được chứng minh mang tính chân lý sâu sắc hơn bất cứ kết quả nào khác vì nó được rút ra theo logic diễn dịch. Mặc dù nhà triết học Thales cũng đã phát minh ra một số chứng minh hình học thô sơ, nhưng Pythagore mới là người đưa ý tưởng đó đi xa hơn nhiều và chứng minh được những mệnh đề toán học tài tình hơn rất nhiều. Hệ quả thứ hai của định lý Pythagore là ở chỗ nó gắn phương pháp toán học trừu tượng với một cái gì đó cụ thể hơn. Nghĩa là Pythagore đã cho thấy rằng chân lý toán học có thể áp dụng cho thế giới khoa học và cung cấp cho nó một nền tảng logic. Toán học cho khoa học một sự khởi đầu chặt chẽ và trên cái nền tảng vững chắc đó, các nhà khoa học thêm vào các phép đo và những quan sát không hoàn toàn chính xác.

Vô số các bộ ba

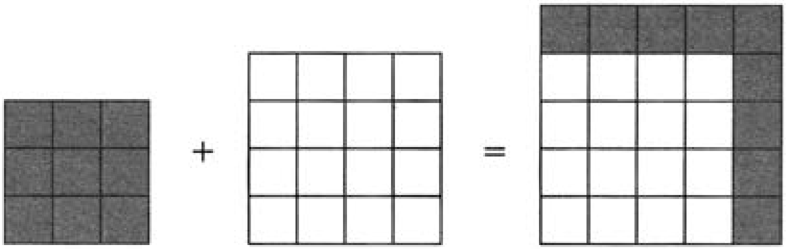
Với sự sốt sắng tìm kiếm chân lý thông qua chứng minh, Hội ái hữu của Pythagore đã thổi vào toán học một sức sống mới. Tin tức về những thành công của họ lan đi rất xa nhưng những chi tiết về các phát minh của họ thì vẫn còn là những bí mật được giữ kín. Nhiều người xin được nhận vào thánh đường tri thức đó, nhưng chỉ những bộ óc xuất sắc nhất mới được chấp nhận. Một trong số những người nhận được phiếu chống nhiều nhất có tên là Cyclon. Coi việc không được chấp nhận là một sự sỉ nhục lớn, hai mươi năm sau Cyclon đã quyết định trả thù.

Trong thời gian thi đấu Olympic lần thứ sáu mươi bảy (năm 510 trước Công nguyên) đã xảy ra một cuộc nổi loạn ở thành phố Sybaris bên cạnh. Telys - người lãnh đạo thành công vụ nổi loạn - đã bắt đầu một chiến dịch đàn áp man rợ những người đã từng ủng hộ chính phủ trước đó. Điều này khiến cho nhiều người tìm tới thánh đường tri thức ở Croton. Telys yêu cầu tất cả những kẻ phản bội phải quay trở về Sybaris để chịu hình phạt, nhưng Milo và Pythagore đã thuyết phục các công dân Croton đứng dậy chống tên bạo chúa và bảo vệ những người di tản. Telys nổi giận và ngay lập tức tập hợp một đội quân gồm 300.000 người hành tiến tới Croton, nơi mà Milo tổ chức phòng thủ thành phố với 100.000 công dân có vũ trang. Sau bảy mươi ngày chiến đấu ác liệt dưới sự lãnh đạo tối cao của Milo, những người phòng thủ đã chiến thắng và để trả thù, họ đã nắn lại dòng chảy của sông Crathis làm cho thành phố Sybaris bị ngập lụt và tàn phá.

Mặc dù chiến tranh đã kết thúc, nhưng thành phố Croton vẫn còn nhốn nháo về việc phân chia chiến lợi phẩm. Sợ rằng đất đai sẽ về tay nhóm những người ưu tú của Pythagore, dân chúng ở Croton bắt đầu tỏ ra bất bình. Họ ngày càng mất cảm tình với Hội ái hữu vì Hội vẫn giữ kín những phát minh của mình, nhưng thực tế vẫn chưa có chuyện gì nghiêm trọng xảy ra cho tới khi Cyclon công khai đứng ra như tiếng nói đại diện của dân chúng. Cyclon đã kích thích nỗi sợ hãi, chứng hoang tưởng, lòng ghen tỵ của đám đông và lôi kéo họ tới phá tan ngôi trường toán học xuất sắc nhất mà loài người đã từng thấy. Ngôi nhà của Milo và ngôi trường kế bên bị bao vây, tất cả các cửa ra vào bị khóa và chèn chặt để không cho ai chạy thoát ra ngoài, rồi sau đó họ châm lửa đốt. Milo tìm đủ mọi cách thoát ra được khỏi ngọn lửa địa ngục này, nhưng Pythagore cùng với nhiều môn đệ của ông đã bị thiêu chết trong đó.

Toán học thế là đã mất đi người anh hùng vĩ đại đầu tiên của mình, nhưng tinh thần của Pythagore thì còn sống mãi. Những con số và các chân lý về chúng sẽ là bất tử. Pythagore đã chứng minh được rằng, hơn bất cứ một bộ môn nào khác, toán học hoàn toàn không mang dấu ấn chủ quan. Các học trò của Pythagore không cần phải có thầy của mình cũng có thể quyết định được một lý thuyết cụ thể nào đó là đúng hay sai. Sự đúng đắn của một lý thuyết không phụ thuộc vào quan điểm nào. Thay vì thế, việc xây dựng logic toán học đã trở thành người trọng tài quyết định chân lý. Đây là đóng góp to lớn nhất của Pythagore cho văn minh nhân loại - nó cho ta con đường đạt tới chân lý nằm ngoài lý trí hay sai sót của con người.

Sau cuộc tấn công của Cyclon và cái chết của người thầy, Hội ái hữu rời Croton tới nhiều thành phố khác của Hy Lạp, nhưng sự truy nã vẫn tiếp tục khiến cho nhiều người trong số họ phải sinh



$3^2 \quad + \quad 4^2 \quad = \quad 5^2,$

$9 \quad + \quad 16 \quad = \quad 25$

Hình 4. Việc tìm các nghiệm nguyên của phương trình Pythagore có thể thay bằng việc tìm hai hình vuông cộng lại tạo nên hình vuông thứ ba. Ví dụ, hình vuông gồm 9 ô có thể cộng với hình vuông 16 ô tạo thành hình vuông 25 ô.

sống ở nước ngoài. Sự di trú bắt buộc này đã khuyến khích các học trò của Pythagore truyền bá rộng rãi những bí mật toán học thiêng liêng của họ ra khắp thế giới cổ đại. Họ lập ra các trường học mới và dạy cho học sinh của họ phương pháp chứng minh logic. Ngoài chứng minh định lý Pythagore, họ còn giải thích cho mọi người rõ bí mật của việc tìm ra bộ ba số Pythagore.

Bộ ba số Pythagore là tổ hợp của ba số nguyên thỏa mãn phương trình Pythagore: $x^2 + y^2 = z^2$. Ví dụ, phương trình Pythagore được nghiệm đúng nếu lấy $x = 3$, $y = 4$ và $z = 5$:

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 9 + 16 = 25$$

Một cách khác để tìm bộ ba số Pythagore là tìm tòi thông qua việc sắp xếp lại các hình vuông. Nếu ta có một hình vuông 3×3, gồm 9 ô và một hình vuông 4×4 gồm 16 ô, thì sau đó tất cả các ô có thể được sắp xếp lại để tạo thành một hình vuông 5×5 gồm 25 ô, như được minh họa trên Hình 4.

Các học trò của Pythagore muốn tìm những bộ ba số Pythagore khác, những hình vuông khác mà khi cộng lại tạo nên hình vuông thứ ba, lớn hơn. Ví dụ như bộ ba: x = 5, y = 12 và z =13:

$$5^2 + 12^2 = 13^2, \quad 25 + 144 = 169$$

Một bộ ba số Pythagore lớn hơn nữa là x = 99, y = 4.900 và z = 4.901.

Khi các số lớn dần lên, các bộ ba số Pythagore trở nên hiếm hoi hơn, và do đó việc tìm chúng càng trở nên khó khăn hơn. Để tìm ra ra nhiều bộ ba số Pythagore nhất có thể được, những người trong Hội của Pythagore đã phát minh ra một cách rất có hệ thống để tìm kiếm chúng và khi làm như thế họ đã chứng minh được rằng có một số vô hạn các bộ ba số Pythagore.

Từ định lý Pythagore đến Định lý Cuối cùng của Fermat

Định lý Pythagore và vô số các bộ ba số của nó đã được thảo luận trong cuốn *Bài toán cuối cùng* của tác giả E.T. Bell, cuốn sách trong thư viện thành phố đã thu hút sự chú ý của Andrew Wiles. Mặc dù Hội ái hữu đã đạt được sự hiểu biết gần như đầy đủ về các bộ ba số Pythagore, nhưng Wiles đã nhanh chóng phát hiện ra rằng phương trình $x^2 + y^2 = z^2$ bề ngoài *trong trắng* như thế nhưng cũng có mặt tối của nó. Và thực tế quyển sách của Bell đã mô tả sự tồn tại của một con quỷ toán học.

Trong phương trình của Pythagore, ba con số x, y và z đều được bình phương:

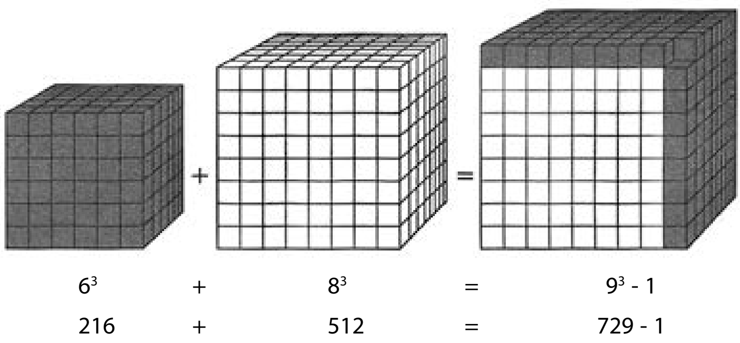
$$x^2 + y^2 = z^2$$

Tuy nhiên, quyển sách cũng đề cập tới một phương trình chị em với nó, trong đó các số x, y và z đều được lập phương, nghĩa là lũy thừa của các số đó không phải là bậc 2 nữa mà là bậc 3:

$$x^3 + y^3 = z^3$$

Tìm các nghiệm là số nguyên, tức là các bộ ba số Pythagore, của phương trình ban đầu tương đối dễ dàng, nhưng khi thay lũy thừa từ "2" lên "3" (tức là từ bình phương sang lập phương) thì việc tìm nghiệm trở nên không thể làm được. Nhiều thế hệ các nhà toán học đã từng nháp mòn bút mà không tìm được bộ số nguyên nào thỏa mãn phương trình đó.

Với phương trình "bình phương" gốc, sự thách thức là ở chỗ sắp xếp lại các ô trong hai hình vuông để tạo thành hình vuông thứ ba, lớn hơn. Trong trường hợp "lập phương", đó là sự sắp xếp



Hình 5. Liệu có thể cộng những khối vuông nhỏ từ một hình lập phương này vào một hình lập phương khác để tạo thành hình lập phương thứ ba không? Trong trường hợp hình trên, khối lập phương 6×6×6 cộng với khối lập phương 8×8×8 chưa đủ các khối vuông nhỏ để tạo thành khối lập phương 9×9×9. Cụ thể là có 216 (6^3) khối vuông nhỏ trong hình lập phương thứ nhất và 512 (8^3) khối vuông nhỏ trong hình lập phương thứ hai. Như vậy, có tổng cộng 728 khối vuông nhỏ, còn thiếu 1 khối nữa mới đủ 9^3.

lại các khối vuông nhỏ trong hai hình lập phương để tạo thành một hình lập phương thứ ba, lớn hơn. Người ta thấy dường như cho dù ta có chọn hai khối lập phương ban đầu thế nào đi nữa thì khi tổ hợp lại sẽ nhận được một khối lập phương với một số khối vuông nhỏ còn dư ra hoặc là nhận được một khối lập phương khuyết. Trường hợp gần với nghiệm nhất là khi khối lập phương thứ ba nhận được còn dư hoặc khuyết một khối vuông nhỏ. Ví dụ nếu chúng ta bắt đầu với các khối lập phương 6^3 (x^3) và 8^3 (y^3) rồi sắp xếp lại các khối vuông nhỏ, chúng ta sẽ nhận được một hình chỉ thiếu một khối vuông nhỏ nữa là thành khối lập phương $9 \times 9 \times 9$ hoàn chỉnh.

Việc tìm bộ ba số thỏa mãn phương trình lập phương dường như là không thể làm được. Hay có thể nói, phương trình:

$$x^3 + y^3 = z^3$$

dường như không có các nghiệm là những số nguyên.

Hơn thế nữa, nếu ta thay lũy thừa từ 3 (lập phương) lên một số n bất kỳ cao hơn (chẳng hạn như 4, 5, 6, ...) thì việc tìm nghiệm cũng vẫn dường như là không thể. Nghĩa là dường như phương trình:

$x^n + y^n = z^n$ với n là số nguyên lớn hơn 2

$$(n \in Z, n \geq 2)$$

không có nghiệm là các số nguyên. Như vậy bằng cách đơn giản thay số 2 trong phương trình Pythagore bằng một số nguyên bất kỳ lớn hơn, việc tìm các nghiệm nguyên từ tương đối dễ dàng trở thành một bài toán vô cùng hóc búa. Thực tế, nhà toán học vĩ đại người Pháp, Pierre de Fermat ngay ở thế kỷ XVII đã đưa ra một tuyên bố gây sững sờ nói rằng *sở dĩ không ai tìm được các nghiệm đó là bởi vì chúng không hề tồn tại*.

Fermat là một trong số những nhà toán học xuất sắc nhất và cũng nhiều bí ẩn nhất trong lịch sử. Tất nhiên, ông không thể kiểm tra hết một số vô hạn các con số, nhưng ông tuyệt đối tin chắc rằng không tồn tại một bộ ba số nguyên nào thỏa mãn phương trình trên, bởi vì lời tuyên bố của ông dựa trên một chứng minh chặt chẽ. Cũng giống như Pythagore, người không cần phải kiểm tra hết mọi tam giác vuông mới chứng tỏ được định lý của mình là đúng đắn, Fermat cũng không cần phải kiểm tra mọi con số mới chứng minh được sự đúng đắn của định lý mà ngày nay người ta gọi là Định lý cuối cùng của Fermat. Như đã biết, định lý này được phát biểu như sau:

Phương trình $x^n + y^n = z^n$, với n là số nguyên lớn hơn 2,
không có nghiệm là các số nguyên

Khi đọc ngốn ngấu hết chương này đến chương khác trong cuốn sách của Bell, Wiles hiểu được rằng Fermat đã đam mê những công trình của Pythagore đến mức nào và cuối cùng ông đã bắt tay nghiên cứu dạng hóc búa của phương trình Pythagore ra sao. Sau đó Wiles đọc tới đoạn Fermat tuyên bố rằng ngay cả khi tất cả các nhà toán học trên khắp thế giới có bỏ công suốt đời tìm kiếm nghiệm của phương trình đó thì họ cũng không bao giờ tìm thấy. Chắc hẳn đến đây Wiles đã rất nôn nóng lật giở các trang sách với hy vọng nhanh chóng được xem cách chứng minh định lý cuối cùng của Fermat. Nhưng trong sách không hề có chứng minh đó. Và nó cũng chẳng có ở đâu hết. Bell kết thúc cuốn sách với thông báo rằng chứng minh đã bị thất lạc từ rất lâu. Không có một gợi ý là chứng minh đó phải như thế nào, cũng như không có đầu mối nào về cách xây dựng hay cách rút ra chứng minh đó. Wiles cảm thấy bứt rứt, bực bội và càng trở nên hiếu kỳ hơn, nhưng không chỉ mình cậu mới cảm thấy như thế.

Trong suốt hơn ba trăm năm sau, nhiều nhà toán học vĩ đại đã thử phát minh lại chứng minh đã mất của Fermat, nhưng họ đều đã thất bại. Khi mỗi một thế hệ bị thất bại, thế hệ sau lại càng không thỏa mãn và trở nên quyết tâm hơn. Năm 1742, gần một thế kỷ sau khi Fermat qua đời, nhà toán học Thụy Sĩ, Leonhard Euler đã đề nghị bạn mình là Clêrot tới tìm kiếm trong ngôi nhà của Fermat xem may ra có còn lưu giữ được chút giấy tờ quan trọng gì không. Nhưng Clêrot đã không tìm thấy dấu vết gì có liên quan tới chứng minh của Fermat cả. Trong Chương 2, chúng ta sẽ nói kỹ hơn về nhà toán học đầy bí ẩn này và về chuyện định lý của ông đã bị thất lạc như thế nào, còn lúc này chúng ta chỉ cần biết rằng định lý cuối cùng của Fermat, một bài toán đã từng hấp dẫn các nhà toán học trong nhiều thế kỷ, thì giờ đây cũng đã hút mất hồn cậu bé Andrew Wiles.

Ngồi trong thư viện phố Milton là cậu bé mới 10 tuổi đầu như bị thôi miên bởi bài toán nổi tiếng nhất của toán học. Thường thì một nửa khó khăn của một bài toán là hiểu được vấn đề của nó, nhưng trong trường hợp này bài toán thật dễ hiểu: Andrew không hề nản lòng khi biết rằng những bộ óc xuất sắc nhất hành tinh đã không phát minh lại được chứng minh đó. Cậu liền bắt tay vận dụng tất cả những kỹ thuật đã biết trong sách giáo khoa, thử sáng tạo lại chứng minh đã mất. Biết đâu cậu sẽ tìm lại được một điều gì đó mà mọi người, trừ Fermat, đã không nhận ra cũng nên. Cậu mơ ước sẽ làm cho cả thế giới phải kinh ngạc.

Ngày 23 tháng 6 năm 1993, Wiles đã đọc báo cáo tại Viện Isaac Newton. Bức ảnh này chụp ngay sau thời điểm Wiles công bố chứng minh Định lý Fermat của ông. Cùng với mọi người trong hội trường, ông không hề có một ý niệm gì về cơn ác mộng đang ở phía trước.

Ba mươi năm sau, giờ đây Andrew Wiles đã sẵn sàng. Đứng trong giảng đường của Viện Isaac Newon, ông đã viết kín mít mấy chiếc bảng, rồi sau đó, cố kìm nén sự hân hoan của mình, ông chăm chú nhìn xuống cử tọa. Bài giảng đã đạt đến đỉnh điểm của nó và cả hội trường cũng đều biết như vậy. Có mấy người tới dự đã bí mật mang theo máy ảnh vào hội trường và giờ đây đèn flash bật lia lịa chụp những dòng kết luận của Wiles.

Với mẩu phấn trong tay, Wiles quay lại phía bảng lần cuối. Một ít dòng suy luận cuối cùng hoàn tất chứng minh. Thế là lần đầu tiên trong suốt hơn ba trăm năm, thách thức của Fermat đã được đáp lại. Mấy chiếc máy ảnh nữa lại chớp đèn ghi lại khoảnh khắc lịch sử này. Wiles viết lại phát biểu định lý cuối cùng của Fermat rồi quay xuống phía cử tọa nói một cách khiêm tốn: "Có lẽ tôi xin phép được dừng ở đây".

Hai trăm nhà toán học vỗ tay và hoan hô chúc mừng. Ngay cả những người đã đoán trước được kết quả cũng cười sung sướng vì không thể tin nổi. Sau ba mươi năm, giờ đây Andrew Wiles tin tưởng rằng ông đã thực hiện được ước mơ thời thơ ấu và sau bảy năm làm việc đơn độc, ông đã có thể công bố những tính toán của mình. Tuy nhiên, trong khi niềm hân hoan đang tràn ngập Viện Newton, thì tấn bi kịch đang chuẩn bị giáng xuống. Và ở thời điểm khi Wiles đang hưởng niềm sung sướng tột đỉnh, thì ông, cùng với mọi người trong phòng lúc đó không thể ngờ rằng nỗi kinh hoàng sắp sửa ập tới.

Pierre de Fermat

II.
TÁC GIẢ CỦA NHỮNG CÂU ĐỐ

> "Ngươi có biết" - Con Quỷ tâm sự - "ngay cả những nhà toán học giỏi nhất trên các hành tinh khác, họ còn uyên bác hơn những nhà toán học của các ngươi nhiều, cũng không giải nổi câu đố đó không? Thì đấy, một gã trên sao Thổ nhìn giống như một cây nấm trên cây cà kheo, gã có thể giải nhẩm các phương trình vi phân đạo hàm riêng, mà cũng phải đầu hàng đó thôi".
>
> ARTHUR POGES, *CON QUỶ VÀ SIMON FLAGG*

Pierre Fermat sinh ngày 20 tháng 8 năm 1601 ở Beaumont-de-Lomagne thuộc vùng Tây Nam nước Pháp. Cụ thân sinh Fermat, ông Dominique Fermat, là một thương nhân buôn bán da giàu có, đủ khả năng cho Fermat được hưởng một nền giáo dục ưu đãi tại tu viện dòng Francisco ở Grandselve, rồi sau đó chuyển qua học tại trường Đại học Tổng hợp Toulouse. Không một chứng tích nào cho thấy chàng Fermat trẻ tuổi này có biểu hiện đặc biệt đối với toán học.

Áp lực của gia đình hướng ông vào làm việc ở các cơ quan hành chính và vào năm 1631, ông đã được bổ nhiệm vào Pháp viện Toulouse, tại đây ông đã trở thành luật sư của Phòng Thỉnh cầu. Nếu người dân địa phương muốn thỉnh cầu điều gì đó với Đức Vua thì trước hết họ phải thuyết phục được Fermat hoặc một cộng sự của ông về tầm quan trọng của lời thỉnh cầu đó. Các luật sư ở Phòng này thực hiện mối liên lạc giữa tỉnh và Paris. Họ cũng là người đảm bảo cho các đạo luật được ban hành ở thủ đô được thực hiện ở các địa phương. Fermat là một viên chức làm việc rất có hiệu quả, ông đã hết lòng thực hiện phận sự của mình một cách chu đáo và đầy cảm thông.

Ngoài ra, Fermat còn có nhiệm vụ ở cơ quan tòa án và với kinh nghiệm lâu năm ông thường phải xử lý những vụ gai góc nhất. Nhà toán học người Anh, Sir Kenelm Digby có cho chúng ta biết phần nào về công việc của Fermat. Degby có đề nghị được gặp Fermat, nhưng trong một bức thư gửi một đồng nghiệp chung của hai người là John Wallis, Degby đã tiết lộ rằng ông bạn người Pháp này quá bận bịu với những công việc gấp rút ở tòa án nên không thể nào gặp được:

Quả thật tôi lại chọn đúng vào ngày thuyên chuyển các thẩm phán từ Castres đến Toulouse, nơi mà ông ta (Fermat) làm chánh án tòa án tối cao của Pháp viện; từ khi đó ông ta bận bịu suốt ngày với các vụ trọng án và kết thúc ông ta đã tuyên một án gây rất nhiều ầm ĩ. Đó là bản án kết tội một mục sư lạm dụng quyền lực phải bị thiêu trên giàn lửa. Vụ này cũng vừa mới kết thúc và việc hành quyết đã được thực hiện ngay sau đó.

Fermat trao đổi thư từ khá đều đặn với Degby và Wallis. Dưới đây chúng ta sẽ thấy rằng những bức thư thường không phải là thân thiết lắm, nhưng chúng cho chúng ta một ý niệm về cuộc sống hàng ngày của Fermat, kể cả công việc khoa học của ông.

Fermat thăng tiến rất nhanh trên con đường công danh và đã trở thành một thành viên của giới thượng lưu với chữ *de* gắn liền tên. Sự thăng quan tiến chức này không phải là do tham vọng của ông mà có lẽ là do vấn đề sức khỏe. Hồi đó có một nạn dịch hoành hành khắp châu Âu và những người sống sót đều được thăng chức để thay thế cho những người bị chết. Ngay cả Fermat cũng bị dính trận dịch năm 1652 và bị nặng tới mức Bernard Medon, bạn ông, đã thông báo với một số đồng nghiệp của ông rằng ông đã chết. Ngay sau đó, Medon đã phải cải chính trong bức thư gửi cho một người Hà Lan tên là Nicholas Heinsius:

Trước kia tôi đã báo cho ông về cái chết của Fermat. Nhưng hiện thời ông ta vẫn sống và chúng ta không phải lo gì cho sức khỏe của ông ta nữa, thậm chí mặc dù mới đây thôi chúng tôi đã liệt ông ta vào số những người đã chết. Cơn dịch không còn cướp ai đi trong số chúng tôi nữa.

Ngoài những nguy cơ về sức khỏe ở nước Pháp thế kỷ XVII, Fermat cũng còn phải vượt qua trước những nguy hiểm về chính trị. Sự bổ nhiệm ông vào Pháp viện Toulouse xảy ra chỉ ba năm sau khi Hồng y giáo chủ Richelieu được thăng chức thủ tướng của nước Pháp. Đây là thời kỳ của những âm mưu và thủ đoạn. Bất kỳ ai tham gia vào việc điều hành nhà nước, ngay cả ở các cấp chính quyền địa phương cũng đều hết sức thận trọng để không bị cuốn vào những mưu mô của Richelieu. Fermat chấp nhận một chiến lược làm tốt phận sự nhưng không để ai chú ý tới mình. Ông không có những tham vọng chính trị lớn và ông cố gắng hết sức để tránh những chuyện lôi thôi và xáo trộn ở Pháp viện. Ông dành toàn bộ phần năng lượng còn dư thừa của mình cho toán học và khi không phải kết án các linh mục bị thiêu trên giàn lửa, Fermat dành toàn bộ thời gian cho sở thích đó của mình. Fermat là một học giả nghiệp dư đích thực. Ông cũng là người mà E.T. Bell gọi là "ông Hoàng của những người nghiệp dư". Tuy nhiên, do tài năng của ông quá ư vĩ đại, nên khi Julian Coolidge viết cuốn *Toán học của những người nghiệp dư vĩ đại*, ông ta đã loại Fermat ra ngoài, với lý do Fermat "thực sự vĩ đại, nên phải xem ông là một người chuyên nghiệp".

Vào đầu thế kỷ XVII, toán học vừa mới phục hồi sau những đêm trường Trung cổ, và vẫn còn chưa được coi trọng. Các nhà toán học cũng không hơn gì: đa số họ đều phải tự tổ chức lấy việc nghiên cứu của mình. Ví dụ, Galileo không thể nghiên cứu toán học tại Đại học Pisa và buộc phải tìm kiếm công việc dạy tư. Thực tế, hồi đó ở châu Âu chỉ có một nơi khuyến khích các nhà toán học là Đại học Oxford và chính trường đại học này đã lập một chức giáo sư về hình học vào năm 1619. Của đáng tội, sẽ là không sai nếu nói rằng phần lớn các nhà toán học thế kỷ XVII đều là nghiệp dư, nhưng Fermat là một trường hợp rất đặc biệt. Sống ở xa Paris, ông hoàn toàn cách biệt với cộng đồng các nhà toán học đã tồn tại trước đó, bao gồm các tên tuổi như Pascal, Gassendi, Roberval, Beaugrand và đáng kể nhất là Cha Marin Mersenne.

Cha Mersenne chỉ có đóng góp nhỏ cho lý thuyết số, nhưng vai trò của ông trong toán học thế kỷ XVII là quan trọng hơn rất nhiều bất kỳ một đồng nghiệp được đánh giá cao nào của ông. Sau khi gia nhập dòng thánh Minim vào năm 1611, Mersenne đã nghiên cứu toán học và dạy lại môn học này cho các tu sĩ khác tại tu viện Minim ở Nevers. Tám năm sau ông chuyển tới Paris nhập vào dòng Minim de l' Annociade ở gần Place Royal, một nơi tập trung giới trí thức của thời đó. Tất nhiên, Mersenne không tránh khỏi gặp gỡ các nhà toán học ở Paris, nhưng ông rất buồn vì họ từ chối không nói chuyện với ông và nói chuyện với nhau.

Bản chất ưa bí mật của các nhà toán học Paris đã có truyền thống từ thời những người cossit ở thế kỷ XVI. Cossit là những chuyên gia tính toán đủ các loại, họ được các thương nhân và các nhà doanh nghiệp thuê để giải quyết những vấn đề kế toán phức tạp. Cái tên cossit bắt nguồn từ chữ cosa, tiếng Italia có nghĩa là "vật", bởi vì họ dùng các ký hiệu để biểu diễn một đại lượng chưa biết, tương tự như cách các nhà toán học dùng chữ x hiện nay. Tất cả những ông thợ giải toán chuyên nghiệp đó đã phát minh ra những phương pháp thông minh riêng của mình để tính toán và họ làm mọi cách để giữ bí mật những phương pháp ấy và duy trì tiếng tăm của mình như một người độc nhất vô nhị giải được một bài toán đặc biệt nào đó. Một trường hợp ngoại lệ là Niccolo Tartaglia, người đã tìm ra phương pháp giải nhanh phương trình bậc ba. Ông này đã tiết lộ phát minh của mình cho Girolamo Cardano và bắt ông kia phải thề là tuyệt đối giữ kín bí mật đó. Mười năm sau, Cardano thất hứa, đã công bố phương pháp của Tartaglia trong cuốn *Ars Magna* của mình, một hành động mà Tartaglia không bao giờ tha thứ. Ông đã cắt đứt mọi quan hệ với Cardano và sau đó một cuộc tranh cãi công khai gay gắt đã xảy ra, càng làm cho các nhà toán học giữ kín các bí mật của họ. Bản tính ưa giữ bí mật của các nhà toán học cứ tiếp tục như thế cho tới tận cuối thế kỷ XIX, và như chúng ta sẽ thấy ngay cả ở thế kỷ XX mà vẫn có những thiên tài làm việc trong bí mật.

Khi linh mục Mersenne tới Paris, ông quyết định sẽ chiến đấu chống lại cái bản tính thích giữ bí mật và cố gắng khuyến khích các nhà toán học trao đổi những ý tưởng của họ với nhau và sử dụng các công trình của nhau. Ông đã tổ chức các cuộc gặp gỡ thường kỳ và nhóm của ông sau này chính là nòng cốt của Viện Hàn lâm Pháp.

Khi có ai đó từ chối tham dự, Mersenne bèn chuyển cho nhóm tất cả tài liệu và thư từ của người vắng mặt mà ông có trong tay, thậm chí nếu chúng được gửi chỉ riêng cho ông thôi. Đó là một hành động không mấy đạo đức đối với một người mặc áo thầy tu, nhưng ông biện hộ rằng đó là vì lợi ích của toán học và của loài người. Những hành động tiết lộ bí mật như thế tất nhiên đã gây ra những cuộc cãi cọ gay gắt giữa viên linh mục và những tài năng ưa im lặng mà ông đã phản bội, và cuối cùng đã dẫn tới sự cắt đứt quan hệ giữa ông và Descartes, một mối quan hệ kéo dài từ khi hai người cùng học trường Jesuit College ở La Flèche. Mersenne đã tiết lộ những bản thảo triết học của Descartes mang nội dung chống lại Nhà thờ, mà Descartes đã tin cẩn giao cho ông, người đã bảo vệ Descartes trước những cuộc tấn công của các nhà thần học, hệt như trước kia ông đã từng làm đối với Galileo. Trong một thời đại bị tôn giáo và ma thuật thống trị, Mersenne đã dám đứng lên bảo vệ tư tưởng duy lý.

Những cuộc chu du khắp nước Pháp và xa hơn nữa đã giúp cho Mersenne phổ biến rộng rãi những tin tức về các phát minh mới nhất. Trong những chuyến đi như thế ông thường hẹn gặp Fermat và thực tế, có lẽ đó cũng là đầu mối tiếp xúc duy nhất của Fermat với các nhà toán học khác. Ảnh hưởng của Mersenne đối với ông Hoàng Nghiệp dư chắc chỉ đứng sau cuốn *Arithmetica (Số học)*, một chuyên luận toán học được truyền tay từ thời cổ Hy Lạp và là người bạn thường xuyên bên mình của Fermat. Ngay cả khi không thể đi chu du thiên hạ được nữa, Mersenne cũng vẫn giữ quan hệ thư từ rất thường xuyên với Fermat và những người khác. Sau khi ông qua đời, người ta lục thấy trong phòng ông rất nhiều thư từ của bảy mươi tám người khác nhau.

Mặc dù có sự khuyến khích của linh mục Mersenne, nhưng Fermat vẫn nhất định không chịu tiết lộ những chứng minh của mình. Sự công bố và thừa nhận chẳng có ý nghĩa gì đối với ông và ông thỏa mãn với niềm vui đơn giản là đã tạo ra được những định lý mới mà không bị ai làm phiền. Tuy nhiên, vị thiên tài ẩn dật này lại khá tinh quái, nhất là khi điều này lại kết hợp với tính ưa bí mật của ông. Vì vậy đôi khi ông liên lạc với các nhà toán học khác chỉ cốt để trêu chọc họ mà thôi. Ông viết cho họ những bức thư phát biểu định lý mới nhất của mình, nhưng không gửi kèm theo chứng minh. Rồi ông thách thức họ tìm ra chứng minh đó. Việc ông không bao giờ tiết lộ những chứng minh của mình đã làm cho nhiều người rất bực mình. René Descartes đã gọi Fermat là "thằng cha khoác lác", còn John Wallis thì gọi ông là "gã người Pháp chết tiệt". Thật không may đối với Wallis là Fermat đặc biệt khoái chí mỗi khi trêu chọc người anh em họ của mình ở bên kia eo biển Manche.

Ngoài sự thỏa mãn khi được trêu tức các đồng nghiệp, thói quen thông báo các bài toán nhưng lại giấu đi lời giải còn có những nguyên nhân thực tiễn hơn. Trước hết, điều đó có nghĩa là không phải mất thời giờ để mô tả chi tiết các phương pháp của mình; thay vì thế, ông có thể nhanh chóng chuyển sang công cuộc chinh phục tiếp theo. Sau nữa, ông sẽ không phải chịu những lời bình luận đầy tính máy móc. Một khi đã được công bố, những chứng minh sẽ được săm soi, và bất cứ ai biết đôi chút về vấn đề đó cũng có thể lý sự được. Khi Blaise Pascal ép ông công bố một số công trình, nhà ẩn dật đáp: "Bất cứ công trình nào của tôi cũng xứng đáng được công bố, nhưng tôi không muốn tên tôi xuất hiện ở đó". Fermat là một thiên tài ưa bí mật, ông sẵn sàng hy sinh danh tiếng của mình miễn là không bị quấy rầy bởi những câu hỏi vụn vặt của những người phê bình.

Những cuộc trao đổi thư từ với Pascal, một cơ hội duy nhất để Fermat thảo luận những ý tưởng của mình với một ai đó khác, ngoài Mersenne, có liên quan tới sự sáng tạo ra cả một lĩnh vực mới của toán học - đó là lý thuyết xác suất. Thực ra đề tài này là do Pascal giới thiệu với nhà ẩn sĩ toán học, nên mặc dù muốn biệt lập, Fermat cũng cảm thấy có nghĩa vụ phải duy trì đối thoại. Fermat cùng với Pascal đã phát minh ra những chứng minh đầu tiên và những điều tuyệt đối chắc chắn trong lý thuyết xác suất, một lĩnh vực vốn dĩ đã là bất định. Mối quan tâm của Pascal đối với đề tài này được một tay đánh bạc chuyên nghiệp tên là Antoine Gombaud, Hiệp sĩ Méré, ở Paris khơi gợi. Anh ta đặt ra bài toán có liên quan với một trò chơi may rủi có tên là tính điểm. Như tên của nó đã cho thấy, trò chơi này đơn giản chỉ là tính điểm khi gieo con xúc sắc, người đầu tiên đạt tới một số điểm nhất định sẽ là người thắng cuộc.

Một lần, Gombaud đang chơi trò tính điểm với một con bạc khác thì cả hai buộc phải bỏ dở giữa chừng do có việc cấp bách phải làm. Vấn đề đặt ra là phải làm thế nào với số tiền đặt? Giải pháp đơn giản là đưa toàn bộ số tiền đó cho người đang có số điểm cao hơn, nhưng Gombaud đề nghị Pascal thử xem có cách nào chia tiền "đẹp" hơn không. Và Pascal được đề nghị hãy tính xác suất thắng của mỗi người nếu như trò chơi vẫn được tiếp tục cho tới khi kết thúc với giả thiết rằng cơ may kiếm các điểm tiếp sau của hai người chơi là như nhau. Số tiền đặt khi đó sẽ được chia theo xác suất tính được.

Trước thế kỷ VII, các định luật xác suất được xác định bằng trực giác và kinh nghiệm của những tay cờ bạc, nhưng Pascal tham gia việc trao đổi thư từ với Fermat với mục đích phát minh ra những quy tắc toán học mô tả chính xác hơn những quy luật của may rủi. Ba thế kỷ sau, Bertrand Russel đã bình luận về cái vẻ nghịch lý bề ngoài đó: "Làm sao chúng ta dám nói về những định luật của may rủi? Lẽ nào may rủi không phải là những phản đề của tất cả các quy luật?"

Hai người Pháp đã phân tích bài toán mà Gombaud đặt ra cho họ và chẳng bao lâu sau họ đã nhận thấy rằng đây chỉ là một bài toán tương đối tầm thường, có thể giải được dễ dàng bằng cách xác định một cách chặt chẽ tất cả những kết cục tiềm tàng của trò chơi và gán cho mỗi kết cục đó một xác suất riêng biệt. Cả Pascal lẫn Fermat đều có khả năng giải bài toán của Gombaud một cách độc lập nhau, nhưng sự cộng tác của họ đã đẩy nhanh tiến độ tìm ra lời giải và dẫn họ tiến tới khám phá sâu hơn những vấn đề khác tinh tế hơn, phức tạp hơn có liên quan với xác suất.

Các bài toán xác suất đôi khi gây ra những cuộc tranh cãi bởi vì những đáp số toán học, mà là những đáp số đúng, lại thường trái với những gì mà trực giác mách bảo. Sự thất bại của trực giác này hẳn cũng đáng ngạc nhiên bởi lẽ "sự sống sót của sinh vật thích nghi nhất" phải tạo được một áp lực tiến hóa mạnh có lợi cho bộ não, khiến nó tự nhiên phải có khả năng phân tích được các bài toán về xác suất. Bạn hãy hình dung tổ tiên chúng ta khi lén theo sát một con nai tơ và phải cân nhắc có nên tấn công nó hay không?

Liệu sẽ có nguy cơ nào xảy ra nếu như con nai đực ở gần đó tấn công những người đi săn để bảo vệ đứa con của mình? Trái lại, nếu trường hợp này được đánh giá là quá ư mạo hiểm, thì liệu cơ may có được một cơ hội kiếm ăn tốt hơn là bao nhiêu? Khả năng phân tích xác suất chắc hẳn phải là một phần trong cấu thành di truyền của chúng ta, nhưng trực giác lại thường dẫn dắt chúng ta đi lạc đường.

Một trong những bài toán xác suất trái với trực giác nhất có liên quan tới khả năng trùng ngày sinh. Hãy hình dung trên sân bóng đá có 23 người, 22 cầu thủ và một trọng tài. Với 23 người và 365 ngày trong năm, dường như rất ít có khả năng để ai đó có ngày sinh trùng nhau. Nếu được hỏi hãy thử cho một con số đánh giá thì phần lớn chắc sẽ đoán một xác suất cỡ 10%. Thực tế câu trả lời đúng là hơn 50% một chút, nghĩa là cơ may tìm thấy hai người trên sân bóng có cùng ngày sinh lớn hơn là khả năng không tìm được ai.

Nguyên nhân có xác suất cao như vậy là do số cách mà người ta ghép đôi quan trọng hơn là bản thân số người. Khi chúng ta tìm hai người có ngày sinh trùng nhau thì cái mà chúng ta quan tâm là số cặp người, chứ không phải là từng người riêng rẽ. Như vậy, trong khi ta chỉ có 23 người trên sân bóng, thì lại có tới 253 cách ghép đôi hai người với nhau. Chẳng hạn, người thứ nhất có thể ghép đôi với 22 người, do đó ta có 22 cặp. Sau đó, người thứ hai có thể ghép đôi với 21 người còn lại (chúng ta đã tính người thứ hai ghép đôi với người thứ nhất trong trường hợp trước, nên số cặp bây giờ phải bớt đi một), do vậy bây giờ chỉ có thêm 21 cặp mới. Tiếp theo, người thứ ba có thể ghép đôi với 20 người còn lại (trừ người thứ nhất và người thứ hai - ND), nên có thêm 20 cặp nữa, và cứ tiếp tục như thế cho tới khi ta nhận đủ tổng cộng 253 cặp.

Xác suất để trong số 23 người có hai người trùng ngày sinh hơi lớn hơn 50% là điều có vẻ như trái với trực giác chúng ta, nhưng về mặt toán học thì không thể phủ nhận được. Những xác suất lạ lùng như thế thường được những gã ghi cá cược và những tay đánh bạc chuyên sử dụng để bẫy những tay chơi nghiệp dư ngớ ngẩn. Lần tới nếu bạn có tham gia một cuộc hội họp gì đấy có hơn 23 người thì bạn có thể hãy thử đánh cuộc rằng ở đó có hai người trùng ngày sinh. Cũng cần lưu ý rằng với một nhóm chỉ có 23 người thì xác suất đó chỉ hơi lớn hơn 50% một chút, nhưng xác suất ấy sẽ tăng rất nhanh, nếu số người đông hơn. Do đó, với một cuộc họp có 30 người thì bạn rất đáng đánh cuộc rằng sẽ có hai người trùng ngày sinh.

Fermat và Pascal đã xây dựng được những quy tắc căn bản chi phối các trò chơi may rủi và những tay đánh bạc chuyên nghiệp có thể sử dụng những quy tắc đó để định ra những chiến lược chơi hoặc đánh cược. Hơn thế nữa, những luật xác suất này còn được ứng dụng trong hàng loạt những tình huống, từ sự đầu cơ trên thị trường chứng khoán cho tới việc đánh giá xác suất xảy ra các sự cố hạt nhân. Pascal thậm chí còn khẳng định rằng ông có thể dùng lý thuyết của mình để biện hộ cho đức tin vào Chúa. Ông cho rằng: "Cảm hứng mà một tay cờ bạc cảm thấy khi đánh cuộc bằng tích của số tiền có thể được nhân với xác suất thắng cuộc". Sau đó ông lập luận rằng cái phần thưởng khả dĩ của một hạnh phúc vĩnh hằng có giá trị vô hạn, còn xác suất để được lên thiên đường do đã sống một cuộc sống đức hạnh, bất kể là nhỏ đến mức nào, nhưng vẫn là hữu hạn. Do đó, theo định nghĩa của Pascal, tôn giáo là một trò chơi của niềm xúc cảm vô hạn và đáng để chơi, bởi vì nhân một phần thưởng vô hạn với một xác suất hữu hạn thì vẫn là vô hạn.

Ngoài việc cùng chia sẻ với Pascal quyền là cha đẻ của lý thuyết xác suất, Fermat còn tham gia rất sâu vào việc xây dựng nên một lĩnh vực khác của toán học: đó là toán giải tích. Toán giải tích cho phép ta tính được tốc độ biến thiên, được biết là đạo hàm của một đại lượng này đối với một đại lượng khác. Ví dụ, tốc độ biến thiên của quãng đường đối với thời gian, không gì khác chính là vận tốc chuyển động. Đối với các nhà toán học, các đại lượng luôn có xu hướng được trừu tượng hóa và không còn mang một ý nghĩa cụ thể nữa, nhưng những hệ quả của các công trình của Fermat đã dẫn tới những cuộc cách mạng trong khoa học. Toán học của Fermat cho phép các nhà khoa học hiểu rõ hơn khái niệm vận tốc và mối quan hệ của nó với các đại lượng cơ bản khác, chẳng hạn như gia tốc - đó là tốc độ biến thiên của vận tốc theo thời gian.

Kinh tế học cũng là môn học chịu ảnh hưởng mạnh của giải tích toán. Chẳng hạn, lạm phát là tốc độ biến thiên của giá cả, hay được biết là đạo hàm của giá cả; và hơn thế nữa, các nhà kinh tế cũng còn quan tâm tới cả tốc độ lạm phát, tức là đạo hàm cấp hai của giá cả. Những thuật ngữ này cũng hay được các nhà chính trị sử dụng và nhà toán học Hugo Rossi một lần đã phát hiện ra điều sau: “Vào mùa thu năm 1972, Tổng thống Nixon đã tuyên bố rằng tốc độ tăng của lạm phát đang giảm. Đây là lần đầu tiên một Tổng thống đương nhiệm dùng tới đạo hàm cấp ba để hỗ trợ cho sự tái đắc cử của mình”.

Trong nhiều thế kỷ, Isaac Newton được xem là người đã phát minh ra giải tích toán một cách độc lập và không biết gì đến các công trình của Fermat. Nhưng vào năm 1934, Louis Trenchard Moore đã phát hiện được một bản ghi chép, qua đó xác nhận một cách chắc chắn công lao của Fermat và trả lại cho ông vinh dự mà ông xứng đáng được hưởng. Trong bản ghi chép đó, Newton đã viết rằng ông phát triển giải tích toán của mình dựa vào "phương pháp vẽ tiếp tuyến của ông Fermat". Và ngay từ thế kỷ XVII, toán giải tích đã được sử dụng để mô tả định luật hấp dẫn của Newton cùng với các định luật cơ học của ông, những định luật phụ thuộc vào khoảng cách, vận tốc và gia tốc.

Riêng phát minh ra giải tích toán và lý thuyết xác suất có lẽ đã là quá đủ để Fermat có một vị trí xứng đáng trong ngôi đền tôn vinh các nhà toán học, nhưng thành tựu lớn nhất của ông lại thuộc một lĩnh vực khác nữa của toán học. Trong khi toán giải tích đã được sử dụng để phóng các con tàu vũ trụ lên Mặt trăng, còn lý thuyết xác suất thì được sử dụng để đánh giá rủi ro trong các công ty bảo hiểm, thì tình yêu vĩ đại nhất của Fermat lại dành cho một đề tài quá ư vô dụng, đó là lý thuyết số. Fermat bị ám ảnh bởi nhu cầu tìm hiểu tính chất và những mối liên hệ giữa các con số. Đó là dạng thuần túy, cổ xưa nhất của toán học và Fermat bắt tay xây dựng trên khối kiến thức được truyền lại từ thời Pythagore.

Sự phát triển của lý thuyết số

Sau khi Pythagore qua đời, khái niệm chứng minh toán học đã được truyền bá rộng rãi trên khắp thế giới văn minh; và hai thế kỷ sau khi ngôi trường của ông bị đốt cháy thành bình địa, trung tâm nghiên cứu toán học đã chuyển từ Croton tới thành phố Alexandria.

Năm 332 trước Công nguyên, sau khi đã chinh phục được Hy Lạp, Tiểu Á và Ai Cập, Alexander Đại đế đã quyết định xây dựng một kinh đô tráng lệ nhất thế giới. Thực tế, Alexandria đã là một đô thị tuyệt đẹp nhưng chưa thể ngay lập tức trở thành một trung tâm tri thức được. Chỉ sau khi Alexander qua đời và Ptolemy, một người thân tín của ông ta, lên ngôi ở Ai Cập, thì Alexandria mới thực sự là nơi có trường Đại học Tổng hợp đầu tiên trên thế giới. Các nhà toán học và các nhà trí thức khác lũ lượt kéo về thành phố văn hóa của Ptolemy, và mặc dù chắc hẳn họ bị thu hút bởi sự nổi tiếng của trường Đại học, nhưng sức hấp dẫn chính lại là Thư viện Alexandria.

Thư viện này là ý tưởng của Demetrius Phalareus, một nhà hùng biện không mấy nổi tiếng, người đã buộc phải rời Athens và cuối cùng đã tìm được nơi cư trú ở Alexandria. Ông ta khuyên Ptolemy nên thu thập tất cả những cuốn sách nổi tiếng và đảm bảo với Ptolemy rằng nếu làm được như thế thì nhất định sẽ thu hút được những trí tuệ lớn. Một khi các sách ở Ai Cập và Hy Lạp đã được thu thập hết, người ta tung nhân viên đi tìm kiếm các sách khác ở khắp châu Âu và vùng Tiểu Á. Thậm chí ngay cả du khách tới Alexandria cũng không thoát khỏi là nạn nhân của cơn thèm khát sách của Thư viện. Khi đặt chân lên thành phố, sách vở của họ đều bị tạm giữ và giao cho các viên thư lại sao chép. Cuối cùng bản gốc sẽ được tặng cho Thư viện còn một bản sao được hào phóng trả lại cho chủ nhân cuốn sách. Hệ thống sao chép chu đáo như thế khiến các nhà lịch sử ngày nay hy vọng rằng biết đâu, một ngày nào đó, người ta sẽ phát hiện thấy ở đâu đó bản sao của những cuốn sách nổi tiếng đã bị thất lạc. Chẳng hạn, năm 1906, một người tên là J.L.

Heiberg đã phát hiện thấy ở Constantinople một bản thảo như thế, đó là bản sao cuốn *Phương pháp*, trong đó có chứa một số văn bản gốc của chính Archimede.

Ước mơ xây dựng một kho tàng tri thức của Ptolemy vẫn sống ngay cả khi ông ta mất, và vào thời một số thế hệ sau của dòng họ Ptolemy lên ngôi thì Thư viện đã có tới 600.000 cuốn sách. Các nhà toán học tới nghiên cứu ở Alexandria có thể học được mọi thứ của thế giới đã biết, và ở đây họ được học với những học giả nổi tiếng nhất. Người đầu tiên đứng đầu khoa toán ở Alexandria, không ai khác, chính là Euclid.

Euclid sinh khoảng năm 330 trước Công nguyên. Giống như Pythagore, Euclid tin vào việc tìm kiếm các chân lý toán học cho chính bản thân nó, chứ không đi tìm ứng dụng cho những công trình của mình. Người ta kể lại rằng trong một giờ học, có một sinh viên hỏi Euclid về việc sử dụng những kiến thức toán học mà anh ta đã học được. Sau khi giảng xong, Euclid quay về phía người nô lệ của mình và bảo: "Hãy đưa cho cậu ta một xu, vì cậu ta muốn kiếm lợi từ những thứ mà cậu ta học được". Và sau đó cậu sinh viên kia đã bị đuổi học.

Euclid đã dành phần lớn cuộc đời của mình để viết tác phẩm *Cơ sở,* một bộ sách giáo khoa thành công nhất trong lịch sử. Cho đến ngày nay, đây vẫn là cuốn sách bán chạy thứ hai sau cuốn Kinh thánh. Bộ *Cơ sở* gồm 13 cuốn, một số cuốn dành cho các công trình của chính Euclid, các tập còn lại ông biên soạn dựa trên toàn bộ tri thức toán học ở thời đó, trong đó có hai cuốn dành hoàn toàn cho các công trình của Hội ái hữu của Pythagore. Trong nhiều thế kỷ kể từ thời Pythagore, các nhà toán học đã phát minh ra nhiều kỹ thuật suy luận logic, có thể áp dụng cho những hoàn cảnh khác nhau, và Euclid đã biết sử dụng nhuần nhuyễn tất cả những kỹ thuật đó trong bộ *Cơ sở.* Đặc biệt Euclid đã khai thác triệt để một vũ khí logic được biết dưới cái tên là "reductio ad absurdum", tức là cách chứng minh bằng phản chứng. Phương pháp chứng minh này được tiến hành như sau: *để chứng minh một định lý là đúng, ban đầu ta hãy giả thiết nó là sai.* Sau đó, từ giả thiết định lý sai này, ta rút ra những hệ quả logic của nó. Và rồi tại một điểm nào đó trong chuỗi những suy luận logic ấy, ta phát hiện ra có mâu thuẫn (chẳng hạn như 2 + 2 = 5). Nhưng toán học lại không chấp nhận mâu thuẫn, do đó định lý ban đầu không thể sai, tức nó phải đúng.

Trong cuốn sách *Lời xin lỗi của một nhà toán học,* nhà toán học người Anh G.H. Hardy đã gói ghém tinh thần của phép chứng minh bằng phản chứng bằng mấy lời sau: "Phép chứng minh bằng phản chứng mà Euclid vô cùng yêu quý là một trong số những công cụ tinh tế nhất của nhà toán học. Nó là sự khai cuộc tinh tế hơn rất nhiều bất cứ một lối chơi cờ nào: một kỳ thủ có thể tạo điều kiện để thí quân tốt hoặc thậm chí bất kỳ quân nào khác, nhưng nhà toán học thì tạo điều kiện cho chính trò chơi của mình".

Một trong những chứng minh bằng phản chứng nổi tiếng nhất của Euclid đã xác lập sự tồn tại của số vô tỷ. Người ta ngờ rằng các số vô tỷ thực ra đã được phát minh đầu tiên bởi Hội ái hữu của Pythagore từ nhiều thế kỷ trước, nhưng khái niệm này bị Pythagore căm ghét tới mức ông đã phủ nhận sự tồn tại của nó.

Khi Pythagore tuyên bố rằng Vũ trụ được chi phối bởi các con số là ông muốn nói tới các số nguyên và tỷ số của các số đó (phân số), những số này được gọi chung là số hữu tỷ. Một số vô tỷ không phải là số nguyên cũng không phải là một phân số, và nó là cái đã làm cho Pythagore vô cùng hoảng sợ. Thực tế, các số vô tỷ lạ lùng tới mức chúng không thể được viết dưới dạng thập phân dù là thập phân có chu kỳ. Một số thập phân có chu kỳ, chẳng hạn như 0,111111..., thực ra khá đơn giản, nó tương đương với phân số 1/9. Thực tế, số 1 được lặp lại mãi mãi có nghĩa là số thập phân này có một cấu trúc khá đơn giản và đều đặn. Tính đều đặn đó, mặc dù kéo dài tới vô hạn, có nghĩa là số thập phân đang xét có thể viết lại dưới dạng một phân số. Tuy nhiên, nếu bạn định biểu diễn một số vô tỷ như một số thập phân, thì bạn sẽ được một số thập phân kéo dài mãi mãi với một cấu trúc không đều đặn hoặc không nhất quán.

Khái niệm số vô tỷ là một đột phá vĩ đại. Với phát minh, hay có thể nói là sáng chế ra các con số mới này, các nhà toán học đã mở rộng tầm mắt ra ngoài giới hạn của các số nguyên và các phân số xung quanh họ. Nhà toán học thế kỷ XIX Leopold Kronecker đã nói: "Chúa đã tạo ra các số nguyên, tất cả các số còn lại là tác phẩm của con người".

Số vô tỷ nổi tiếng nhất là số π. Trong nhà trường, số này được cho xấp xỉ bằng 22/7 hay 3,14; tuy nhiên, giá trị gần đúng nhất của π bằng 3,14159265358979323846, nhưng ngay cả số đó cũng chỉ là gần đúng mà thôi. Thực tế, π không bao giờ có thể viết chính xác được bởi vì các vị trí thập phân cứ kéo dài mãi mà không có một cấu trúc đều đặn nào. Một nét đẹp của cấu trúc mang tính ngẫu nhiên này là nó có thể tính được nhờ một phương trình cực kỳ chính quy:

$$\pi = 4 \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots \right)$$

Bằng cách tính một số ít số hạng đầu tiên, bạn có thể nhận được một giá trị rất thô của π, nhưng nếu tính càng nhiều số hạng hơn, bạn sẽ nhận được các giá trị có độ chính xác càng cao hơn. Mặc dù chỉ cần biết số π chính xác tới 39 chữ số thập phân là đã đủ tính được chu vi Vũ trụ chính xác tới cỡ bán kính của nguyên tử hiđrô, nhưng điều này cũng không ngăn cản nổi các nhà khoa học máy tính tính số π tới nhiều chữ số thập phân nhất có thể được. Người giữ kỷ lục hiện nay là Yasumasa Kanada thuộc trường Đại học Tokyo, ông đã tính được số π chính xác tới 6 tỷ chữ số thập phân vào năm 1996. Hiện nay có tin đồn rằng anh em nhà Chudnovsky (người Nga) ở New York đã tính được số π với 8 tỷ chữ số thập phân. Giả thử Kanada hay anh em nhà Chudnovsky có thực hiện việc tính số π cho tới khi máy tính của họ sử dụng hết mọi nguồn năng lượng trong Vũ trụ đi nữa thì họ cũng không bao giờ tìm được giá trị chính xác của số π. Điều này khiến ta dễ dàng hiểu được tại sao Pythagore lại âm mưu che giấu sự tồn tại của những con quỷ toán học đó.

Giá trị của π chính xác tới 1500 chữ số thập phân

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820
9749445923078164062862089986280348253421170679821480866
5132823066470938446095505822317253594081284811174502841
0270193852110555964462294895493038196442881097566593344
6128475648233786783165271201909145648566923460348610454
3266482133936072602491412737245870066063155881748815209
2096282925409171536436789259036001133053054882046652138
4146951941511609433057270365759591953092186117381932611
7931051185480744623799627495673518857527248912279381830
1194912983367336244065664308602139494639522473719070217
9860943702770539217176293176752384674818467669405132000
5681271452635608277857713427577896091736371787214684409
0122495343014654958537105079227968925892354201995611212
9021960864034418159813629774771309960518707211349999998
3729780499510597317328160963185950244594553469083026425
2230825334468503526193118817101000313783875288658753320
8381420617177669147303598253490428755468731159562863882
3537875937519577818577805321712268066130019278766111959
0921642019893809525720106548586327886593615338182796823
0301952035301852968995773622599413891249721775283479131
5155748572424541506959508295331168617278558890750983817
5463746493931925506040092770167113900984882401285836160
3563707660104710181942955596198946767837449448255379774
7268471040475346462080466842590694912933136770289891521
0475216205696602405803815019351125338243003558764024749
6473263914199272604269922796782354781636009341721641219
9245863150302861829745557067498385054945885869269956909
2721079750930295532116534498720275596023648066549911988 1
8347977535663698074265425278625518184175746728909777727
938000816470200161452491921732172147723501414419735

Khi Euclid dám đối mặt với vấn đề số vô tỷ trong tập thứ mười của bộ sách *Cơ sở*, thì mục đích chủ yếu là để chứng minh có tồn tại một số không thể được viết dưới dạng phân số. Thay vì chứng minh số π là một số vô tỷ, ông đã xét căn bậc hai của số 2, tức $\sqrt{2}$, một số mà khi nhân với chính nó cho kết quả bằng 2. Để chứng minh $\sqrt{2}$ không thể viết dưới dạng phân số, Euclid dùng phép chứng minh bằng phản chứng, bằng cách bắt đầu từ giả thiết ngược lại, tức là cho rằng nó có thể viết được dưới dạng phân số. Nhưng khi đó ông chứng minh được rằng phân số này luôn luôn giản ước được. Ví dụ, phân số 8/12 được giản ước thành 4/6 bằng cách cùng chia tử số và mẫu số cho 2. Sau đó phân số 4/6 lại được giản ước thành 2/3 và phân số này không thể giản ước được, và do đó được gọi là phân số tối giản. Tuy nhiên, Euclid đã chứng minh được rằng phân số mà ông giả thiết là biểu diễn của $\sqrt{2}$ lại có thể giản ước một số vô hạn lần mà vẫn không qui được nó về dạng tối giản. Điều này là vô lý bởi vì tất cả các phân số cuối cùng đều phải được qui về phân số tối giản và vì vậy phân số giả thiết lúc đầu là không tồn tại. Như vậy, $\sqrt{2}$ không thể viết được dưới dạng phân số, do đó nó là một số hữu tỷ. Chứng minh này của Euclid được trình bày ngắn gọn trong Phụ lục 2.

Như vậy, bằng cách dùng chứng minh bằng phản chứng, Euclid đã chứng minh được sự tồn tại của các số vô tỷ. Lần đầu tiên các số đã có được một phẩm chất mới, trừu tượng hơn. Cho tới thời điểm này trong lịch sử, tất cả các con số đều được biểu diễn như các số nguyên hoặc phân số, nhưng các số vô tỷ của Euclid đã thách thức sự biểu diễn theo cách truyền thống. Ngoài cách viết là $\sqrt{2}$ ra, không có một cách nào khác để biểu diễn một số bằng căn bậc hai của 2, bởi vì nó không thể được viết như một phân số và mọi ý định viết nó như một số thập phân chỉ có thể là gần đúng, ví dụ 1,414213562373...

Đối với Pythagore, vẻ đẹp của toán học là ở ý tưởng cho rằng các số hữu tỷ (gồm các số nguyên và phân số) có thể giải thích được mọi hiện tượng tự nhiên. Triết lý đó đã bịt mắt Pythagore trước sự tồn tại của các số vô tỷ và thậm chí có thể đã dẫn tới sự hành quyết một trong số các học trò của ông. Truyền thuyết kể lại rằng một học trò trẻ tuổi của Pythagore tên là Hippasus đã mày mò với số $\sqrt{2}$ với ý định tìm biểu diễn phân số tương đương của nó. Cuối cùng anh ta nhận ra rằng một phân số như vậy không tồn tại, tức $\sqrt{2}$ là một số vô tỷ. Hippasus chắc là rất vui sướng vì phát minh của mình, nhưng sư phụ thì không. Bởi lẽ Pythagore đã xác định Vũ trụ thông qua các con số hữu tỷ, và sự tồn tại của các số vô tỷ sẽ làm cho lý tưởng của ông bị xem xét lại. Tiếp sau phát minh của Hippasus chắn hẳn sẽ là một thời kỳ tranh luận và suy ngẫm, trong đó Pythagore buộc phải chấp nhận nguồn các số mới đó. Tuy nhiên, Pythagore lại không muốn thừa nhận rằng mình sai, nhưng đồng thời ông lại không thể đánh bại lập luận của Hippasus bằng sức mạnh của logic.

Cha đẻ của logic và phương pháp toán học đã phải dùng tới bạo lực chứ không chịu chấp nhận mình sai. Sự phủ nhận các số vô tỷ của Pythagore là một hành động đáng hổ thẹn và có lẽ là một bi kịch lớn nhất của toán học Hy Lạp. Chỉ sau khi Pythagore qua đời, các số vô tỷ mới có thể được phục hồi một cách an toàn.

Mặc dù Euclid rõ ràng cũng rất quan tâm tới lý thuyết số, nhưng đó không phải là đóng góp lớn nhất của ông cho toán học. Niềm đam mê thực sự của Euclid là hình học. Và trong số 13 tập làm nên bộ *Cơ sở*, thì từ quyển I tới quyển VI là hình học phẳng và các quyển XI tới XIII là về hình học không gian. Và đó cũng là khối kiến thức đầy đủ tới mức chương trình hình học ở bậc phổ thông và đại học trong hai ngàn năm tới nội dung cũng chỉ gói gọn trong các tập sách trên.

Nhà toán học biên soạn được bộ sách tương đương cho lý thuyết số là Diophantus ở thành Alexandria, người anh hùng cuối cùng của truyền thống toán học Hy Lạp. Mặc dù những thành tựu của Diophantus trong lý thuyết số đã được trình bày đầy đủ trong những cuốn sách của ông, nhưng chính con người nhà toán học xuất chúng đó thì người ta lại chẳng biết được gì. Ngay cả nơi sinh của ông người ta cũng không biết và thời gian mà ông tới Alexandria cũng chỉ được biết là vào khoảng nào đó giữa năm thế kỷ. Trong những tác phẩm của Diophantus người ta thấy ông có trích dẫn Hypsicle và vì vậy ông phải sống sau năm 150 trước Công nguyên; mặt khác, công trình của ông lại được Theon ở Alexandria trích dẫn, vậy ông phải sống trước năm 364 sau Công nguyên. Thường thì người ta tạm chấp nhận là ông sống vào khoảng năm 250 sau Công nguyên. Riêng đối với những người thích giải toán, thì một chi tiết về cuộc đời của Diophantus còn truyền được đến tận ngày nay dưới dạng một câu đố mà người ta đồn rằng được khắc trên mộ chí của ông:

> Thượng đế ban cho ông tuổi thiếu niên một phần sáu cuộc đời, thêm cho một phần mười hai đôi má mướt lông tơ; rồi sau đó một phần bảy cuộc đời, Người đã thắp cho ông ngọn đèn hôn nhân, và năm năm sau đám cưới, Người đã ban cho ông một

đứa con trai. Than ôi! Đứa con muộn màng tội nghiệp, khi vừa bằng một nửa tuổi cha, đã bị số phận lạnh lùng cướp mất. Sau khi được khoa học về các con số này an ủi thêm bốn năm nữa thì ông cũng qua đời.

Câu đố đặt ra là hãy tính tuổi của Diophantus. Bạn có thể xem lời giải ở Phụ lục 3.

Câu đố này là một ví dụ về loại bài toán mà Diophantus thích thú. Chuyên môn của ông là giải những bài toán có nghiệm là những số nguyên, và ngày hôm nay những bài toán như vậy đều được gọi là bài toán Diophantus. Toàn bộ sự nghiệp của ông ở Alexandria dành cho việc thu thập những bài toán đã biết và sáng tạo thêm những bài toán mới, rồi sau đó biên soạn thành một bộ sách chuyên luận có tên là Số học. Trong số 13 tập sách làm nên bộ Số học, chỉ có sáu tập sống sót được qua những biến loạn thời Trung cổ và tiếp tục truyền cảm hứng cho các nhà toán học thời Phục hưng, trong đó có Pierre de Fermat. Bảy tập khác bị thất lạc trong một loạt những sự kiện bi thảm đã đưa toán học trở về thời đại Babilon.

Trong suốt nhiều thế kỷ giữa thời Euclid và thời Diophantus, Alexandria vẫn còn là một kinh đô trí tuệ của thế giới văn minh, nhưng liên tục bị quân đội nước ngoài đe dọa. Cuộc tấn công lớn đầu tiên đã diễn ra năm 47 trước Công nguyên, khi mà Julius Caesar định lật đổ Cleopatra đã phóng hỏa thiêu hủy hạm đội Alexandria. Do ở gần hải cảng, nên Thư viện cũng bị cháy và hàng trăm ngàn cuốn sách đã bị thiêu hủy. Thật may mắn cho toán học, Cleopatra lại là người rất coi trọng tri thức, bà đã quyết định phục hồi Thư viện trở lại sự huy hoàng vốn có của nó. Mark Antony hiểu rằng con đường đi tới trái tim giới trí thức là đi qua thư viện, nên

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus HIERONYMI DROVART, via Iacobæa,
sub Scuto Solari.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Bìa trước cuốn *Arithumetica* của Diophantus do Claude Gaspar Bachet dịch và xuất bản năm 1621. Cuốn sách này đã trở thành Kinh Thánh của Fermat và đã truyền cảm hứng cho nhiều công trình của ông.

ông ta đã hành quân tới ngay thành phố Pergamum. Thành phố này đang khởi công xây dựng một thư viện với hy vọng sẽ cung cấp cho nó bộ sưu tập sách tốt nhất thế giới. Mark Antony bèn cho chuyển hết kho sách ở đây về Ai Cập để phục hồi lại vị trí số một của Alexandria.

Trong khoảng bốn trăm năm sau, Thư viện vẫn tiếp tục thu thập sách, nhưng tới năm 389 sau Công nguyên, nó bị giáng đòn đầu tiên trong số hai đòn chí tử mà cả hai đều do sự cuồng tín tôn giáo. Nguyên do là Hoàng đế theo đạo thiên chúa Theodosius đã ra lệnh cho Theophilus, tổng giám mục ở Alexandria, phá hủy tất cả các tượng đài phiếm thần giáo. Thật không may, trong thời gian nữ hoàng Cleopatra cho phục hồi và sắp xếp lại kho sách của Thư viện, bà đã quyết định cho chuyển sách vào Đền Serapis và vì vậy mà giờ đây Thư viện trở thành đối tượng phải phá hủy. Những học giả phiếm thần giáo đã định cứu kho kiến thức của gần sáu thế kỷ quý giá đó, nhưng trước khi họ có thể làm được điều gì đó thì họ đã bị băm nát bởi đám đông tín đồ Thiên chúa giáo. Và sau đó là bóng đêm thời Trung cổ bắt đầu phủ xuống.

Một số ít bản sao quý giá của những cuốn sách quan trọng nhất vẫn còn sống sót qua cuộc tàn sát của người Thiên chúa giáo, do đó các học giả vẫn tiếp tục tới Alexandria để tìm kiếm kiến thức. Sau đó, vào năm 642, một cuộc tấn công của người Hồi giáo đã làm trọn những gì mà cuộc tấn công của người Thiên chúa giáo chưa làm được. Khi được hỏi phải làm gì với Thư viện, lãnh tụ Hồi giáo Omar đắc thắng ra lệnh rằng những sách trái với kinh Coran đều phải tiêu hủy, còn những sách phù hợp với kinh Coran do quá dư thừa nên cũng phải tiêu hủy nốt. Những bản thảo giờ đây được dùng để đốt lò sưởi ấm các nhà tắm công cộng và thế là toán học Hy Lạp chỉ còn là những làn khói. Vì vậy không có gì đáng ngạc nhiên rằng phần lớn các công trình của Diophatus đã bị tiêu hủy; và có thể nói việc sáu tập của bộ *Số học* sống sót sau những bi kịch xảy ra ở Alexandria quả là một điều thần kỳ.

Trong một thiên niên kỷ tiếp sau, toán học ở phương Tây gần như trong cảnh hoang tàn. Chỉ có một số học giả ở Ấn Độ và Ả Rập là còn giữ được sức sống cho môn học này. Họ đã chép lại những công thức được mô tả trong các bản thảo Hy Lạp còn sót lại, rồi sau đó phát minh lại nhiều định lý đã bị thất lạc. Bản thân họ cũng bổ sung nhiều yếu tố mới cho toán học, trong đó có số không (zêrô).

Trong toán học hiện đại, số không thực hiện hai chức năng. Thứ nhất, nó cho phép chúng ta phân biệt được số 52 với số 502. Trong một hệ thống mà vị trí mỗi chữ số thể hiện giá trị của nó, thì rất cần một ký hiệu để chỉ một vị trí để trống. Ví dụ, 52 là biểu diễn 5 lần của mười cộng với 2 lần của một, trong khi đó 502 biểu diễn 5 lần của một trăm cộng với 0 lần của mười rồi cộng với 2 lần của một, và số 0 là cực kỳ quan trọng để không gây nhầm lẫn trong hai trường hợp đó. Ngay cả những người Babilon ở thiên niên kỷ thứ ba trước Công nguyên cũng hiểu được rằng việc dùng số không sẽ tránh được sự nhầm lẫn; và chấp nhận ý tưởng đó, người Hy Lạp đã dùng một ký hiệu hình tròn, tương tự với ký hiệu số không mà chúng ta dùng hiện nay. Tuy nhiên, số không còn có một ý nghĩa sâu sắc và tế nhị hơn nhiều, nhưng phải mãi nhiều thế kỷ sau các nhà toán học Ấn Độ mới nhận thức được đầy đủ điều đó. Họ nhận ra rằng số không có một sự tồn tại độc lập chứ không đơn giản chỉ đóng vai trò là dấu cách giữa các số khác, nghĩa là số không là một con số với đầy đủ quyền của nó. Nó biểu diễn một lượng trống rỗng, hư không. Đây là lần đầu tiên, khái niệm trống rỗng được cho một ký hiệu cụ thể.

Đối với bạn đọc ngày hôm nay thì điều này tưởng như chỉ là một bước tiến tầm thường, nhưng tất cả các triết gia cổ Hy Lạp, kể cả Aristotle, đều không biết tới ý nghĩa sâu xa đó của ký hiệu số không. Ông lập luận rằng số không là "bất hợp pháp" vì nó phá vỡ sự nhất quán của các con số khác - phép chia của một số bình thường bất kỳ nào cho số không đều dẫn tới kết quả không thể hiểu nổi. Tới thế kỷ thứ VI, các nhà toán học Ấn Độ không còn tránh né vấn đề đó nữa, và nhà bác học thế kỷ thứ VII Brahmagupta đã đủ tinh tế để dùng phép chia cho số không để định nghĩa khái niệm vô hạn.

Trong khi châu Âu đã từ bỏ con đường tìm kiếm chân lý cao quý thì ở Ấn Độ và Ả Rập người ta củng cố khối kiến thức còn lấy lại được trong đống tro tàn của Alexandria và giải thích lại chúng bằng một ngôn ngữ mới, hùng hồn hơn. Ngoài việc thêm số không vào từ vựng toán học, họ còn thay những ký hiệu thô sơ của người Hy Lạp và những con số cồng kềnh của người La Mã bằng một hệ đếm mới mà đã được chấp nhận rộng rãi cho tới hiện nay. Và lại một lần nữa, điều này tưởng như chỉ là một bước tiến nhỏ, nhưng chỉ cần thực hiện phép nhân hai số La Mã CLV và DCI là bạn sẽ hiểu được ý nghĩa của đột phá đó. Cũng công việc đó, nhưng khi bạn nhân hai số 155 và 601 thì vấn đề trở nên đơn giản hơn rất nhiều. Sự phát triển của bất cứ một bộ môn nào cũng phụ thuộc vào khả năng thông báo và phát triển những ý tưởng, và điều này, đến lượt mình, lại dựa trên một ngôn ngữ đủ chi tiết và mềm dẻo. Những ý tưởng của Pythagore và Euclid không kém phần tao nhã trong cách diễn đạt vụng về của họ, nhưng khi được chuyển sang những ký hiệu Ả Rập, chúng lập tức đơm hoa kết trái và cho ra đời những khái niệm mới hơn và phong phú hơn.

Vào thế kỷ thứ IX, nhà bác học người Pháp Gerbert d'Aurillac đã học được hệ đếm mới từ những người Moor ở Tây Ban Nha (đây là hậu duệ những người Hồi giáo Ả Rập tới xâm lược Tây Ban Nha vào thế kỷ thứ VIII - ND) và thông qua các cương vị giảng dạy của ông tại các nhà thờ và trường học ở khắp châu Âu, ông đã giới thiệu hệ đếm mới này với phương Tây. Năm 999, ông được bầu làm Giáo hoàng Sylvester II, một chức vị cho phép ông tiếp tục khuyến khích việc sử dụng hệ đếm Ấn Độ - Ả Rập. Mặc dù hiệu quả của hệ đếm này đã làm một cuộc cách mạng trong công việc kế toán và nhanh chóng được giới thương gia chấp nhận, nhưng nó lại rất ít tác dụng làm sống lại nền toán học châu Âu.

Bước ngoặt quan trọng đối với nền toán học phương Tây đã xảy ra vào năm 1453, khi mà người Thổ Nhĩ Kỳ tàn phá thành Constantinople. Trong những năm tháng đó, nhiều bản thảo may mắn thoát được khỏi những tai họa ở Alexandria đã được tập hợp về Constantinople, nhưng trước mối đe dọa bị tiêu hủy một lần nữa, các nhà thông thái Byzantine bèn chạy trốn sang phương Tây và mang theo tất cả những gì mà họ còn giữ được. Thoát khỏi sự tàn phá dã man của Caesar, của Tổng Giám mục Theophilus, của lãnh tụ Hồi giáo Omar và giờ đây là của người Thổ, một ít tập trong bộ *Số học* quý giá cuối cùng đã tới được châu Âu. Và cũng nhờ đó mà Diophantus tới được bàn làm việc của Pierre de Fermat.

Sự ra đời của một câu đố

Những trách nhiệm ở tòa án của Fermat chiếm phần lớn thời gian của ông, nhưng vào những khoảng thời gian rỗi rãi hiếm hoi, ông dành hoàn toàn cho toán học. Điều này một phần cũng bởi vì các thẩm phán ở nước Pháp thế kỷ XVII không được khuyến khích có nhiều quan hệ xã hội với lý do là bạn bè hoặc người quen một ngày nào đó có thể sẽ bị gọi ra trước tòa. Mà sự thân ái với những người địa phương chỉ có thể sẽ dẫn tới thiên vị. Chính nhờ sự xa lánh giới thượng lưu ở Toulouse này mà Fermat có điều kiện tập trung cho sở thích của mình.

Không có ghi chép nào nói về một thầy giáo dạy toán đã khích lệ Fermat, mà người dẫn dắt ông chính là cuốn *Số học* của Diophantus. Đây là cuốn sách đã cố gắng trình bày lý thuyết số theo cách ở thời Diophantus, nghĩa là thông qua một loạt các bài toán cùng với lời giải. Thực tế, Diophantus đã giới thiệu với Fermat những kiến thức toán học của cả một ngàn năm trước đó. Chỉ trong một cuốn sách thôi, Fermat đã có thể tìm thấy toàn bộ kiến thức về các con số mà Pythagore và Euclid cùng với những người như họ đã xây dựng nên. Lý thuyết số vẫn dẫm chân tại chỗ từ thời Alexandria bị đốt cháy một cách tàn khốc, nhưng giờ đây Fermat đã sẵn sàng bắt tay vào nghiên cứu lĩnh vực cơ bản nhất của toán học này.

Cuốn *Số học* đã truyền cảm hứng cho Fermat, thực ra là bản dịch ra tiếng La tinh của Claude Gaspar Bachet de Méziriac, một người nổi tiếng thông thái nhất nước Pháp hồi đó. Là một nhà ngôn ngữ học xuất sắc, một nhà thơ, và một học giả nghiên cứu các tác phẩm cổ điển, Bachet còn là người rất đam mê những câu đố toán học. Tác phẩm xuất bản đầu tiên của ông là cuốn sách biên soạn những câu đố có tựa đề *Những bài toán vui và lý thú về các con số,* trong đó có các bài toán qua sông, các bài toán về rót chất lỏng và một số câu đố về đoán số. Một trong số những câu đố đó là bài toán về các quả cân có nội dung như sau:

> Hỏi phải dùng tối thiểu bao nhiêu quả cân để có thể cân được (bằng cân đĩa) những khối lượng có giá trị là số nguyên từ 1 đến 40.

Bachet đã đưa ra một lời giải khá thông minh cho câu đố trên, trong đó ông chỉ phải dùng có bốn quả cân. Bạn đọc có thể xem lời giải này trong Phụ lục 4.

Mặc dù Bachet chỉ đơn thuần là một người nghiên cứu toán học nghiệp dư, nhưng ông đã có đủ hiểu biết để nhận thấy rằng cuốn sách liệt kê các bài toán của Diophantus ở một bình diện cao hơn và đáng để được nghiên cứu một cách sâu sắc hơn. Vì vậy ông đã bỏ công dịch tác phẩm đó và cho xuất bản nhằm để cho những kỹ thuật của người Hy Lạp được nhen nhóm trở lại mà một phần rất lớn tri thức toán học thời cổ đại đã bị lãng quên hoàn toàn. Toán học cao cấp không được giảng dạy thậm chí ở những trường Đại học lớn nhất ở châu Âu và chỉ nhờ những nỗ lực của các học giả như Bachet mà rất nhiều những tri thức đó đã được nhanh chóng làm sống lại. Năm 1621, Bachet cho xuất bản bản dịch tiếng La tinh của cuốn *Số học,* và với nghĩa cử đó ông đã góp phần tạo nên thời hoàng kim thứ hai của toán học.

Cuốn *Số học* này chứa hơn 100 bài toán và mỗi bài toán Diophantus đều có lời giải chi tiết, một tấm gương mà Fermat không muốn noi theo. Fermat không quan tâm tới việc viết sách giáo khoa cho các thế hệ tiếp sau, ông đơn thuần chỉ muốn khẳng định với chính mình rằng ông đã giải xong một bài toán. Việc nghiên cứu các bài toán cùng với lời giải của Diophantus đã gợi ý cho Fermat suy nghĩ và giải các bài toán khác có liên quan và tinh tế hơn. Fermat thường ghi vắn tắt những gì mà ông thấy cần thiết, đủ để tin rằng ông đã nhìn thấy lời giải, thế thôi, chứ không bận tâm viết hết ra phần còn lại của chứng minh. Thường thì những ghi chép đó ông lại vất vào sọt rác, rồi sau đó lại vội vã chuyển sang nghiên cứu bài toán khác. Thật may mắn đối với chúng ta là bản dịch cuốn *Số học* của Bachet lại được để lề khá hào phóng, nên đôi khi Fermat có thể viết vội những suy luận hoặc lời bình luận của mình ở ngay đó. Đối với nhiều thế hệ các nhà toán học, những ghi chú bên lề này, mặc dù khá hiếm hoi, nhưng là bản lưu vô giá những tính toán xuất sắc nhất của Fermat.

Một trong số những phát minh của Fermat có liên quan tới những con số được gọi là các số bạn bè (amicable numbers). Những số này có liên quan mật thiết với các số hoàn hảo của Pythagore hai ngàn năm trước. Những số bạn bè là các cặp số trong đó mỗi số này là tổng của các ước số của số kia. Những môn đệ của Pythagore đã tài tình phát hiện ra rằng hai số 220 và 284 là hai số bạn bè. Thật vậy, các ước số của 220 là 1, 2 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 và tổng của chúng đúng bằng 284. Mặt khác, các ước số của 284 là 1, 2, 4, 71, 142 và tổng của tất cả các số đó bằng 220.

Cặp số 220 và 284 đã từng được xem là biểu tượng của tình bạn. Cuốn sách *Màn diễn ma thuật toán học* của Martin Gardner có kể rằng những lá bùa được bán ở thời Trung cổ đều có ghi hai con số này với lời nhắn nhủ rằng ai mang những dấu bùa đó sẽ gặp may mắn trong tình yêu. Một nhà lý thuyết số Ả Rập có ghi lại phong tục khắc con số 220 trên một quả và số 284 trên một quả khác, sau đó ăn quả thứ nhất và đưa quả thứ hai cho người mình yêu, coi đó như một thứ bùa mê toán học. Các nhà thần học đầu tiên cũng đã ghi nhận trong cuốn *Sáng thế* rằng Jacob đã cho Esau 220 con cừu. Họ tin rằng số cừu đó, tức là một nửa của cặp số bạn bè, là một biểu hiện tình yêu của Jacob đối với Esau.

Trong suốt một thời gian rất dài người ta không tìm thêm được một cặp số bạn bè nào nữa, cho đến tận năm 1636, Fermat mới phát hiện ra cặp số 17.296 và 18.416. Mặc dù không phải là một phát minh gì sâu sắc lắm, nhưng nó chứng tỏ rằng Fermat đã rất thành thạo với những con số và rất hứng thú vui chơi với chúng. Ông đã khơi mào cho một làn sóng tìm kiếm các số bạn bè; Descartes đã phát hiện ra cặp số thứ ba (9.363.584 và 9.437.056) và Leonhard Euler đã nối tiếp vào danh sách đó 62 cặp số nữa. Một điều hơi lạ là tất cả họ đều để sót một cặp số bạn bè nhỏ hơn nhiều. Năm 1866, một người Italia 60 tuổi, tên là Nicolo Paganini, đã phát hiện ra cặp số 1.184 và 1.210.

Trong thế kỷ XX, các nhà toán học đã mở rộng khái niệm các số bạn bè và tìm kiếm các số "quảng giao", đó là bộ ba số hoặc nhiều hơn tạo nên một vòng tròn khép kín. Ví dụ với bộ ba số (1.945.330.728.960; 2.324.196.638.720; 2.615.631.953.920) tổng các ước số của số thứ nhất bằng số thứ hai, tổng các ước số của số thứ hai bằng số thứ ba và tổng các ước số của số thứ ba lại bằng số thứ nhất. Vòng quảng giao dài nhất đã biết gồm 28 thành viên, trong đó số đầu tiên là 14.316.

Mặc dù việc phát hiện ra cặp số bạn bè mới đã làm cho Fermat có đôi chút tiếng tăm, nhưng sự nổi tiếng của ông chỉ thực sự được khẳng định nhờ một loạt những câu đố toán học. Chẳng hạn, Fermat đã nhận thấy rằng số 26 kẹp giữa hai số 25 và 27, trong đó một số là bình phương ($25 = 5^2 = 5\times5$) và số kia là lập phương ($27 = 3^3 = 3\times3\times3$). Ông đã cố tìm kiếm những số khác cũng kẹp giữa một số bình phương và số lập phương, nhưng không thể tìm được, nên ông ngờ rằng số 26 có lẽ là số duy nhất. Sau nhiều ngày suy nghĩ căng thẳng, ông đã xây dựng được một hệ thống lập luận phức tạp chứng minh một cách chặt chẽ rằng số 26 thực sự là số duy nhất kẹp giữa một số bình phương và một số lập phương. Chứng minh logic từng bước một của ông đã xác lập được rằng không có một số nào khác thỏa mãn tiêu chuẩn đó.

Fermat đã công bố tính chất độc đáo của số 26 cho cộng đồng toán học, và sau đó thách thức họ chứng minh khẳng định ấy. Ông cũng công khai thừa nhận rằng chính ông đã có trong tay một chứng minh; tuy nhiên, ông muốn xem những người khác có đủ óc sáng tạo để làm điều đó hay không. Mặc dù phát biểu thì đơn giản như vậy, nhưng chứng minh điều đó là hết sức phức tạp, mà Fermat thì lại rất thích trêu chọc hai nhà toán học người Anh là Wallis và Degby, những người cuối cùng đã chấp nhận đầu hàng. Nhưng xét cho cùng, phát biểu vĩ đại nhất của Fermat khiến cho ông trở thành nổi tiếng hóa ra lại là một câu đố khác đối với phần còn lại của thế giới. Tuy nhiên, đây lại là một câu đố tình cờ, chưa bao giờ có ý định được đưa ra trước công luận.

Ghi chú bên lề

Khi nghiên cứu quyển II của bộ *Số học,* Fermat đi tới một loạt những nhận xét, những bài toán và lời giải có liên quan tới định lý

Pythagore và bộ ba các số Pythagore. Ví dụ, Diophantus đã thảo luận sự tồn tại của bộ ba số đặc biệt tạo nên "tam giác vuông khập khiễng", trong đó hai cạnh góc vuông x và y chỉ khác nhau một đơn vị (ví dụ x = 20, y = 21, z = 29 và $20^2 + 21^2 = 29^2$).

Fermat kinh ngạc trước sự phong phú và số lượng các bộ ba số Pythagore. Ông cũng đã biết rằng nhiều thế kỷ trước Euclid đã đưa ra một chứng minh (xem Phụ lục 5) chứng tỏ rằng có một số vô hạn bộ ba các số Pythagore. Chắc hẳn Fermat đã phải xem xét kỹ lưỡng sự trình bày của Diophantus về bộ ba các số Pythagore và cũng đã băn khoăn tự hỏi liệu còn có thể thêm được gì chăng vào đề tài này. Ông đã trầm ngâm trên trang sách này và bắt đầu phân tích phương trình Pythagore với ý định thử xem liệu mình có thể phát hiện ra điều gì đó mà những người Hy Lạp đã bỏ sót hay không. Bất chợt trong khoảnh khắc loé sáng của thiên tài - khoảnh khắc đã làm cho ông Hoàng Nghiệp dư trở nên bất tử - ông đã tạo ra một phương trình, mặc dù bề ngoài khá giống với phương trình Pythagore, nhưng lại hoàn toàn không có nghiệm. Đó cũng chính là phương trình mà cậu bé Andrew Wiles mười tuổi đã đọc được trong thư viện phố Milton Road.

Thay vì xét phương trình

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Fermat đã tạo ra một biến thể của nó:

$$x^3 + y^3 = z^3$$

Như đã nói ở chương trước, Fermat chỉ đơn giản thay các lũy thừa bậc hai thành bậc ba, tức bình phương thành lập phương, nhưng dường như phương trình mới này lại không có bất cứ một nghiệm nguyên nào. Bằng phương pháp thử và sai, ông đã nhanh chóng nhận thấy khó khăn trong việc tìm hai số lập phương có tổng bằng số lập phương thứ ba. Liệu có đúng là sự thay đổi tí chút như vậy đã làm cho phương trình Pythagore vốn có vô số nghiệm lại trở thành một phương trình không có nghiệm nào?

Ông tiếp tục làm thay đổi phương trình Pythagore bằng cách thay số mũ bằng các số lớn hơn 3, và rồi ông cũng phát hiện ra rằng việc tìm nghiệm của mỗi phương trình đó cũng khó khăn không kém. Theo Fermat thì dường như không có ba số nguyên nào thỏa mãn chính xác phương trình:

$$x^n + y^n = z^n, \text{ trong đó } n = 3, 4, 5...$$

Bên lề, cạnh Bài toán 8 của cuốn *Số học*, ông đã ghi lại nhận xét của mình:

Một số lập phương không thể được viết dưới dạng tổng của hai lập phương hoặc một lũy thừa bậc bốn không thể viết dưới dạng tổng hai lũy thừa bậc bốn hay tổng quát, một số bất kỳ là lũy thừa bậc lớn hơn hai không thể viết dưới dạng tổng của hai lũy thừa cùng bậc.

Trong vô số những số khả dĩ dường như chẳng có lý do gì lại không tìm được ít nhất một tập hợp nghiệm, nhưng Fermat lại khẳng định rằng trong vũ trụ vô tận của các con số không ở đâu có "bộ ba số Fermat". Đó là một tuyên bố khác thường, nhưng lại là một tuyên bố mà Fermat tin rằng ông có thể chứng minh được. Sau ghi chú đầu tiên phác thảo ra lý thuyết đó, thiên tài tinh quái này còn vội vã ghi thêm bên lề một dòng nữa mà sau này đã ám ảnh nhiều thế hệ các nhà toán học:

Tôi đã có một chứng minh thực sự tuyệt vời mệnh đề này, nhưng do lề quá hẹp không thể viết hết ra được.

Điều này chứng tỏ Fermat đang ở đỉnh điểm cực kỳ tinh quái. Dựa vào những lời của chính ông, ta có thể thấy rằng ông đã rất mãn nguyện với "chứng minh thực sự tuyệt vời đó", nhưng ông không bận tâm viết ra chi tiết các bước suy luận và cũng không bao giờ muốn công bố nó. Fermat cũng chưa bao giờ tiết lộ với ai chứng minh của ông, và mặc dù tính lười nhác cộng với sự khiêm tốn vốn có của ông, Định lý cuối cùng của Fermat, như sau này người ta thường gọi, vẫn trở thành nổi tiếng khắp thế giới trong những thế kỷ tới.

Định lý cuối cùng của Fermat cuối cùng đã được công bố

Phát minh nổi tiếng của Fermat đã xảy ra vào đầu sự nghiệp toán học của ông, tức là vào khoảng năm 1637. Gần ba mươi năm sau, trong khi đang thực thi công vụ ở thị trấn Castres thì Fermat ngã bệnh nặng. Ngày 9 tháng 1 năm 1665, ông ký lệnh bắt cuối cùng trong đời và ba ngày sau thì qua đời. Do vẫn xa lánh trường phái toán học ở Paris và ít được nhắc nhở tới một cách xứng đáng, bởi những người thường trao đổi thư từ với ông vốn đã không mấy hài lòng, nên những phát minh của Fermat có nguy cơ vĩnh viễn sẽ bị rơi vào quên lãng. May thay, con trai trưởng của Fermat là Clément-Samuel, người đã đánh giá được ý nghĩa những nghiên cứu nghiệp dư của cha mình, đã quyết định không để cho những phát minh của cha mình bị thất lạc. Chính nhờ những nỗ lực của ông mà chúng ta biết được một số những đột phá xuất sắc của Fermat trong lý thuyết số. Đặc biệt, nếu không có Clément-Samuel thì câu đố được biết tới dưới cái tên Định lý cuối cùng của Fermat sẽ vĩnh viễn bị chôn vùi cùng với tác giả của nó.

Clément-Samuel đã dành suốt năm năm trời để thu thập những ghi chép cũng như thư từ của cha ông và xem xét những ghi chú vội vàng bên lề của cuốn *Số học*. Ghi chú bên lề liên quan tới Định lý cuối cùng của Fermat chỉ là một trong số nhiều tư tưởng gây cảm hứng nhất được ghi vội vàng và Clément-Samuel có sáng kiến cho công bố những chú giải đó trong lần xuất bản đặc biệt này. Và thế là năm 1670, tại Toulouse, cuốn sách *Số học* của Diophantus cùng với những ghi chú của P. de Fermat đã ra đời. Cùng với bản gốc bằng tiếng Hy Lạp và bản dịch ra tiếng La tinh của Bachet còn có 48 ghi chú của Fermat. Ghi chú thứ hai (xem Hình 6) chính là ghi chú mà sau này được biết dưới cái tên Định lý cuối cùng của Fermat.

Khi những ghi chú của Fermat tới được công chúng, người ta mới thấy rõ rằng những bức thư mà Fermat gửi cho các đồng nghiệp của mình chỉ đơn thuần là những mẩu vụn vặt so với kho tàng những phát minh của ông. Những ghi chú cá nhân của ông chứa đựng cả một loạt những định lý. Tuy nhiên, những định lý này hoặc không kèm theo một sự giải thích nào cả hoặc chỉ có sự gợi ý khá mơ hồ về chứng minh ở phía sau nó. Fermat chỉ để lại những đường nét sơ lược của quá trình suy luận đủ để chọc tức và đủ để các nhà toán học tin rằng quả thật ông đã có những chứng minh, nhưng việc thực hiện một cách chi tiết thì ông bỏ lại như một thách thức để họ tự làm lấy.

Leonhard Euler, một trong số những nhà toán học vĩ đại nhất của thế kỷ XVIII, đã thử chứng minh một trong số những ghi chú tao nhã nhất của Fermat, đó là một định lý liên quan tới các số nguyên tố.

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& observationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinae Analyticae inventum novum, collectum
ex variis eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSAE,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Bìa trước của cuốn Số học do Clément-Samuel xuất bản năm 1670, có in những ghi chú bên lề của Fermat.

Arithmeticorum Liber II. 61

IN QVAESTIONEM VII.

QVAESTIO VIII.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

QVAESTIO IX.

Hình 6.
Trang có chứa ghi chú nổi tiếng của Fermat.

Số nguyên tố là số không có các ước số, nghĩa là số này không chia hết cho bất kỳ số nào khác, trừ 1 và chính nó. Ví dụ, 13 là số nguyên tố, nhưng 14 thì không, 13 không chia hết cho số nào, còn 14 thì chia hết cho 2 và 7. Tất cả các số nguyên tố được chia làm hai nhóm: loại có thể biểu diễn dưới dạng 4n + 1 và loại có dạng 4n - 1, trong đó n là một số nguyên nào đó. Ví dụ, số 13 thuộc nhóm thứ nhất ($13 = 4 \times 3 + 1$), trong khi đó 19 thuộc nhóm thứ hai ($4 \times 5 - 1$). Định lý về số nguyên tố của Fermat phát biểu rằng: các số nguyên tố thuộc nhóm thứ nhất luôn là tổng của hai số bình phương ($13 = 2^2 + 3^2$), trong khi nhóm thứ hai thì không thể viết dưới dạng như vậy ($19 = ?^2 + ?^2$). Tính chất này của các số nguyên tố nhìn thật đơn giản, nhưng chứng minh điều đó đúng cho mọi số nguyên tố thì lại cực kỳ khó. Đối với Fermat thì đây chỉ là một trong nhiều chứng minh của riêng ông. Thách thức đối với Euler là phải phát minh lại chứng minh của Fermat. Cuối cùng, vào năm 1749, sau 6 năm làm việc và cũng gần một thế kỷ từ khi Fermat qua đời, Euler đã thành công khi chứng minh được định lý về các số nguyên tố đó.

Phạm vi các định lý của Fermat trải rộng từ các định lý cơ bản tới những định lý chỉ đơn thuần có tính chất giải trí. Các nhà toán học xếp hạng tầm quan trọng của các định lý tùy theo mức độ tác động của nó đối với phần còn lại của toán học. Trước hết, một định lý được xem là quan trọng nếu như nó là một chân lý phổ quát, nghĩa là nó có thể áp dụng cho cả một nhóm các con số. Trong trường hợp định lý về các số nguyên tố, nó đúng không chỉ với một vài số mà còn đúng cho tất cả các số nguyên tố. Thứ hai, các định lý phải phát hiện được một chân lý sâu xa nào đó về mối quan hệ giữa các con số. Một định lý có thể là cầu nhảy để sinh ra cả một loạt những định lý khác và thậm chí nó có thể kích thích sự phát triển của cả một ngành toán học mới. Cuối cùng, một định lý là quan trọng, nếu như toàn bộ một lĩnh vực nghiên cứu có thể bị cản trở do thiếu một mắt xích logic đó. Nhiều nhà toán học đã thức trắng đêm khi biết rằng họ có thể đạt tới một kết quả quan trọng nếu như họ chỉ cần thiết lập được một khâu còn thiếu trong chuỗi những lập luận logic của họ.

Vì các nhà toán học dùng các định lý như những bậc thang để đi tới những kết quả khác, nên ta phải chứng minh từng định lý một của Fermat. Không phải bởi vì Fermat đã tuyên bố ông đã có những chứng minh mà chúng ta có thể tin hoàn toàn được. Trước khi được đem ra sử dụng, mỗi một định lý đều cần phải được chứng minh một cách hết sức chặt chẽ, vì nếu không có thể sẽ gây ra những hậu quả vô cùng nghiêm trọng. Ví dụ, hãy tưởng tượng các nhà toán học chấp nhận một trong số những định lý của Fermat. Khi đó nó sẽ được công nhận như một yếu tố trong cả loạt những chứng minh ở quy mô rộng lớn hơn. Rồi những chứng minh lớn hơn này lại là nền tảng để đưa vào những chứng minh còn lớn hơn nữa và cứ như vậy... Rốt cuộc, hàng trăm định lý dựa vào tính đúng đắn của một định lý ban đầu còn chưa được chứng minh. Nhưng, điều gì sẽ xảy ra nếu như Fermat đã phạm sai lầm và định lý chưa được chứng minh đó hóa ra lại sai? Khi đó, toàn bộ các định lý khác dựa trên nó cũng sẽ sai và cả một lĩnh vực rộng lớn của toán học sẽ sụp đổ hoàn toàn. Các định lý là nền tảng của toán học, bởi vì một khi tính đúng đắn của chúng đã được xác lập, thì những định lý khác có thể được xây dựng an toàn lên trên chúng. Những ý tưởng còn chưa có cơ sở thì chúng chỉ được gọi là những giả thuyết hoặc những phỏng đoán. Bất cứ một suy luận logic nào dựa trên các giả thuyết thì bản thân nó cũng chỉ là một giả thuyết mà thôi.

Fermat nói rằng ông đã có trong tay chứng minh cho mỗi nhận xét của ông, vì vậy đối với ông chúng đều là các định lý. Tuy nhiên, chừng nào mà các nhà toán học còn chưa phát hiện lại được những chứng minh đó thì những nhận xét ấy chỉ được coi như những giả thuyết. Do đó, trong hơn ba trăm năm trở lại đây, Định lý cuối cùng của Fermat lẽ ra phải được gọi một cách chính xác là Giả thuyết cuối cùng của Fermat.

Nhiều thế kỷ đã trôi qua, tất cả những nhận xét khác của Fermat đều đã được chứng minh, còn Định lý cuối cùng của Fermat thì kiên quyết không chịu đầu hàng một cách dễ dàng như vậy. Sở dĩ định lý này được gọi là "cuối cùng" bởi vì nó là nhận xét cuối cùng của Fermat còn cần phải chứng minh. Suốt ba thế kỷ, những nỗ lực tìm kiếm chứng minh đều bị thất bại và điều này làm cho nó nổi tiếng là một câu đố khó giải nhất của toán học. Thực ra thì Định lý cuối cùng của Fermat, ít nhất là cho tới tận rất gần đây, dường như còn chưa đạt được một số tiêu chuẩn, chẳng hạn có vẻ như việc chứng minh được nó không dẫn tới một điều gì thật sâu sắc lắm, nó cũng không cho một sự hiểu biết gì sâu hơn về các con số cũng như không giúp gì cho việc chứng minh các giả thuyết khác.

Nói một cách ngắn gọn, Định lý cuối cùng của Fermat trở nên nổi tiếng chỉ là do sự khó khăn ghê gớm của việc chứng minh nó. Thêm vào đó còn có sự kích thích do lời tuyên bố của ông Hoàng Nghiệp dư nói rằng ông đã chứng minh được định lý đó, trong khi nhiều thế hệ các nhà toán học chuyên nghiệp đi sau đều đã bị thất bại ê chề. Mấy dòng ghi chú bằng tay bên lề cuốn Số học được xem như lời thách thức đối với toàn thế giới. Fermat đã chứng minh được Định lý cuối cùng: vấn đề là liệu có nhà toán học nào đủ xuất sắc để sánh nổi với ông không?

Nhà toán học nổi tiếng người Anh, G.H. Hardy, vốn là một người có óc hài hước kỳ quặc. Thách thức của ông được thể hiện dưới dạng một hợp đồng bảo hiểm giúp ông tránh được nỗi sợ hãi khi phải đi tàu thủy. Nếu buộc phải vượt đại dương thì việc đầu tiên ông làm là gửi cho bạn đồng nghiệp một bức điện tín nói rằng:

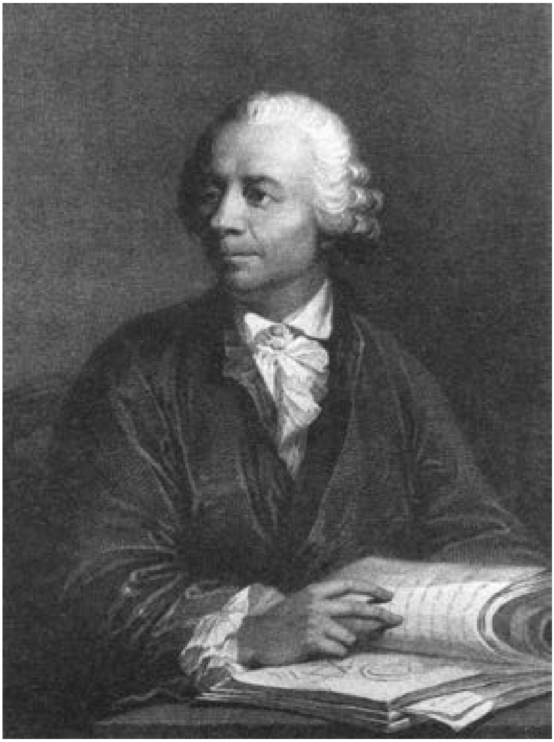
Giả thuyết Riemann đã được chứng minh stop
Mọi chi tiết sẽ nói sau khi trở về stop

Giả thuyết Riemann là một bài toán đã làm đau đầu các nhà toán học từ thế kỷ XIX. Chúa không bao giờ để cho ông bị chìm tàu vì nếu vậy Người sẽ để lại cho các nhà toán học một bóng ma thứ hai cũng ám ảnh khủng khiếp không kém gì giả thuyết Fermat.

Định lý cuối cùng của Fermat là một bài toán cực kỳ khó, nhưng nó lại được phát biểu dưới dạng mà bất kỳ một học sinh trung học nào cũng có thể hiểu được. Không có một bài toán nào trong vật lý, hóa học hay sinh học được phát biểu một cách đơn giản, rõ ràng mà lại chưa tìm được lời giải trong một thời gian rất dài như vậy. Trong cuốn sách *Bài toán cuối cùng*, E.T Bell đã viết rằng có lẽ nền văn minh của chúng ta cáo chung trước khi bài toán này có thể tìm ra lời giải. Chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat đã trở thành một phần thưởng có giá trị nhất trong lý thuyết số và cũng sẽ không có gì ngạc nhiên nếu như nó dẫn tới một trong những giai đoạn hấp dẫn nhất trong lịch sử toán học. Việc tìm kiếm chứng minh cho Định lý cuối cùng của Fermat đã cuốn hút những bộ óc vĩ đại nhất hành tinh, đã đặt ra những giải thưởng rất lớn.

Câu đố này đã vượt khỏi thế giới toán học, để bước vào thế giới văn học năm 1958. Trong một tuyển tập văn học với tựa đề *Thỏa ước với Quỷ* có truyện ngắn *"Con quỷ và Simon Flagg"* của Arthur Poges. Trong truyện ngắn này con Quỷ có đề nghị Simon Flagg đặt cho nó một câu hỏi. Nếu con Quỷ trả lời được trong vòng 24 giờ thì nó sẽ lấy đi linh hồn của Simon, còn nếu nó đầu hàng thì nó sẽ trả cho Simon 100.000 đôla. Simon đã đặt cho con Quỷ câu hỏi: "Định lý cuối cùng của Fermat có đúng không?" Nghe xong, con Quỷ biến mất và bay vụt đi khắp Vũ trụ để tiếp thu tất cả những tri thức toán học đã từng được sáng tạo ra. Ngày hôm sau con Quỷ quay trở lại và thú nhận đã thất bại:

"Simon, ngươi đã thắng", con Quỷ buồn rầu nói và nhìn Simon với con mắt đầy thán phục. "Ngay cả ta, ta cũng không có đủ kiến thức toán học để trong một thời gian ngắn như thế có thể giải đáp được một bài toán khó như vậy. Càng nghiên cứu sâu nó càng rắc rối hơn... Chà! Ngươi có biết" - Con Quỷ tâm sự - "ngay cả những nhà toán học giỏi nhất trên các hành tinh khác, họ còn uyên bác hơn những nhà toán học của các ngươi nhiều, cũng không giải nổi câu đố đó không? Thì đấy, một gã trên sao Thổ nhìn giống như một cây nấm trên cà kheo, gã có thể giải nhẩm các phương trình vi phân đạo hàm riêng, mà cũng phải đầu hàng đó thôi."



Leonhard Euler

III.
SỰ TỦI HỔ CỦA TOÁN HỌC

> Toán học không phải là cuộc hành quân dò dẫm theo một xa lộ vắng vẻ, mà là cuộc phiêu lưu vào những miền hoang vu xa lạ, nơi mà những nhà thám hiểm thường bị lạc đường. Cần phải chỉ cho các nhà lịch sử thấy rằng mặc dù các tấm bản đồ đã được lập ra, nhưng các nhà thám hiểm đích thực thường lại đi theo những lối khác.
>
> W.S. ANGLIN

"Từ lần đầu tiên bắt gặp Định lý cuối cùng của Fermat vào tuổi niên thiếu, nó đã trở thành niềm đam mê lớn nhất của đời tôi", Andrew Wiles nhớ lại và trong giọng nói ngập ngừng của ông lộ rõ sự xúc động đặc biệt. "Tôi đã tìm ra bài toán này, một bài toán mà trong suốt ba trăm năm chưa ai giải được. Tôi không nghĩ rằng có nhiều bạn ở trường mê toán nên tôi không trao đổi với họ. Nhưng tôi có một thầy giáo đã từng nghiên cứu toán học và ông đã cho tôi một quyển sách về lý thuyết số. Tôi đã tìm thấy trong đó một số chỉ dẫn về cách thức công phá bài toán. Để bắt đầu, tôi xuất phát từ ý nghĩ rằng Fermat biết về toán hơn tôi không nhiều lắm, nên tôi cố gắng tìm lại lời giải của ông bằng cách dùng những phương pháp mà có lẽ ông đã sử dụng".

Wiles hồi đó còn là một cậu bé hoàn toàn thơ ngây và nhiều khát vọng, cậu đã nhìn thấy cơ may thành công ở chỗ mà nhiều thế hệ các nhà toán học đã thất bại. Đối với những người khác thì đây có thể là một ước mơ liều lĩnh, nhưng cậu bé Wiles đã nghĩ rất đúng rằng, cậu, một học sinh ở thế kỷ XX, không thể biết về toán học ít hơn Fermat, một thiên tài ở thế kỷ XVII được. Biết đâu với sự ngây thơ trong trắng của mình, cậu sẽ mò ra phép chứng minh mà những bộ óc khác có nhiều kinh nghiệm hơn đã không nhìn thấy.

Mặc dù với sự nhiệt tình và hăng hái như vậy, nhưng tất cả những nỗ lực của cậu đều kết thúc thất bại. Vắt óc và đào bới hết các sách giáo khoa của nhà trường cũng chẳng thu lượm được gì. Sau một năm thất bại, cậu bèn thay đổi chiến thuật và quyết định rằng trước hết phải học được điều gì đó từ thất bại của các nhà toán học đi trước nổi tiếng hơn. "Đó là một huyền thoại đầy tính lãng mạn gắn liền với Định lý cuối cùng của Fermat. Nhiều người đã bị nó ám ảnh, và càng nhiều nhà toán học vĩ đại trong quá khứ thử giải nó nhưng đều thất bại, thì sự thách thức của nó càng hóc búa và nó lại càng trở nên bí ẩn hơn. Nhiều nhà toán học ở thế kỷ XVIII và XIX đã thử tiếp cận nó theo nhiều cách khác nhau, và tôi, một cậu bé 10 tuổi, đã quyết định phải học những phương pháp đó và cố gắng hiểu được những điều mà họ đã làm".

Cậu bé Wiles đã xem xét cách tiếp cận của tất cả những ai đã có ý định nghiêm túc chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Cậu bắt đầu từ nhà toán học có sức sáng tạo dồi dào nhất trong lịch sử và cũng là người đầu tiên đột phá trong cuộc chiến chống lại Fermat.

Người khổng lồ trong toán học

Sáng tạo toán học là một quá trình trải nghiệm đầy cam go và bí ẩn. Thường thì đối tượng cần chứng minh đã rõ ràng nhưng con đường đi tới thì phủ đầy sương mù, nhà toán học phải mò mẫm thông qua những tính toán, đồng thời cũng rất lo sợ rằng mỗi bước đi của mình có thể lạc bước sang một hướng hoàn toàn sai lầm. Ngoài ra, còn có nỗi sợ rằng chẳng có con đường nào tới đích hết. Một nhà toán học có thể tin rằng một mệnh đề là đúng và bỏ ra nhiều năm để chứng minh nó thực sự là đúng, nhưng rồi kết cục hóa ra nó lại là sai. Và như vậy, nhà toán học quả thật đã định chứng minh một điều bất khả.

Trong toàn bộ lịch sử toán học, chỉ có một số ít ỏi các nhà toán học là đã thoát ra được sự tự nghi ngờ, một cảm giác đã làm chùn bước các nhà toán học khác. Có lẽ, ví dụ nổi bật nhất về một nhà toán học như vậy là Leonhard Euler, một thiên tài thế kỷ XVIII và cũng là người đầu tiên thử chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Euler có một trực giác ghê gớm và một trí nhớ siêu phàm tới mức người ta nói rằng ông có thể thực hiện những khối lượng tính toán rất lớn trong đầu mà không cần đặt bút viết ra trên giấy. Khắp châu Âu người ta đều gọi ông là "sự hiện thân của giải tích" và viện sĩ Viện Hàn lâm Pháp Francois Arago đã từng nói: "Euler tính toán như là người ta thở, không hề nặng nhọc gì, hoặc như những con chim ưng nương theo gió vậy."

Leonhard Euler sinh năm 1707 ở Basle, là con trai của một mục sư đạo Calvin tên là Paul Euler. Mặc dù Leonhard tỏ ra có tài năng thiên bẩm về toán học, nhưng cha ông lại quyết định rằng ông phải theo học thần học và theo đuổi sự nghiệp của một cha đạo. Leonhard ngoan ngoãn tuân theo, ông đã theo học thần học và tiếng Do thái ở trường Đại học Basle.

Thật may mắn cho Euler là Basle lại là thành phố quê hương của dòng họ Bernoulli nổi tiếng. Những người thuộc dòng họ này đều có quyền tuyên bố rằng gia đình họ là gia đình toán học nhất, vì chỉ trong ba thế hệ họ sản sinh ra tám bộ óc xuất sắc nhất châu Âu. Một số người cho rằng gia đình Bernoulli đối với toán học cũng như gia đình Bach đối với âm nhạc. Sự nổi tiếng của họ đã lan truyền ra ngoài giới hạn của cộng đồng toán học và giai thoại đặc biệt sau đây đã chứng minh điều đó. Một lần Daniel Bernoulli đi chu du châu Âu và bắt chuyện với một người nước ngoài. Sau một lúc, ông khiêm tốn tự giới thiệu mình: "Tôi là Daniel Bernoulli". "Còn tôi", người kia mỉa mai đáp lại, "tôi là Isaac Newton". Daniel rất thích kể lại câu chuyện đó, ông xem nó như một lời khen chân thành nhất mà ông đã từng nhận được.

Daniel và Nikolaus Bernoulli đều là bạn thân của Leonhard Euler, và họ nhận thấy rằng nhà toán học xuất sắc nhất đang dần biến thành nhà thần học tầm thường nhất. Họ đã van nài Paul Euler và yêu cầu ông hãy để cho Leonhard thay chiếc áo thầy tu bằng những con số. Vả lại, Euler cha đã từng là học trò của Bernoulli cha, tức Jakob Bernoulli, và rất kính trọng gia đình này. Cuối cùng ông cũng miễn cưỡng chấp nhận rằng đứa con trai ông sinh ra là để làm toán chứ không phải để giảng đạo.

Chẳng bao lâu sau Leonhard Euler đã rời Thụy Sĩ để tới các Cung đình Berlin và St. Peterburg, nơi ông đã sống phần lớn những năm tháng sáng tạo nhất của cuộc đời mình. Vào thời đại của Fermat, các nhà toán học được xem như những người chơi trò tung hứng với các con số, tới thế kỷ XVIII thì họ được đối xử như những người giải toán chuyên nghiệp. Nền văn hóa các con số đã thay đổi một cách ghê gớm, điều đó một phần là nhờ Sir Isaac Newton và những tính toán khoa học của ông.

Newton cho rằng các nhà toán học đã lãng phí thời gian của mình để thách đố nhau những câu đố vô bổ. Thay vì thế, ông áp dụng toán học cho thế giới vật lý và tính toán đủ thứ, từ quỹ đạo của các hành tinh cho đến đường bay của các viên đạn đại bác. Vào năm Newton qua đời, tức là năm 1727, ở châu Âu đang diễn ra cuộc cách mạng khoa học và cũng trong năm đó Euler đã công bố bài báo khoa học đầu tiên của mình. Mặc dù trong đó chứa đựng những kết quả toán học rất đẹp và mới mẻ, nhưng trước hết là nó nhằm mô tả nghiệm của một bài toán kỹ thuật có liên quan tới việc dựng cột buồm của các con tàu.

Thời kỳ đó các cường quốc châu Âu không quan tâm tới việc sử dụng toán học để nghiên cứu các khái niệm trừu tượng và xa lạ, thay vì thế, họ muốn khai thác toán học để giải các bài toán thực tiễn, và họ tranh nhau sử dụng những bộ óc trác việt nhất. Euler bắt đầu sự nghiệp của mình với Nga Hoàng, trước khi ông được Frederik Đại đế của nước Phổ mời tới làm việc ở Viện Hàn lâm Berlin. Nhưng rồi cuối cùng ông lại quay về nước Nga, dưới sự trị vì của Nữ hoàng Catherine, nơi ông đã sống những năm tháng cuối cùng của cuộc đời mình. Trong suốt cuộc đời sáng tạo của mình, ông đã giải được vô số bài toán, từ các bài toán về hàng hải cho tới các bài toán tài chính, từ những bài toán âm học cho tới những bài toán về thủy lợi. Tuy nhiên, những nghiên cứu mang tính thực tiễn này không làm mòn đi khả năng toán học của Euler. Thay vì thế, việc giải được một bài toán mới lại khích lệ ông sáng tạo ra các phương pháp toán học mới và tài tình hơn. Niềm đam mê hoạt động trí óc đã thôi thúc ông có khi viết được một vài bài báo chỉ trong một ngày. Người ta kể lại rằng chỉ giữa lần tiếp món thứ nhất và món thứ hai trong một bữa ăn tối là ông đã có thể tiến hành xong một tính toán hoàn chỉnh đáng được công bố. Ông không để phí một giây phút nào, ngay cả khi đang ẵm con trong một tay Euler cũng có thể dùng tay kia phác thảo ra một chứng minh toán học nào đó.

Một trong những thành tựu vĩ đại nhất của Euler, đó là sự phát triển phương pháp thuật giải. Mục đích các thuật giải của Euler là nhằm giải các bài toán dường như là không thể giải được. Trong số đó là bài toán tiên đoán các pha của Mặt trăng trong tương lai xa với độ chính xác cao. Đây là những thông tin cần thiết để lập ra các bảng có tầm quan trọng sống còn trong ngành hàng hải. Newton đã chứng tỏ được rằng tiên đoán quỹ đạo của một thiên thể quay quanh một thiên thể khác thì tương đối dễ, nhưng trong trường hợp Mặt trăng thì tình hình không đơn giản như vậy. Mặt trăng quay quanh Trái đất, nhưng còn có một vật thứ ba, đó là Mặt trời, đã làm cho tình hình phức tạp lên rất nhiều. Trong khi Trái đất và Mặt trăng hút nhau, thì Mặt trời làm thay đổi vị trí của Trái đất và do đó cũng có ảnh hưởng đến quỹ đạo của Mặt trăng. Người ta có thể thiết lập các phương trình để xác định tác dụng qua lại giữa hai vật bất kỳ, nhưng các nhà toán học ở thế kỷ VIII không sao gộp thêm được vật thứ ba vào những tính toán của họ. Thậm chí ngày hôm nay, người ta cũng không thể tìm được nghiệm chính xác của "bài toán ba vật".

Euler nhận thấy rằng thủy thủ không cần phải biết pha của Mặt trăng một cách tuyệt đối chính xác, mà chỉ cần với độ chính xác đủ để xác định vị trí của bản thân họ với sai số trong khoảng vài hải lý là được. Do vậy, Euler đã phát triển các bước để tìm ra nghiệm không thật hoàn hảo nhưng cũng đủ độ chính xác cần thiết. Các bước này được gọi là thuật giải, nó vận hành trước hết bằng cách nhận được một nghiệm thô, sau đó lại đưa nghiệm thô này trở lại thuật giải để nhận được một nghiệm mới tinh hơn. Rồi nghiệm tinh này được đưa trở lại thuật giải để nhận được nghiệm mới còn tinh hơn nữa và cứ tiếp tục làm như vậy. Sau khoảng một trăm lần lặp như thế, Euler đã có thể cung cấp thông tin về vị trí Mặt trăng với độ chính xác đủ dùng cho những mục đích hàng hải. Ông đã trao thuật giải này cho Bộ Hàng hải Anh quốc và đáp lại họ đã trao cho ông giải thưởng trị giá 300 Bảng Anh.

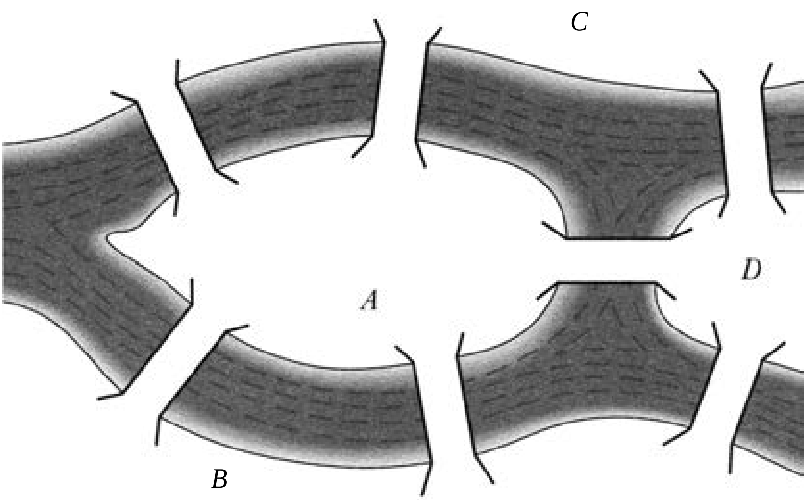
Euler đã nổi tiếng là người có thể giải được bất kỳ bài toán nào được đặt ra, một tài năng mà tiếng tăm đã vượt ra ngoài ranh giới của khoa học. Trong thời gian phục vụ tại Cung đình của Nữ hoàng Catherine, Euler có gặp nhà triết học vĩ đại người Pháp Denis Diderot. Diderot là một người vô thần nhiệt thành và ông muốn dùng những ngày lưu lại ở đây để biến những người Nga cũng thành vô thần như ông. Điều này đã làm cho Catherine tức giận, bà đề nghị Euler hãy làm cho ông người Pháp vô thần này dừng ngay chuyện đó lại.

Sau khi suy nghĩ một lát, ông tuyên bố rằng ông đã có một chứng minh đại số về sự tồn tại của Chúa. Nữ Hoàng Catherine bèn cho mời Euler và Diderot tới Cung đình và cùng triều thần nghe cuộc tranh luận về thần học này. Euler đứng dậy trước cử tọa và tuyên bố:

"Thưa ngài, $\frac{a+b^n}{n}=x$, suy ra Chúa tồn tại, đó là điều cần chứng minh!"

Vốn mù mờ về đại số, Diderot không thể bác lại nhà toán học vĩ đại nhất châu Âu và đành lặng lẽ bỏ về. Bị xỉ nhục, ông lập tức rời St. Petersburg trở về Paris. Sau khi Diderot ra đi, Euler vẫn thích thú trở lại đề tài thần học, ông đã cho công bố vài chứng minh chế nhạo khác về sự tồn tại của Chúa và linh hồn con người.

Một bài toán nghiêm túc hơn cũng đã phải cầu viện tới trí tuệ trác việt của Euler là bài toán liên quan tới thành phố Konigsberg của nước Phổ, mà sau này được gọi là thành phố Kaliningrad của nước Nga. Thành phố này được xây dựng trên hai bờ con sông Pregel và gồm bốn khu tách biệt nhau, nhưng được nối với nhau bằng 7 cây cầu (xem hình 7). Một số cư dân có óc tò mò hơn đã băn khoăn tự

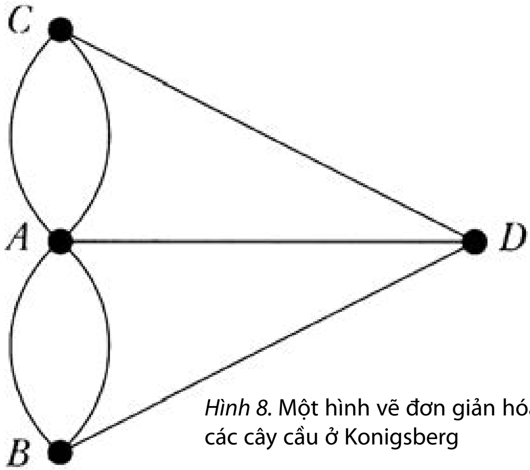


Hình 7. Sông Pregel chia thành phố Konigsberg thành bốn khu tách biệt A, B, C và D. Bảy cây cầu nối các khu khác nhau của thành phố và ở đây đã lưu truyền một câu đố nói rằng: liệu có thể đi khắp thành phố mà chỉ đi qua mỗi chiếc cầu một và chỉ một lần hay không.

hỏi liệu có thể vẽ một hành trình đi qua tất cả bảy cây cầu mà không phải đi qua một cây cầu nào nhiều hơn một lần hay không. Họ đã vẽ đủ các cách đi khác nhau nhưng kết cục đều dẫn tới thất bại. Euler cũng không tìm ra cách đi nào, nhưng ông lại giải thích được tại sao không thể có hành trình nào thỏa mãn yêu cầu của câu đố.

Bắt đầu từ tấm bản đồ thành phố, Euler đã đơn giản hóa nó thành một hình vẽ, trong đó các khu của thành phố được qui về các điểm, còn các cây cầu thành các đoạn thẳng như trên hình 8. Sau đó ông lập luận rằng nói chung, để thực hiện được một hành trình theo yêu cầu (tức là đi qua mỗi cầu chỉ một lần duy nhất) thì một điểm phải nối với một số chẵn đường. Sở dĩ như vậy là bởi vì ở giữa hành trình, khi lữ khách đi qua một khu nào đó, người đó sẽ phải đi vào qua một cầu và đi ra qua một cây cầu khác. Chỉ có hai ngoại lệ duy nhất cho quy tắc đó: khi lữ khách bắt đầu và kết thúc hành trình. Vào lúc xuất phát, lữ khách rời một khu nào đó và chỉ cần một cây cầu duy nhất để đi ra và ở cuối hành trình, lữ khách đi tới một khu nào đó và cũng chỉ cần một cây cầu để đi vào. Nếu hành trình bắt đầu và kết thúc ở hai khu khác nhau, thì hai khu đó được phép có một số lẻ cây cầu. Nhưng nếu hành trình bắt đầu và kết thúc ở cùng một khu thì điểm biểu diễn khu đó, giống như tất cả các điểm khác, cần phải có một số chẵn cây cầu.

Như vậy, nói một cách tổng quát, Euler kết luận, đối với bất kỳ một mạng cầu nào, chỉ có thể thực hiện được hành trình đi qua mỗi cây cầu chỉ một lần, nếu như tất cả các khu đều có một số chẵn cây cầu, hoặc có đúng hai khu có một số lẻ cây cầu. Trong trường hợp của thành phố Konigsberg có tổng cộng bốn khu và tất cả các khu đều nối với một số lẻ cây cầu, cụ thể là ba điểm có ba cầu và một



Hình 8. Một hình vẽ đơn giản hóa các cây cầu ở Konigsberg

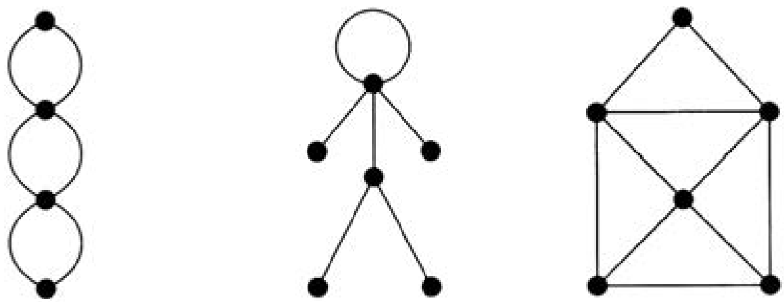
điểm có tới năm cầu. Như vậy là Euler đã giải thích được tại sao không thể đi qua mỗi cây cầu ở Konigsberg chỉ một lần, hơn thế nữa ông còn đưa ra được quy tắc áp dụng cho một mạng bất kỳ các cây cầu trong một thành phố nào trên thế giới. Lập luận ông đưa ra thật đơn giản và có lẽ đó cũng là loại bài toán logic mà Euler thường nháp trước bữa ăn.

Câu đố về những chiếc cầu Konigsberg là loại bài toán mà trong toán học ứng dụng thường được gọi là bài toán mạng, nó đã khích lệ Euler khảo sát những mạng còn trừu tượng hơn nữa. Và ông đã đi tới phát hiện ra một chân lý cơ bản của tất cả các mạng, đó là công thức mạng, một công thức mà ông có thể chứng minh chỉ sau ít bước suy luận. Công thức mạng cho thấy mối quan hệ vĩnh hằng giữa ba tính chất đặc trưng cho mạng:

$$V + R - L = 1,$$

trong đó V *là số đỉnh trong mạng*, L *là số đường trong mạng* và R *là số vùng* (tức số miền được bao kín) *trong mạng.*

Như vậy, Euler đã khẳng định rằng đối với một mạng bất kỳ, nếu người ta cộng số đỉnh với số vùng rồi trừ đi số đường thì kết quả sẽ luôn luôn bằng 1. Ví dụ, tất cả các mạng trên hình 9 đều tuân theo quy tắc đó.



Số đỉnh	=	4	Số đỉnh	=	6	Số đỉnh	=	6
Số vùng	=	3	Số vùng	=	1	Số vùng	=	5
Số đường	=	6	Số đường	=	6	Số đường	=	10

Hình 9. Tất cả các mạng đều tuân theo quy tắc mạng của Euler

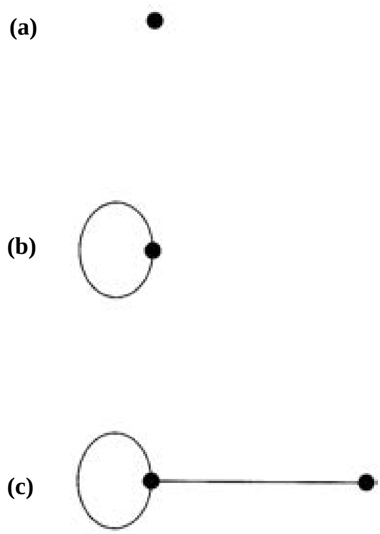
Có thể hình dung việc kiểm tra công thức mạng cho một loạt các mạng khác nhau và nếu mỗi trường hợp kiểm tra đều cho kết quả đúng thì ta dễ có xu hướng coi rằng công thức đó là đúng đối với tất cả các mạng. Mặc dù điều đó có thể là đủ bằng chứng đối với một lý thuyết khoa học, nhưng nó chưa đủ để được xem là một định lý toán học. Cách duy nhất để chứng tỏ rằng công thức này đúng với mọi mạng khả dĩ là phải xây dựng được một hệ thống suy diễn chặt chẽ đúng như Euler đã làm.

Euler bắt đầu bằng việc xét mạng đơn giản nhất, tức là mạng chỉ có một đỉnh như minh họa trên hình 10(a). Đối với mạng này, công thức trên hiển nhiên là đúng: có một đỉnh và không có một vùng hay đường nào, do đó:

$$V + R - L = 1 + 0 - 0 = 1$$

Sau đó Euler xem xét điều gì sẽ xảy ra khi ta thêm một cái gì đó vào mạng đơn giản nhất ấy. Bất cứ một sự mở rộng nào đối với một đỉnh duy nhất đòi hỏi phải thêm vào một đường. Đường này hoặc là nối đỉnh đang tồn tại với chính nó hoặc là nối đỉnh đang tồn tại với một đỉnh mới.

Trước hết, chúng ta hãy xét việc nối đỉnh đã có với chính nó bằng cách thêm vào một đường. Như ta thấy trên hình 10(b), khi đường



Hình 10. Euler đã chứng minh công thức mạng của mình bằng cách chứng minh rằng nó đúng với mạng đơn giản nhất, và sau đó chứng minh rằng công thức này vẫn còn đúng đối với bất cứ sự mở rộng nào được thêm vào mạng một đỉnh duy nhất.

này được thêm vào, nó cũng tạo thêm một vùng mới. Do đó, công thức mạng vẫn còn đúng bởi vì vùng mới nảy sinh (+1) sẽ triệt tiêu với đường mới thêm vào (-1). Nếu tiếp tục thêm các đường khác vào mạng theo cách đó, thì công thức mạng vẫn sẽ còn đúng bởi vì mỗi đường mới sẽ lại tạo ra thêm một vùng mới.

Thứ hai, bây giờ chúng ta sẽ xét việc dùng một đường để nối đỉnh đã có với một đỉnh mới, như được minh họa trên hình 10(c). Lại một lần nữa công thức mạng vẫn đúng, bởi vì một đỉnh thêm vào (+1) sẽ triệt tiêu một đường thêm vào (-1). Nếu tiếp tục thêm vào các đường theo cách như vậy, thì công thức mạng cũng vẫn còn đúng bởi vì mỗi đường mới thêm vào sẽ tạo thêm một đỉnh mới.

Đó là tất cả những gì mà Euler cần cho chứng minh của ông. Ông lập luận rằng công thức mạng đã đúng cho mạng đơn giản nhất, chỉ có một đỉnh. Hơn nữa, tất cả các mạng khác dù phức tạp đến mấy cũng đều có thể được xây dựng từ mạng đơn giản nhất đó bằng cách thêm vào mỗi lần một đường. Mỗi lần một đường mới được thêm vào, công thức mạng vẫn còn đúng bởi vì khi đó một đỉnh mới sẽ được thêm vào hoặc một vùng mới được nảy sinh, và điều đó dẫn tới kết quả bù trừ nhau. Như vậy, Euler đã phát triển một phương pháp đơn giản nhưng rất hiệu quả. Ông đã chứng minh công thức cho mạng cơ bản nhất, chỉ có một đỉnh, rồi sau đó chứng minh rằng mọi thao tác làm cho mạng đó phức tạp lên đều bảo toàn được sự đúng đắn của công thức. Do đó công thức là đúng đối với vô số các mạng khả dĩ.

Lần đầu tiên khi Euler gặp bài toán Định lý cuối cùng của Fermat, chắc hẳn ông cũng hy vọng rằng có thể giải nó bằng cách dùng chiến lược tương tự như ở trên. Định lý cuối cùng của Fermat và công thức mạng thuộc hai lĩnh vực rất khác nhau của toán học, nhưng chúng có cùng một điểm chung, đó là cả hai đều nói về một số vô hạn các đối tượng. Công thức mạng nói rằng đối với một số vô hạn các mạng khác nhau, tổng số đỉnh và số vùng luôn luôn lớn hơn số đường một đơn vị. Còn Định lý cuối cùng của Fermat thì khẳng định rằng không có nghiệm nguyên đối với một số vô hạn các phương trình. Cần nhớ lại rằng Fermat chỉ khẳng định không có nghiệm nguyên đối với phương trình:

$x^n + y^n = z^n$ trong đó n là số nguyên bất kỳ lớn hơn 2

Nhưng thực ra phương trình này biểu diễn một tập hợp vô số các phương trình:

$x^3 + y^3 = z^3$

$x^4 + y^4 = z^4$

$x^5 + y^5 = z^5$

$x^6 + y^6 = z^6$

$x^7 + y^7 = z^7$

Euler băn khoăn tự hỏi liệu có thể chứng minh rằng một trong số các phương trình trên không có nghiệm nguyên rồi ngoại suy kết quả cho những phương trình còn lại hay không, theo cách hoàn toàn tương tự như ông đã chứng minh công thức mạng cho tất cả các mạng, bằng cách tổng quát hóa nó từ mạng đơn giản nhất, chỉ gồm có một đỉnh.

Nhiệm vụ mà Euler đặt ra đã có một sự khởi đầu thuận lợi khi ông phát hiện một đầu mối ẩn giấu trong những ghi chú nguệch ngoạc của Fermat. Mặc dù Fermat không viết ra chứng minh đối với Định lý cuối cùng, nhưng ông lại phác ra lời giải đối với trường hợp n = 4 ở đâu đó trong cuốn *Số học* và gộp nó vào chứng minh của một bài toán hoàn toàn khác. Mặc dù đó là một tính toán đầy đủ nhất mà ông đã viết ra trên giấy, nhưng những chi tiết vẫn còn khá mơ hồ và ông kết luận chứng minh bằng cách nói rằng do lề quá hẹp và thiếu thời gian nên ông không thể giải thích đầy đủ hơn được. Mặc dù còn thiếu chi tiết trong phác thảo chứng minh của Fermat, nhưng nó cũng đủ minh họa khá rõ ràng một dạng đặc biệt của phương pháp chứng minh bằng phản chứng, mà người ta gọi là phương pháp giảm vô hạn.

Để chứng minh phương trình $x^4 + y^4 = z^4$ vô nghiệm, Fermat bắt đầu bằng giả thiết rằng nó có một nghiệm giả định là:

$$x = X_1 \quad y = Y_1 z = Z_1$$

Bằng cách khảo sát các tính chất của (X_1, Y_1, Z_1), Fermat có thể chứng minh được rằng nếu nghiệm giả định này tồn tại thì sẽ phải có một nghiệm nhỏ hơn (X_2, Y_2, Z_2). Sau đó bằng cách xem xét nghiệm mới này, Fermat lại chứng minh được rằng phải có một nghiệm (X_3, Y_3, Z_3) còn nhỏ hơn nữa, và cứ như vậy mãi.

Như vậy Fermat đã phát hiện ra một cầu thang đi xuống của các nghiệm, mà về mặt lý thuyết nó sẽ đi xuống mãi mãi, với các nghiệm ngày càng nhỏ hơn. Tuy nhiên, các số x, y, z phải là các số nguyên dương (cũng tức là số tự nhiên) nên cái cầu thang đó không thể đi xuống vô tận được, nhất thiết phải có một nghiệm nhỏ nhất. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ giả thiết ban đầu có nghiệm (X_1, Y_1, Z_1) là sai. Bằng cách dùng phương pháp giảm vô hạn Fermat đã chứng minh được rằng phương trình ($x^4 + y^4 = z^4$) là không có nghiệm nguyên, nếu không các hệ quả rút ra sẽ là vô lý.

Euler đã thử dùng kết quả này như một điểm xuất phát để xây dựng chứng minh tổng quát cho tất cả các phương trình khác. Ngoài việc xây dựng lên tới n = ∞ (vô cực), Euler còn phải xây dựng xuống phía dưới cho trường hợp n = 3 và chính bậc đi xuống duy nhất đó là điều mà ông muốn làm trước tiên. Ngày 4 tháng 8 năm 1753, trong một bức thư gửi cho nhà toán học Christian Goldbach, Euler thông báo rằng ông đã áp dụng phương pháp giảm vô hạn của Fermat và đã chứng minh thành công trường hợp n = 3. Sau một trăm năm, đây là lần đầu tiên có người đã thực hiện thành công được một bước tiến đáp lại sự thách thức của Fermat.

Để mở rộng chứng minh của Fermat trong trường hợp n = 4 sang n = 3, Euler đã phải sử dụng một khái niệm bí ẩn có tên là số ảo, một thực thể đã được các nhà toán học châu Âu phát minh từ thế kỷ XVI. Thật là lạ khi nghĩ rằng những con số mới đã được "phát minh", điều này chủ yếu là do chúng ta đã quá quen thuộc với những con số thường dùng, khiến cho chúng ta quên rằng đã có một thời một số những con số này đã không được biết tới. Các số âm, phân số và các số hữu tỷ, tất thảy đều phải được phát minh và mục đích phát minh ra chúng là để trả lời cho những câu hỏi mà nếu như không có những con số đó, thì sẽ không thể trả lời được.

Lịch sử các con số bắt đầu từ những số đếm đơn giản (1, 2, 3, ...) hay còn gọi là các số tự nhiên. Những con số này hoàn toàn thỏa mãn đối với việc cộng các đại lượng nguyên đơn giản, như các con cừu hay các đồng tiền vàng để nhận được một con số cũng là một đại lượng nguyên. Ngoài phép cộng, một phép tính đơn giản khác là phép nhân cũng được thực hiện với các số nguyên để tạo ra các số nguyên khác. Tuy nhiên, phép chia lại đặt ra một vấn đề khó xử.

Trong khi 8 chia cho 2 bằng 4, thì chúng ta lại tìm thấy rằng 2 chia cho 8 lại bằng 1/4. Kết quả của phép chia thứ hai không phải là một số nguyên mà là một phân số.

Phép chia là một phép tính đơn giản được thực hiện trên các số tự nhiên, nhưng nó đòi hỏi chúng ta phải vượt ra ngoài khuôn khổ các số tự nhiên mới tìm được đáp số. Đối với các nhà toán học, không trả lời được tất cả các câu hỏi, ít nhất về mặt lý thuyết, là điều không thể tưởng tượng nổi, nhất thiết phải có câu trả lời; điều đó được gọi là tính đầy đủ. Có một số câu hỏi liên quan tới các số tự nhiên mà ta sẽ không thể trả lời được nếu như chúng ta không viện tới các phân số. Nói theo cách của các nhà toán học, thì các phân số là cần thiết cho tính đầy đủ.

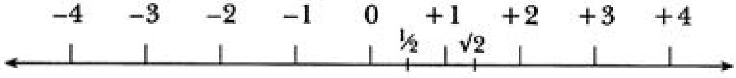
Và cũng chính vì sự cần thiết cho tính đầy đủ mà những người Ấn Độ đã phát minh ra số âm. Họ nhận thấy rằng trong khi 5 trừ cho 3 rõ ràng là bằng 2, nhưng lấy 3 trừ cho 5 lại không đơn giản như vậy. Câu trả lời bây giờ nằm ngoài khuôn khổ của các số tự nhiên, và chỉ có được nếu đưa vào khái niệm số âm. Một số nhà toán học đã không chấp nhận sự mở rộng trừu tượng đó, họ gọi các số âm là các số *"vô lý"* hay *"số bịa"*. Bởi lẽ, theo họ, một người kế toán có thể giữ trong tay một đồng vàng, hoặc thậm chí một nửa đồng tiền vàng, nhưng không thể giữ một đồng tiền âm được.

Người Hy Lạp cũng khao khát tính đầy đủ và điều đó đã dẫn họ tới phát minh ra các số vô tỷ. Trong Chương 2, vấn đề được đặt ra là: Số nào là căn bậc hai của 2? Người Hy Lạp biết rằng số đó xấp xỉ bằng 7/5, nhưng khi họ định tìm ra phân số chính xác để biểu diễn thì họ phát hiện phân số đó không hề tồn tại. Đây là con số không thể biểu diễn bằng một phân số, nhưng loại số mới này cần thiết để trả lời cho một câu hỏi đơn giản: Căn bậc hai của 2 là số nào, đòi hỏi rằng phải có một loại số mới bổ sung vào vương quốc các con số.

Vào thời Phục hưng, các nhà toán học cho rằng họ đã phát minh ra tất cả các con số trong Vũ trụ. Tất cả các con số đều được coi như nằm trên trục số, kéo dài vô hạn về hai phía với số không nằm ở trung tâm, như minh họa trên hình 11. Các số nguyên nằm cách đều nhau dọc theo trục số, trong đó các số dương nằm bên phải số không và trải dài tới dương vô cực, còn các số âm nằm bên trái số không và trải dài tới âm vô cực. Các phân số chiếm các vị trí giữa các số nguyên, còn các số vô tỷ lại kẹp giữa các phân số.

Như vậy, trục số gợi cho ta ý nghĩ rằng tính đầy đủ của nó thế là đã đạt được. Tất cả các con số dường như đã ở đúng vị trí của nó, sẵn sàng trả lời mọi câu hỏi về toán học và trong mọi trường hợp cũng chẳng còn chỗ đâu cho những con số mới. Thế nhưng trong suốt thế kỷ XVI đã có những tiếng sấm rền báo hiệu sự đổi mới. Nhà toán học người Italia Rafaello Bombelli khi nghiên cứu căn bậc hai của các số khác nhau đã vấp phải một câu hỏi không thể trả lời được.

Vấn đề bắt đầu từ câu hỏi: căn bậc hai của 1, tức $\sqrt{1}$ là bao nhiêu? Câu trả lời hiển nhiên là 1, bởi vì $1 \times 1 = 1$. Và câu trả lời ít hiển nhiên hơn là -1. Một số âm nhân với một số âm khác tạo ra một số dương.



Hình 11. Tất cả các con số đều có một vị trí nằm trên trục số, kéo dài vô tận về cả hai phía.

Điều này có nghĩa là (-1) × (-1) = +1. Như vậy, căn bậc hai của +1 vừa là +1 vừa là -1. Việc có nhiều đáp số như vậy là khá tinh tế và sau đó đã đặt ra câu hỏi: thế căn bậc hai của âm một, tức $\sqrt{-1}$ là bao nhiêu?

Đây là vấn đề tưởng như không thể xử lý nổi. Đáp số không thể là +1 mà cũng không thể là -1, bởi vì bình phương hai số đó đều là +1. Không có một ứng viên hiển nhiên nào khác, đồng thời, tính đầy đủ lại đòi hỏi rằng chúng ta phải trả lời được câu hỏi đó.

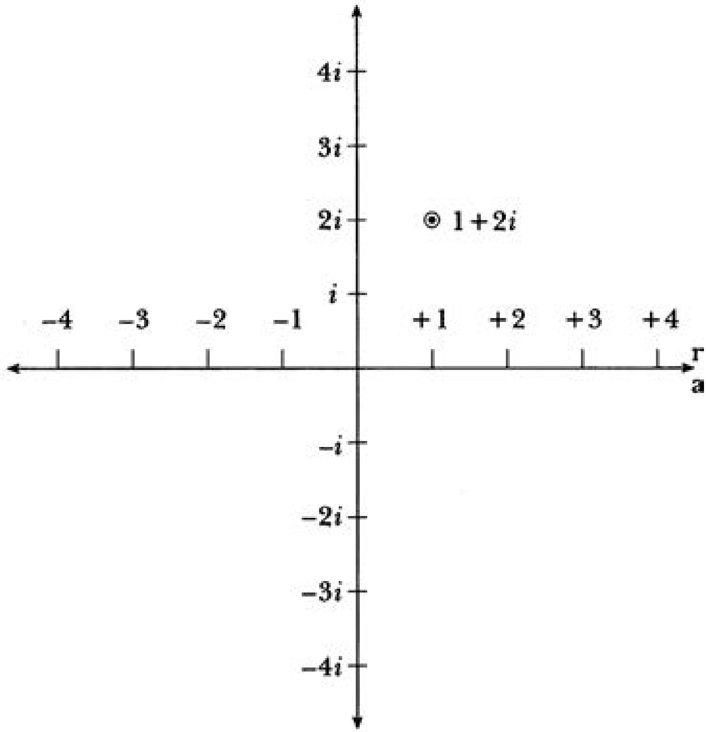
Giải pháp đối với Bombelli là phải tạo ra một số mới, gọi là số ảo và ký hiệu là *i*, được định nghĩa đơn giản là đáp số của câu hỏi: Căn bậc hai của -1 bằng bao nhiêu? Điều đó gây cảm tưởng dường như đây chỉ là một giải pháp né tránh, nhưng sự thật nó hoàn toàn không khác gì cách thức mà người ta đưa các số âm vào. Khi đối mặt với một câu hỏi khác dường như cũng không thể trả lời được, người Ấn Độ đã đơn giản định nghĩa -1 như là đáp số của câu hỏi: Số 0 trừ đi 1 bằng bao nhiêu? Sở dĩ khái niệm -1 dễ dàng được chấp nhận là bởi vì chúng ta đã có kinh nghiệm về khái niệm "nợ", trong khi đó chúng ta không có gì trong thế giới thực tại để hỗ trợ cho các số ảo cả. Nhà toán học người Đức ở thế kỷ XVII Gottfried Leibniz đã mô tả rất hay bản chất lạ lùng của các số ảo như sau: "Số ảo là một sự trợ giúp tuyệt đẹp và kỳ diệu của Chúa, nó là loài lưỡng cư giữa tồn tại và không tồn tại".

Một khi chúng ta đã định nghĩa *i* là căn bậc hai của -1, thì 2i cũng phải tồn tại, bởi vì nó là tổng của *i* và *i* (và nó cũng là căn bậc hai của -4). Tương tự, i/2 cũng phải tồn tại vì đó là kết quả của phép chia của i cho 2. Bằng cách thực hiện những phép tính đơn giản, ta có thể tìm được một số ảo tương ứng với mỗi một số thực. Có những số đếm ảo, số âm ảo, phân số ảo và các số vô tỷ ảo.

Vấn đề đặt ra bây giờ là tất cả các số ảo đó đều không có vị trí trên trục số. Các nhà toán học đã giải quyết cuộc khủng hoảng này bằng cách tạo ra một trục số ảo riêng rẽ đặt vuông góc với trục số thực tại điểm 0, như được minh họa trên hình 12. Các số bây giờ không còn bị giới hạn trên đường thẳng một chiều nữa, mà là chiếm một mặt phẳng hai chiều. Trong khi các số thuần ảo hoặc thuần thực được giới hạn trên hai đường thẳng tương ứng của chúng, thì tổ hợp của các số thực và ảo (ví dụ như 1 + 2i), được gọi là số phức, lại *sống* trên mặt phẳng số.

Điều đặc biệt đáng nói ở đây là có thể dùng các số phức để giải bất cứ một phương trình đại số nào mà ta có thể tưởng tượng ra. Ví dụ, để tính $\sqrt{3+4i}$, ta không cần buộc phải phát minh ra một loại số mới nào nữa, mà có ngay đáp số là 2 +i, một số phức khác. Nói một cách khác, các số ảo dường như là phần tử cuối cùng cần có để làm cho toán học trở nên đầy đủ.

Mặc dù căn bậc hai của các số âm được gọi là số ảo, nhưng các nhà toán học không xem số i là trừu tượng hơn một số âm hay một số tự nhiên. Ngoài ra, các nhà vật lý còn phát hiện rằng các số ảo đã cung cấp cho họ một *ngôn ngữ* cực kỳ thuận tiện để mô tả một số hiện tượng của thế giới thực tại. Với một chút biến báo, các số ảo hóa ra lại là một phương tiện lý tưởng để mô tả chuyển động dao động của các vật như con lắc, chẳng hạn. Chuyển động này, nói theo ngôn ngữ chuyên môn, được gọi là dao động điều hòa, nó có mặt ở khắp nơi trong tự nhiên và như vậy, các số ảo đã trở thành một bộ phận hợp thành của nhiều tính toán vật lý. Ngày hôm nay nhiều kỹ sư điện đã sử dụng số i để phân tích các dòng điện xoay chiều, và các nhà vật lý lý thuyết khi tính những hệ quả



Hình 12. Việc đưa vào trục các số ảo đã biến đường thẳng số thành một mặt phẳng số. Bất kỳ một tổ hợp nào của các số thực và số ảo đều có một vị trí trong mặt phẳng số.

của hàm sóng trong cơ học lượng tử cũng phải dùng tới các lũy thừa của những số ảo.

Các nhà toán học thuần túy cũng khai thác các số ảo, họ dùng chúng để tìm lời giải cho những bài toán mà trước đó không thể công phá nổi. Đúng là các số ảo đã đem lại cho toán học thêm một chiều kích mới, và Euler hy vọng sẽ khai thác bậc tự do có thêm đó để tấn công Định lý cuối cùng của Fermat.

Trong quá khứ, nhiều nhà toán học đã thử áp dụng phương pháp giảm vô hạn cho trường hợp n = 4, nhưng trong mỗi trường hợp, mọi ý định mở rộng phép chứng minh đó đều chỉ dẫn tới những lỗ hổng trong logic. Tuy nhiên, Euler đã chứng tỏ được rằng bằng cách đưa số ảo i vào chứng minh của mình, ông đã bịt được những lỗ hổng đó và buộc phương pháp giảm vô hạn phải có hiệu lực đối với trường hợp n = 3. Đây là một thành tựu hết sức to lớn, nhưng Euler lại không lặp lại được nó đối với những trường hợp khác của Định lý cuối cùng của Fermat. Thật không may, mọi nỗ lực của Euler nhằm làm cho hệ thống lập luận của mình áp dụng được cho các trường hợp tới vô hạn đều kết thúc thất bại. Vậy là, người đã sáng tạo ra tri thức toán học nhiều hơn bất kỳ ai khác trong lịch sử đã bị hạ gục bởi thách thức của Fermat. Niềm an ủi duy nhất là ông đã làm được một bước đột phá đầu tiên vào bài toán hóc búa nhất thế giới đó. Không ngã lòng trước thất bại, Euler vẫn tiếp tục sáng tạo ra những thành tựu toán học xuất sắc cho tới khi ông qua đời, và lý do khiến ta càng khâm phục trước những thành tựu đó là những năm cuối cùng trong sự nghiệp của mình, ông đã bị mù hoàn toàn. Ông bắt đầu bị mất thị giác từ năm 1735, khi Viện Hàn lâm Paris đặt ra giải thưởng dành cho ai giải được một bài toán thiên văn. Bài toán này hóc búa tới mức cộng đồng các nhà toán học đã đề nghị Viện Hàn lâm cho phép họ kéo dài thêm vài tháng, nhưng đối với Euler thì không cần thiết. Ông đã bị ám ảnh bởi bài toán đó đến mức làm việc liên tục ba ngày liền và đã giành được giải thưởng một cách xứng đáng. Tuy nhiên, do điều kiện làm việc thiếu thốn kết hợp với sức ép căng thẳng đã bắt Euler phải trả giá bằng một con mắt khi ông chưa đầy 30 tuổi.

Mất đi một con mắt đối với Euler chỉ là một khuyết tật nhỏ, Euler còn tuyên bố rằng: "Bây giờ tôi sẽ ít bị phân tán tư tưởng hơn". Bốn mươi năm sau, vào tuổi lục tuần, tình hình của ông tồi tệ một cách đáng kể, khi con mắt còn tốt của ông bị đục thủy tinh thể, nghĩa là ông sẽ bị mù. Ông đã quyết định không chịu đầu hàng và bắt đầu nhắm mắt tập viết nhằm hoàn thiện kỹ thuật này trước khi bóng tối hoàn toàn sập xuống. Ít tuần sau ông đã bị mù hoàn toàn. Việc luyện tập trước hữu ích đối với ông trong những tuần đầu, nhưng rồi mấy tháng sau, nét chữ của Euler trở nên không thể đọc được nữa và Albert, con trai ông, đã phải làm thư ký cho ông.

Euler vẫn tiếp tục sáng tạo toán học trong suốt 17 năm tiếp theo, thậm chí còn có năng suất hơn cả trước đó. Khối óc đồ sộ của ông cho phép ông có thể xử lý các khái niệm mà không cần phải viết ra trên giấy, đồng thời trí nhớ siêu việt của ông cho phép ông sử dụng bộ não của mình như một thư viện. Các đồng nghiệp của Euler cho rằng việc mất đi thị giác càng làm cho chân trời trí tưởng tượng của ông được mở rộng ra thêm. Những tính toán vị trí Mặt trăng của Euler đã được thực hiện trong thời kỳ mù lòa này. Đối với các hoàng đế ở châu Âu thì đây là một thành tựu toán học quý giá nhất, bởi vì nó đã từng làm bối rối những nhà toán học vĩ đại nhất châu Âu, kể cả Newton.

Năm 1776, một ca mổ đã được thực hiện và trong ít ngày thị giác của Euler dường như đã được phục hồi. Nhưng rồi do nhiễm trùng, Euler lại bị bóng tối bao phủ trở lại. Không hề nản lòng, Euler vẫn tiếp tục làm việc cho tới ngày 18 tháng 9 năm 1783, một cơn đột quỵ đã cướp mất sinh mạng của ông. Nhà toán học kiêm triết học, Huân tước Concordcet đã nói: "Euler đã ngừng sống và ngừng tính toán."

Những bước tiến nhỏ nhoi

Một thế kỷ sau cái chết của Fermat, người ta chỉ có được chứng minh cho hai trường hợp đặc biệt của Định lý Fermat. Fermat đã cho các nhà toán học một bước khởi đầu bằng cách cung cấp cho họ chứng minh khẳng định rằng phương trình

$x^4 + y^4 = z^4$ không có nghiệm nguyên.

Euler đã vận dụng phương pháp chứng minh đó để chứng tỏ rằng phương trình

$x^3 + y^3 = z^3$ cũng không có nghiệm nguyên.

Sau đột phá của Euler, người ta vẫn còn cần phải chứng minh rằng các phương trình:

$$x^5 + y^5 = z^5$$

$$x^6 + y^6 = z^6$$

$$x^7 + y^7 = z^7$$

$$x^8 + y^8 = z^8$$

$$x^9 + y^9 = z^9$$

Mặc dù các nhà toán học chỉ tiến được một cách hết sức chậm chạp, nhưng tình hình cũng không đến nỗi xấu như ta thoạt tưởng. Thực ra, chứng minh cho trường hợp n = 4 cũng tức là chứng minh cho các trường hợp n = 8, 12, 16, 20,... Sở dĩ như vậy là bởi vì một số bất kỳ được viết dưới dạng lũy thừa bậc 8 (hoặc bậc 12, 16, 20...) cũng đều có thể viết dưới dạng lũy thừa bậc 4. Ví dụ, số 256 bằng 2^8, nhưng cũng có thể được viết như 4^4. Do vậy, một chứng minh đã đúng cho lũy thừa bậc 4 thì cũng đúng cho lũy thừa bậc 8 và tất cả những lũy thừa khác có bậc là bội số của 4. Cũng theo nguyên tắc đó, chứng minh của Euler cho trường hợp n = 3, cũng sẽ tự động đúng cho các trường hợp n = 6, 9, 12, 15,...

Vậy là bất chợt các con số đã rung động và xem ra Định lý cuối cùng của Fermat sắp chứng minh được đến nơi. Chứng minh cho trường hợp n = 3 có tầm quan trọng đặc biệt, bởi vì 3 là một số nguyên tố. Như đã giải thích ở trên, các số nguyên tố có một tính chất đặc biệt: nó không là bội số của bất cứ số nguyên nào, ngoài số 1 và chính nó. Những số nguyên tố khác là 5, 7, 11, 13,... Tất cả những số còn lại đều là bội số của các số nguyên tố, được gọi là các hợp số.

Các nhà lý thuyết số xem các số nguyên tố là những số quan trọng hơn hết thảy, bởi vì chúng là các nguyên tử của toán học. Các số nguyên tố là những viên gạch số, bởi vì tất cả các số khác đều được tạo dựng bằng tích của các số nguyên tố. Điều này có vẻ như sẽ dẫn chúng ta tới một đột phá quan trọng. Cụ thể là, để chứng minh Định lý Fermat đối với mọi giá trị của n, ta chỉ cần đơn giản chứng minh nó đối với các giá trị của n là số nguyên tố. Tất cả các trường hợp khác đơn thuần chỉ là bội số của các số nguyên tố nên cũng đã hàm ý được chứng minh.

Bằng trực giác ta thấy điều này sẽ làm cho bài toán đơn giản đi rất nhiều, vì bạn không cần quan tâm tới các phương trình trong đó giá trị của n không phải là số nguyên tố. Như vậy, số các phương trình sẽ rút bớt đi rất nhiều. Ví dụ, đối với các giá trị n nhỏ hơn 20, thì chỉ có 6 giá trị của nó là cần phải chứng minh:

$$x^5 + y^5 = z^5$$

$$x^7 + y^7 = z^7$$

$$x^{11} + y^{11} = z^{11}$$

$$x^{13} + y^{13} = z^{13}$$

$$x^{17} + y^{17} = z^{17}$$

$$x^{19} + y^{19} = z^{19}$$

Nếu người ta có thể chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat chỉ cho các giá trị nguyên tố của n thì cũng có nghĩa là nó được chứng minh đối với mọi giá trị của n. Nếu ta xét tất cả các số nguyên thì hiển nhiên là sẽ có một số vô hạn. Còn nếu ta chỉ xét riêng các số nguyên tố, tức chỉ một phần nhỏ trong tập hợp tất cả các số nguyên thôi, thì liệu bài toán có đơn giản đi nhiều hay không?

Trực giác chắc sẽ mách bảo với chúng ta rằng nếu bạn bắt đầu với một số lượng vô hạn và sau đó bỏ đi một phần lớn của nó, thì bạn hy vọng có thể nhận được một cái gì đó hữu hạn. Tuy nhiên, trong toán học, logic chứ không phải trực giác là trọng tài của chân lý. Trong thực tế người ta đã chứng minh được rằng bản liệt kê các số nguyên tố cũng kéo dài vô tận. Do đó, mặc dù có thể không cần phải xem xét một số rất lớn các phương trình có liên quan đến các giá trị không phải là số nguyên tố của n, nhưng các phương trình còn lại liên quan đến các giá trị nguyên tố của n vẫn còn là một số lượng vô hạn.

Chứng minh số lượng các số nguyên tố là vô hạn đã có từ thời Euclid và là một trong số những suy luận kinh điển của toán học. Ban đầu Euclid giả thiết rằng bản liệt kê các số nguyên tố đã biết là hữu hạn và sau đó chứng minh rằng cần phải tồn tại một số lượng vô hạn các số mới thêm vào bản liệt kê đó. Giả sử trong bản liệt kê ban đầu của Euclid có N số nguyên tố, mà ta ký hiệu là P_1, P_2, P_3, ..., P_N. Sau đó Euclid tạo một số mới Q_A sao cho:

$$Q_A = (P_1 \times P_2 \times P_3 \times \ldots \times P_N) + 1$$

Số mới Q_A này có thể là số nguyên tố hoặc không nguyên tố. Nếu nó là số nguyên tố, thì có nghĩa là ta đã thành công tạo ra một số nguyên tố mới lớn hơn, và do đó bản danh sách ban đầu đưa ra là không đầy đủ. Trái lại, nếu Q_A không phải là số nguyên tố, thì nó phải chia hết cho một số nguyên tố nào đó. Số nguyên tố này không thể là một trong số các số nguyên tố đã biết (tức các số trong bản danh sách ban đầu) bởi vì khi chia Q_A cho một trong các số đó đều có số dư bằng 1. Do vậy, nhất thiết phải có một số nguyên tố mới mà ta ký hiệu là P_{N+1}.

Như vậy, bây giờ ta đã chứng minh được rằng hoặc Q_A là một số nguyên tố mới hoặc chúng ta phải có một số nguyên tố mới khác là P_{N+1}. Đằng nào thì bản liệt kê các số nguyên tố ban đầu cũng sẽ được bổ sung thêm một số nguyên tố mới. Lặp lại quá trình trên với bản liệt kê bây giờ được bổ sung một số nguyên tố mới (P_{N+1} hoặc Q_A) và tạo số mới Q_B. Lập luận tương tự ta thấy số Q_B có thể là một số nguyên tố mới lớn hơn hoặc tồn tại một số nguyên tố mới khác P_{N+2} không có trong bản liệt kê của chúng ta. Rốt cục, dù cho bản liệt kê các số nguyên tố của chúng ta có dài thế nào đi nữa, thì vẫn luôn luôn tìm được một số nguyên tố mới. Do đó, bản liệt kê các số nguyên tố là vô hạn, tức là không bao giờ kết thúc.

Nhưng làm sao lại có chuyện một cái gì đó hiển nhiên là nhỏ hơn một lượng vô hạn mà lại cũng là vô hạn được? Nhà toán học người Đức David Hilbert đã một lần nói rằng: "Ôi cái vô hạn! Không có gì trên đời này lại có thể làm cho tinh thần con người bối rối sâu sắc đến như vậy; cũng không có ý tưởng nào lại kích thích trí tuệ con người có kết quả đến như thế; và cũng không có khái niệm nào cần phải được làm sáng tỏ nhiều hơn nữa như khái niệm vô hạn này".

Để giải quyết nghịch lý về tính vô hạn nêu trên, điều cần thiết là phải định nghĩa vô hạn nghĩa là gì. Georg Cantor, người làm việc bên cạnh Hilbert, đã định nghĩa vô hạn như là kích thước của bản liệt kê kéo dài vô hạn của tập hợp các số tự nhiên (1, 2, 3,...). Do đó, bất kỳ cái gì có thể so sánh được về kích thước với tập hợp đó đều là vô hạn.

Theo định nghĩa đó, số lượng các số chẵn mà theo trực giác là nhỏ hơn, cũng lại là vô hạn. Dễ dàng chứng minh rằng lượng các số tự nhiên và lượng các số chẵn là so được với nhau vì ta có thể kết đôi một số tự nhiên với một số chẵn tương ứng:

1	2	3	4	5	6	7...
⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓	⇓...
2	4	6	8	10	12	14...

Nếu mỗi thành viên của bản liệt kê các số tự nhiên đều có thể đặt tương ứng với một thành viên của bản liệt kê các số chẵn thì hai bản liệt kê này cần phải có kích thước như nhau. Phương pháp so sánh này dẫn tới nhiều kết luận rất bất ngờ, trong đó có kết luận về tính vô hạn của tập hợp các số nguyên tố. Mặc dù Cantor là người đầu tiên giải quyết vấn đề vô hạn một cách hình thức, nhưng ngay từ đầu ông đã bị cộng đồng toán học phê phán hết sức nặng nề vì định nghĩa khá triệt để của ông. Tới cuối sự nghiệp của Cantor, sự công kích càng mang màu sắc cá nhân và kết quả là ông đã mắc bệnh tâm thần và suy sụp nghiêm trọng. Cuối cùng, sau khi Cantor mất, những ý tưởng của ông mới được chấp nhận một cách rộng rãi như một định nghĩa hiệu năng, chính xác và nhất quán về cái vô hạn. Hilbert đã từng nói như một sự tôn vinh: "Không ai có thể kéo chúng ta ra khỏi cái thiên đường mà Cantor đã tạo dựng cho chúng ta".

Hilbert đã đưa ra một ví dụ về cái vô hạn, được biết tới dưới cái tên Khách sạn Hilbert, một ví dụ minh họa thật rõ ràng về những tính chất lạ lùng của cái vô hạn. Khách sạn giả định này có một thuộc tính mà khách sạn nào cũng ước ao, đó là nó có một số vô hạn các phòng. Một hôm, có một vị khách mới tới và ông ta hết sức thất vọng khi biết rằng, mặc dù kích thước của khách sạn là vô hạn, nhưng tất cả các phòng đều đã có người thuê. Hilbert, người quản lý khách sạn, ngẫm nghĩ một lát rồi khẳng định với vị khách mới tới rằng ông sẽ thu xếp được một phòng trống cho ông ta. Hilbert đề nghị tất cả các khách thuê lúc đó hãy dọn sang phòng bên cạnh, cụ thể là người ở phòng số 1 dọn sang phòng số 2, người ở phòng số 2 dọn sang phòng số 3, và cứ như vậy mãi. Như vậy, tất cả những người đã ở trong khách sạn đều được đảm bảo vẫn có một phòng và vị khách mới tới sẽ được xếp vào phòng số 1. Điều này chứng tỏ rằng vô cùng cộng 1 vẫn bằng vô cùng.

Tối hôm sau Hilbert lại phải đối mặt với một bài toán còn hóa búa hơn nhiều. Khách sạn vẫn còn kín khách, thì một chiếc xe lớn vô hạn chở tới một số vô hạn các vị khách mới. Hilbert bèn đề nghị tất cả các khách đang thuê phòng chuyển sang phòng có số lớn gấp đôi số phòng mình đang ở. Cụ thể là khách đang ở phòng số 1 sẽ dọn sang phòng số 2, khách đang ở phòng số 2 dọn sang phòng số 4, và cứ như vậy mãi. Bằng cách đó, tất cả các vị khách đang thuê phòng vẫn giữ được cho mình một phòng, nhưng đồng thời lại dôi ra một số vô hạn phòng trống, đó là các phòng đánh số lẻ, dành cho các vị khách mới. Điều này chứng tỏ rằng nhân đôi vô hạn cũng vẫn sẽ là vô hạn.

Xem ra cái khách sạn Hilbert gợi ý rằng tất cả những cái vô hạn đều lớn như nhau, bởi vì các tập hợp vô hạn khác nhau đều có thể nhét vào cùng một khách sạn vô hạn - tập hợp vô hạn của các số chẵn có thể đặt tương ứng và so được với tập hợp của tất cả các số tự nhiên. Tuy nhiên, thực tế không phải như vậy, một số tập hợp vô hạn thực sự lớn hơn các tập hợp khác. Ví dụ, mọi ý định kết đôi mỗi một số hữu tỷ với mỗi một số vô tỷ đều kết thúc thất bại và thực tế người ta đã chứng minh được rằng tập hợp vô hạn của các số vô tỷ lớn hơn tập hợp vô hạn của các số hữu tỷ. Các nhà toán học đã phải phát triển cả một hệ thống đẳng cấp cho các thang vô hạn khác nhau và việc xử lý những khái niệm đó là một trong những chủ đề nóng bỏng nhất hiện nay.

Mặc dù tính vô hạn của các số nguyên tố đã làm tiêu tan hy vọng về một chứng minh sớm cho Định lý cuối cùng của Fermat, nhưng nguồn cung cấp vô hạn các số nguyên tố lại dẫn đến những hệ quả tích cực hơn trong các lĩnh vực khác, như lĩnh vực tình báo và tiến hóa của các côn trùng, chẳng hạn. Trước khi quay trở lại cuộc tìm kiếm chứng minh cho Định lý cuối cùng của Fermat, cũng rất đáng để chúng ta tìm hiểu một cách ngắn gọn việc sử dụng và lạm dụng các số nguyên tố.

Lý thuyết các số nguyên tố là một trong số rất ít các lĩnh vực của toán học thuần túy đã tìm thấy sự ứng dụng trực tiếp trong thực tiễn, mà cụ thể là trong lĩnh vực mật mã. Mật mã có liên quan tới việc soạn thảo những thư tín bí mật mà chỉ người nhận, chứ không phải bất kỳ ai bắt được nó, có thể đọc được. Quá trình soạn thảo những bức thư này đòi hỏi phải dùng những chìa khóa bí mật, và việc giải mã truyền thống chỉ đơn giản đòi hỏi người nhận dùng chìa khóa mã đó theo chiều ngược lại. Với thủ tục như thế, thì chìa khóa mã luôn là khâu yếu nhất trong chuỗi các mắt xích an ninh. Trước hết, người gửi và người nhận cần phải thỏa thuận với nhau về những chi tiết của khóa mã và sự trao đổi thông tin này là cực kỳ mạo hiểm. Nếu đối phương bắt được khóa mã đã được trao đổi, thì chúng sẽ giải mã được tất cả các thư tín tiếp sau. Thứ hai, khóa mã phải thường xuyên thay đổi để giữ an toàn và mỗi lần điều đó xảy ra thì lại có nguy cơ mã khóa bị đối phương bắt được.

Bài toán của mọi khóa mã xét cho cùng chỉ tiến triển xoay quanh việc áp dụng nó theo một chiều để mã hóa thư tín và áp dụng nó theo chiều ngược lại để giải mã - việc giải mã một bức thư hầu như cũng dễ dàng như việc mã hóa nó. Tuy nhiên, kinh nghiệm cho chúng ta biết rằng có rất nhiều tình huống hằng ngày trong đó việc giải mã khó hơn việc mã hóa rất nhiều - chẳng hạn, làm món kem trứng thì dễ, nhưng phục hồi lại trạng thái ban đầu của quả trứng thì lại cực kỳ khó, sau khi lòng đỏ đã bị tách ra khỏi lòng trắng và khuấy đều lên.

Vào những năm 1970, Whitfield Diffie và Martin Hellman đã nảy ra ý tưởng tìm kiếm một quá trình toán học dễ dàng thực hiện theo một chiều nhưng lại cực kỳ khó thực hiện theo chiều ngược lại. Một quá trình như vậy sẽ cung cấp cho ta một loại mã khóa hoàn hảo. Chẳng hạn, tôi có một mã khóa riêng gồm hai phần (phần mã hóa và phần giải mã) và phần mã hóa của nó được công bố trong một cuốn danh bạ công cộng. Nếu sau đó có một người gửi cho tôi bức thư đã được mã hóa, thì chỉ có tôi, người nắm phần giải mã của khóa mã, mới có thể đọc được. Mặc dù, tất cả mọi người đều biết phần mã hóa của khóa, nhưng nó không có liên quan gì đến phần giải mã hết.

Năm 1977, Ronald Rivest, Adi Shamir và Leonard Adleman, một êkip các nhà toán học và khoa học máy tính thuộc Học viện Công nghệ Massachusetts (MIT) đã nhận thấy rằng các số nguyên tố chính là cơ sở lý tưởng cho một quá trình mã hóa dễ/giải mã khó như vậy. Để làm mã khóa riêng của mình, tôi lấy hai số nguyên tố cực lớn, mỗi số chứa tới 80 chữ số rồi sau đó nhân chúng với nhau để được một hợp số còn lớn hơn nữa. Để mã hóa các thư tín người ta chỉ cần biết hợp số lớn đó, trong khi đó để giải mã bạn cần phải biết hai số nguyên tố gốc đã được nhân với nhau và được gọi là các thừa số nguyên tố. Bây giờ tôi có thể thông báo công khai hợp số (tức là tích của hai số nguyên tố đã chọn), nó cũng là nửa mã hóa của khóa mã; còn hai thừa số nguyên tố, tức nửa giải mã thì chỉ giữ cho mình biết thôi. Điều quan trọng là ngay cả khi mọi người đều biết hợp số lớn, thì họ cũng vô cùng khó khăn trong việc tìm ra hai thừa số nguyên tố.

Xin lấy một ví dụ đơn giản. Tôi có thể đưa ra hợp số 589 để bất kỳ ai cũng có thể mã hóa các thư tín gửi cho tôi, nhưng tôi lại giữ bí mật về hai thừa số nguyên tố của số 589, để chỉ mình tôi mới có thể giải mã được. Nếu những người khác mò ra hai thừa số nguyên tố này thì họ cũng sẽ giải mã được những thư tín gửi cho tôi, nhưng ngay cả với con số 589 nhỏ bé đó thì cũng không phải nhìn thấy ngay hai thừa số nguyên tố đó. Trong trường hợp này cũng phải mất mấy phút trên máy vi tính mới tìm ra hai thừa số nguyên tố đó là 31 và 19 (vì $31 \times 19 = 589$), và như vậy mã khóa của tôi không còn bảo đảm được lâu dài.

Tuy nhiên, trong thực tế, hợp số mà tôi công bố công khai là một số có tới hơn một trăm chữ số và điều này làm cho nhiệm vụ tìm hai thừa số nguyên tố là một công việc gần như không thể thực hiện được. Thậm chí ngay cả với những máy tính mạnh nhất hiện nay thì việc phân tích một hợp số lớn như vậy (phần mã hóa) thành hai thừa số nguyên tố (phần giải mã) cũng sẽ phải mất vài năm mới tìm ra đáp số. Do đó, để chống lại gián điệp nước ngoài, tôi chỉ cần thay đổi mã khóa của tôi mỗi năm một lần. Nghĩa là mỗi năm một lần tôi lại công bố một hợp số khổng lồ mới, và bất kỳ ai muốn thử giải mã những bức thư gửi cho tôi sẽ phải bắt đầu lại từ đầu việc tìm kiếm hai thừa số nguyên tố mới.

Ngoài việc tìm ra vai trò của mình trong lĩnh vực tình báo, các số nguyên tố cũng đã từng xuất hiện trong thế giới tự nhiên. Ve sầu định kỳ, mà chủ yếu là loài Magicicada septendecim, có vòng đời dài nhất trong số tất cả các loài côn trùng. Vòng đời của chúng được bắt đầu từ dưới đất, nơi mà những nhộng trần của chúng kiên nhẫn hút thức ăn từ các rễ cây. Rồi sau 17 năm chờ đợi, những con ve sầu trưởng thành chui từ dưới đất lên thành đàn với số lượng lớn và tạm thời chiếm lĩnh cả một vùng. Trong một ít tuần chúng giao phối, đẻ trứng rồi chết.

Một câu đố làm đau đầu các nhà sinh học là: tại sao vòng đời của con ve sầu lại dài đến như vậy? Và việc vòng đời của nó có số năm là một số nguyên tố liệu có một ý nghĩa gì chăng? Cũng lưu ý rằng một loài ve sầu khác, loài Magicicada tredecim, cũng chui từ dưới đất lên hàng đàn theo chu kỳ 13 năm, điều này khiến người ta nghĩ rằng đối với loài ve sầu, vòng đời có số năm là một số nguyên tố chắc sẽ đem lại cho nó một ưu thế nào đó trong quá trình tiến hóa.

Một lý thuyết gợi ý rằng ve sầu đã từng có một ký sinh trùng cũng trải qua một vòng đời khá dài và loài ve sầu cố gắng để thoát được nó. Bằng cách, chẳng hạn, nếu vòng đời của ký sinh trùng là 2 năm thì ve sầu sẽ tránh những vòng đời là bội số của 2, vì nếu không thì ký sinh trùng và ve sầu sẽ thường xuyên trùng hợp với nhau. Tương tự, nếu ký sinh trùng có vòng đời là 3, thì ve sầu sẽ tránh có vòng đời là bội số của 3, vì nếu không ký sinh trùng và ve sầu lại một lần nữa có nguy cơ thường xuyên trùng hợp nhau. Cuối cùng, để tránh cuộc gặp gỡ với ký sinh trùng của mình, chiến lược tốt nhất của ve sầu là phải có vòng đời dài có số năm là một số nguyên tố. Vì số 17 không chia hết cho bất cứ số nào, nên rất hiếm khi ve sầu Magicicada septendecim gặp ký sinh trùng của nó. Nếu ký sinh trùng có vòng đời kéo dài 2 năm thì chúng chỉ có thể gặp nhau sau 34 năm, còn nếu nó có vòng đời kéo dài 16 năm, thì chúng chỉ gặp nhau sau 272 (16×17) năm.

Để chiến đấu trở lại, ký sinh trùng chỉ có thể có hai vòng đời khả dĩ để làm tăng tần suất trùng hợp, đó là vòng đời kéo dài 1 năm và vòng đời kéo dài 17 năm. Tuy nhiên, ký sinh trùng không thể có cơ may sống sót, nếu nó phải đợi con mồi của mình 17 năm liên tục, bởi vì 16 năm đầu tiên sẽ chẳng có con ve sầu nào cho nó ký sinh hết. Mặt khác, để đạt tới vòng đời 17 năm, các thế hệ ký sinh trùng trước hết phải tiến hóa qua vòng đời 16 năm. Điều này có nghĩa là ở một giai đoạn nào đó của quá trình tiến hóa, ký sinh trùng và ve sầu không thể trùng hợp với nhau trong 272 năm! Như vậy, trong bất cứ trường hợp nào, vòng đời dài là một số nguyên tố đã bảo vệ cho sự sống còn của nó.

Điều này có thể giải thích được tại sao ký sinh trùng mà người ta giả định ở trên đã không bao giờ được tìm thấy ở ve sầu! Trong cuộc chạy đua với ve sầu, ký sinh trùng có lẽ đã liên tục kéo dài vòng đời của mình cho tới khi nó đụng phải hàng rào 272 năm, và ở đó do vẫn không tìm được sự trùng hợp với ve sầu đã làm cho nó bị tuyệt chủng. Kết quả là ve sầu có vòng đời 17 năm, một điều trở nên không còn cần thiết nữa vì ký sinh trùng của nó đã không còn tồn tại.

Chàng Le Blanc

Vào đầu thế kỷ XIX, Định lý cuối cùng của Fermat đã tự khẳng định như là một bài toán nổi tiếng nhất trong lý thuyết số. Kể từ khi có đột phá đầu tiên của Euler hầu như không có một bước tiến nào nữa, nhưng tuyên bố dõng dạc của một phụ nữ trẻ người Pháp lại thổi bùng lên niềm đam mê theo đuổi việc tìm kiếm chứng minh đã mất của Fermat. Sophie Germain sống trong một thời đại trọng nam khinh nữ và đầy rẫy những định kiến. Để có thể tiến hành nghiên cứu, bà buộc phải cải trang thành nam giới, phải học tập trong những điều kiện khủng khiếp và làm việc trong sự cô lập về trí tuệ.

Trong nhiều thế kỷ, phụ nữ không được khuyến khích nghiên cứu toán học, nhưng mặc dù có sự phân biệt như vậy, vẫn có một số nhà toán học nữ đấu tranh chống lại những thói tục đó và đã khắc sâu vĩnh viễn tên tuổi của họ vào những cuốn biên niên của toán học. Người phụ nữ đầu tiên được biết đã có những tác động vào đề tài này là Theano ở thế kỷ thứ VI trước Công nguyên, người bắt đầu như một học trò của Pythagore trước khi trở thành một trong số những môn đệ gần gũi nhất và cuối cùng đã trở thành vợ của ông. Pythagore nổi tiếng là một "triết gia luôn đấu tranh cho phụ nữ", bởi vì ông thực sự khuyến khích các học giả là phụ nữ. Theano chỉ là một trong số 28 chị em trong Hội ái hữu.

Trong những thế kỷ sau đó, những người như Socrates và Plato đều tiếp tục mời phụ nữ theo học trong các trường của họ, nhưng chỉ tới thế kỷ thứ IV trước Công nguyên, một nhà toán học nữ mới lập được một trường học riêng có ảnh hưởng của mình. Hypatia, con gái của một giáo sư toán học ở Đại học Alexandria, đã nổi tiếng vì những bài giảng cho công chúng rộng rãi nhất và cũng vì bà thuộc số những người giải toán vĩ đại nhất. Những nhà toán học bị bế tắc hàng tháng trước một bài toán cụ thể nào đó đều viết thư cho bà tìm kiếm lời giải và Hypatia rất hiếm khi làm cho những người khâm phục bà phải thất vọng. Bà đam mê toán học và các quá trình chứng minh logic tới mức khi được hỏi tại sao bà không lấy chồng, bà đã trả lời rằng bà đã kết hôn với chân lý. Cuối cùng, sự hiến dâng hoàn toàn cho sự nghiệp duy lý của Hypatia đã dẫn tới cái chết bi thảm của bà, khi Cyril - đức Giám mục của Alexandria, tiến hành đàn áp các nhà triết học, các nhà khoa học và các nhà toán học, những người mà ông ta gọi là dị giáo. Nhà lịch sử Edward Gibbon đã kể cho chúng ta một câu chuyện sinh động về những điều xảy ra sau khi Cyril có âm mưu chống lại Hypatia và kích động quần chúng nổi lên chống lại bà:

Trong một ngày định mệnh, vào Mùa Chay, Hypatia bị kéo ra khỏi chiếc xe của bà, bị lột trần truồng, kéo lê đến nhà thờ và bị hành quyết dã man bởi gã đọc kinh Pierre và một lũ cuồng tín man rợ, tàn nhẫn; chúng dùng những vỏ sò sắc nhọn để róc thịt bà và tung những cẳng tay cẳng chân còn run rẩy của bà vào ngọn lửa.

Ngay sau cái chết của Hypatia, toán học bước vào thời kỳ ngưng trệ và chỉ tới thời kỳ Phục hưng mới xuất hiện một người phụ nữ khác đã làm cho tên tuổi của mình nổi lên như một nhà toán học. Maria Agnesi sinh năm 1718 ở Milan. Giống như Hypatia, bà cũng là con gái của một nhà toán học. Bà đã được thừa nhận là một trong số những nhà toán học tinh tế nhất châu Âu và đặc biệt, bà được nổi tiếng là nhờ công trình về tiếp tuyến của các đường cong. Trong tiếng Italia, các đường cong được gọi là versiera, một từ dẫn xuất từ chữ La tinh vertere có nghĩa là "quay", nhưng khốn thay nó cũng lại là từ viết tắt của avversiera, có nghĩa là "vợ của Quỷ". Một đường cong được nghiên cứu bởi Agnesi (versiera Agnesi) đã được dịch nhầm sang tiếng Anh là "mụ phù thủy Agnesi" và trong một thời gian bản thân nhà toán học này cũng bị gọi bằng chính cái tên đó.

Mặc dù các nhà toán học trên khắp châu Âu đều thừa nhận khả năng của Agnesi, nhưng nhiều cơ quan học thuật, đặc biệt là Viện Hàn lâm Pháp, đều từ chối không dành cho bà một vị trí nghiên cứu chính thức. Sự phân biệt chống lại phụ nữ đã được thể chế hóa này vẫn tiếp tục duy trì quyền của nó cho tới tận thế kỷ XX, khi mà bà Emmy Noether, người đã được Einstein mô tả như là "một thiên tài toán học sáng tạo quan trọng nhất đã được sản sinh ra cho tới nay kể từ khi nền giáo dục cao cấp bắt đầu dành cho phụ nữ", đã bị từ chối chức phó giáo sư ở Đại học Gottingen. Đa số những người trong khoa lập luận: "Làm sao có thể để cho một phụ nữ trở thành Privatdozent được? Khi đã trở thành Privatdozen rồi, sau đó bà ta có thể sẽ trở thành giáo sư, rồi trở thành ủy viên của Hội đồng trường Đại học... Những người lính của chúng ta sẽ nghĩ gì khi họ quay trở lại trường Đại học và thấy rằng người ta đề nghị họ phải học dưới chân của một người phụ nữ?" Bạn và cũng là thầy của bà, giáo sư nổi tiếng David Hilbert đã đáp lại rằng: "Thưa các ngài, tôi không hề thấy giới tính của ứng viên lại là một bằng chứng chống lại việc tiếp nhận bà với tư cách là một Privatdozen. Sau hết, Hội đồng của nhà trường đâu có phải là cái nhà tắm công cộng".

Sau này, khi Edmund Landau, một đồng nghiệp của bà, được hỏi Noether có đúng là một nhà toán học nữ vĩ đại hay không, ông đã trả lời: "Tôi có thể xác nhận rằng bà ấy đúng là một nhà toán học vĩ đại, nhưng việc Noether có phải là phụ nữ hay không thì tôi không thể quả quyết được".

Ngoài chuyện cũng phải chịu sự phân biệt đối xử ra, Noether cũng còn có nhiều điểm chung với những nhà toán học là phụ nữ khác trong suốt nhiều thế kỷ, chẳng hạn như bà cũng là con gái của một giáo sư toán học. Nhiều nhà toán học của cả hai giới đều xuất thân từ các gia đình toán học, và điều này đã làm nảy sinh một tin đồn cho là có tồn tại gene toán học, nhưng trong trường hợp phụ nữ thì tỷ lệ này quả thật rất cao. Một cách giải thích hợp lý nhất là do phần lớn phụ nữ có khả năng không được tiếp xúc với toán học hoặc không được khuyến khích theo đuổi nó, trong khi đó những người là con gái của các giáo sư toán học đều khó có thể tránh khỏi được tắm mình trong thế giới các con số. Hơn thế nữa, Noether, cũng giống như Hypatia, Agnesi và phần lớn những nhà toán học nữ khác, lại không bao giờ lấy chồng, chủ yếu là bởi vì xã hội không thể chấp nhận những phụ nữ theo đuổi một sự nghiệp như vậy và cũng có rất ít người đàn ông được chuẩn bị để cưới cô dâu với những nền tảng trái ngược như vậy. Nhà toán học vĩ đại người Nga Sonya Kovalevskaya là một ngoại lệ đối với quy tắc này, bởi vì bà đã thu xếp một đám cưới theo thông lệ với Vladimir Kovalevsky, một người có thể chấp nhận một cuộc hôn nhân không có quan hệ tình dục. Đối với cả hai bên, cuộc hôn nhân này cho phép họ thoát ra khỏi gia đình và tập trung vào những nghiên cứu của họ, và trong trường hợp của Sonya, việc chu du một mình khắp châu Âu sẽ trở nên dễ dàng hơn một khi bà trở thành một người phụ nữ đáng kính đã có chồng.

Trong số tất cả các nước châu Âu thì Pháp là nước có thái độ phân biệt đối xử mạnh nhất đối với phụ nữ có học vấn. Quốc gia này tuyên bố thẳng thừng rằng toán học không thích hợp với phụ nữ và nằm ngoài khả năng trí tuệ của họ. Mặc dù trong suốt phần lớn thế kỷ XVIII và XIX, các phòng khách ở Paris (đều do phụ nữ nắm giữ) có uy thế hơn nhiều so với thế giới toán học, nhưng chỉ duy nhất một phụ nữ dám vượt ra khỏi những ràng buộc của xã hội Pháp và đã xác lập cho mình một vị trí vững vàng như là một nhà lý thuyết số vĩ đại - Sophia Germain đã tạo ra một cuộc cách mạng trong việc nghiên cứu Định lý cuối cùng của Fermat và đã có những đóng góp lớn hơn bất cứ một người đàn ông nào đi trước bà trong lĩnh vực này.

Sophia Germain sinh ngày 1 tháng 4 năm 1776 và là con gái của một thương gia, ông Ambroise-Francois Germain. Ngoài công việc ra, cuộc đời của Sophia cũng đã bị chi phối bởi những biến động của cuộc cách mạng Pháp - năm mà bà phát hiện ra tình yêu của mình đối với các con số cũng là năm xảy ra vụ chiếm ngục Bastille, và những nghiên cứu về giải tích của bà diễn ra dưới bóng mây của thời kỳ khủng bố. Mặc dù cha Sophia thành đạt về mặt tài chính, nhưng gia đình bà không thuộc giới quý tộc.

Sophie Germain

Phụ nữ thuộc các gia đình cùng tầng lớp với gia đình Germain không được khuyến khích theo học toán học, nhưng người ta cũng mong muốn họ có một hiểu biết nhất định về lĩnh vực này đủ để có thể bàn luận được trong những cuộc nói chuyện xã giao của giới thượng lưu. Để đáp ứng mục đích đó, một loạt sách giáo khoa đã được viết nhằm giúp cho các cô gái trẻ nắm được những phát triển mới nhất trong toán học và khoa học. Francesco Algarotti là tác giả của cuốn *Triết học* của Sir Isaac Newton được giải thích cho các quý bà sử dụng. Vì Algarotti tin rằng phụ nữ chỉ quan tâm tới các chuyện tình, nên ông có ý định giải thích các phát minh của Newton thông qua cuộc đối thoại mang màu sắc tán tỉnh giữa một nữ Công tước và người đối thoại với bà. Chẳng hạn, khi người tiếp chuyện phác ra định luật lực hấp dẫn tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách, thì bà Công tước cho ngay một cách giải thích riêng của bà đối với định luật cơ bản này của vật lý: "Tôi không thể không nghĩ rằng... tỷ lệ bình phương khoảng cách giữa các vị trí này... cũng đã được quan sát thấy ngay cả trong tình yêu. Chẳng hạn như sau 8 ngày cách xa tình yêu sẽ giảm đi 64 lần so với ngày đầu tiên".

Chẳng có gì đáng ngạc nhiên nếu như những cuốn sách giáo khoa ga lăng kiểu như thế này đã không kích thích được sự quan tâm của Sophia đối với toán học. Sự kiện làm thay đổi hẳn cuộc đời của bà đã xảy ra vào một ngày khi bà đang duyệt qua thư viện của người cha và tình cờ gặp cuốn *Lịch sử toán học* của Jean - Etienne Montucla. Chương sách đã hút hồn bà là một tiểu luận của Montucla về cuộc đời Archimedes. Câu chuyện của ông về những phát minh của Archimedes hẳn là hết sức thú vị, nhưng điều đặc biệt hấp dẫn đối với bà là câu chuyện xung quanh cái chết của Archimedes. Archimedes suốt đời sống ở Syracuse và nghiên cứu toán học trong một bối cảnh tương đối thanh bình, nhưng vào những năm cuối ở tuổi thất tuần thì sự bình yên của ông bị cuộc xâm lăng của người La Mã phá tan. Truyền thuyết kể rằng trong cuộc xâm lăng ấy, Archimedes do quá tập trung nghiên cứu các hình khối hình học vẽ trên cát nên đã không trả lời câu hỏi của một tên lính La Mã. Kết quả là tên lính đã rút kiếm đâm chết ông.

Germain đã rút ra kết luận rằng nếu có ai đó đã say mê một bài toán hình học đến mức bị đâm chết thì toán học hẳn phải là một môn học hấp dẫn nhất trên đời. Bà bèn ngay lập tức bắt tay tự học những cơ sở của lý thuyết số và giải tích toán, và chẳng bao lâu sau bà đã phải làm việc rất khuya để nghiên cứu các công trình của Euler và Newton. Niềm say mê một môn học không phải dành cho phụ nữ này đã khiến cho cha mẹ bà hết sức lo lắng. Một người bạn của gia đình là Bá tước Guglielmo Libri-Carrucci dalla Sommaja đã khuyên cha Sophia phải tịch thu nến và quần áo, bỏ lò sưởi để làm nản chí học toán của bà. Chỉ ít năm sau, ở nước Anh, một nhà toán học nữ trẻ tuổi là Maria Someville cũng đã bị cha tịch thu nến và ông kiên quyết tuyên bố rằng: "Chúng ta cần phải chặn đứng điều này lại hoặc tạm thời phải cho nó (tức Mary) mặc áo trói".

Trong trường hợp của Germain, bà đã đối phó lại bằng cách bí mật cất giấu nến và cuốn quanh mình khăn trải giường để chống rét. Libri-Carrucci đã viết rằng những đêm đông lạnh tới mức mực trong lọ đã đóng băng, nhưng bất chấp, Sophia vẫn tiếp tục nghiên cứu. Một số người mô tả bà là người nhút nhát và vụng về, nhưng bà là người vô cùng quyết đoán và rốt cuộc cha mẹ bà đã phải nới lỏng, để mặc cho Sophia muốn làm gì thì làm. Germain không lấy chồng và trên suốt con đường sự nghiệp của bà, người cha đã cung đốn hoàn toàn cho những nghiên cứu của bà. Trong nhiều năm, Germain phải tiếp tục nghiên cứu trong sự đơn độc hoàn toàn, bởi vì trong gia đình không có ai là nhà toán học có thể giới thiệu với bà những ý tưởng mới nhất, còn các ông thầy thì từ chối, không muốn hướng dẫn bà một cách nghiêm túc.

Sau đó, vào năm 1794, trường Đại học Bách khoa được mở ở Paris. Nó được thành lập với mục đích đào tạo ra những nhà toán học và khoa học xuất sắc cho quốc gia. Đây là một nơi lý tưởng để cho Germain có thể phát triển những kỹ năng toán học của mình, trừ một điều là trường này chỉ dành cho con trai. Bản tính nhút nhát của Germain khiến cho bà không dám đối mặt với ban lãnh đạo nhà trường và vì thế bà quyết định đội tên một cựu học sinh là Antoine-August Le Blanc để bí mật theo học ở trường. Phòng hành chính của nhà trường không hề biết rằng chàng Le Blanc thực đã rời Paris và họ vẫn tiếp tục gửi giáo trình và bài tập cho anh ta. Germain đã xoay sở để nhận được những thứ mà người ta định gửi cho Le Blanc và mỗi tuần bà lại phải gửi lời giải các bài tập dưới tên của Le Blanc. Mọi thứ đều diễn ra suôn sẻ cho tới vài tháng sau, khi giáo sư Joseph-Louis Lagrange không thể không nhận thấy sự xuất sắc trong các tờ lời giải của anh chàng Le Blanc. Những lời giải của Le Blanc không chỉ cực kỳ thông minh mà chúng còn chứng tỏ sự tiến bộ ghê gớm của một sinh viên vốn trước đó nổi tiếng là dốt. Lagrange, một trong số những đỉnh cao toán học của thế kỷ XIX, đã yêu cầu được gặp cậu sinh viên có nhiều tiến bộ này và Germain đã buộc phải tiết lộ nhân thân của mình. Lagrange kinh ngạc và hài lòng gặp gỡ người phụ nữ trẻ, rồi sau đó ông trở thành thầy hướng dẫn và là bạn của bà. Cuối cùng, Sophia Germain cũng đã có được một người thầy có khả năng khích lệ bà và là người mà bà có thể cởi mở trao đổi những kỹ năng cũng như những khát vọng của mình.

Germain ngày càng tự tin hơn, bà chuyển từ việc giải các bài toán trong sách bài tập sang nghiên cứu những lĩnh vực còn chưa được khám phá của toán học. Điều quan trọng nhất là bà bắt đầu quan tâm tới lý thuyết số và tất nhiên không thể không nghe nói về Định lý cuối cùng của Fermat. Bà đã làm việc với bài toán này trong suốt vài ba năm và cuối cùng đã đạt tới giai đoạn mà bà tin rằng mình đã tạo được một bước đột phá quan trọng. Bà rất cần thảo luận những ý tưởng của mình với một đồng nghiệp giỏi về lý thuyết số và bà quyết định phải đi thẳng tới đỉnh cao, xin ý kiến của nhà lý thuyết số vĩ đại nhất thế giới, đó là nhà toán học người Đức Carl Friedrich Gauss.

Gauss được thừa nhận là một trong số những nhà toán học xuất sắc nhất đã từng sống trên đời. Trong khi E.T. Bell gọi Fermat là "ông Hoàng Nghiệp dư" thì Gauss được gọi là "ông Hoàng toán học". Germain lần đầu tiên biết tới các công trình của Gauss thông qua việc nghiên cứu một tuyệt phẩm của ông có nhan đề Disquistiones Arithmeticae, một chuyên luận quan trọng nhất và bao quát nhất kể từ thời cuốn *Những yếu tố* của Euclid. Những công trình của Gauss đã có ảnh hưởng đến mọi lĩnh vực của toán học, nhưng một điều thật lạ lùng là ông chưa bao giờ công bố gì về Định lý cuối cùng của Fermat. Trong một bức thư thậm chí ông còn bộc lộ sự khinh bỉ đối với bài toán đó. Bạn ông, nhà thiên văn người Đức Heinrich Olbers, đã viết thư động viên Gauss tham gia cuộc thi tìm lời giải cho thách thức của Fermat do Viện Hàn lâm Paris tổ chức: "Gauss thân mến, mình nghĩ rằng bạn nên để tâm về chuyện đó". Hai tuần sau, Gauss trả lời: "Tôi rất cám ơn anh đã cho tôi biết tin về giải thưởng ở Paris. Nhưng tôi buộc phải thú nhận rằng Định lý cuối cùng của Fermat với tư cách chỉ là một mệnh đề cô lập ít có sự thu hút đối với tôi, vì bản thân tôi cũng có thể đặt ra rất nhiều những mệnh đề như vậy mà người ta không thể chứng minh hoặc bác bỏ được". Gauss có quyền giữ quan điểm của mình, nhưng Fermat đã phát biểu một cách rõ ràng rằng chứng minh đã tồn tại và ngay cả những ý định sau này tìm lại chứng minh đó nhưng bất thành cũng đã làm nảy sinh nhiều kỹ thuật mới, như phương pháp chứng minh giảm vô hạn hay việc dùng các số ảo, chẳng hạn. Cũng có thể trước kia Gauss đã từng thử sức nhưng không đi đến đâu và vì vậy câu trả lời cho Olbers của ông chẳng qua cũng chỉ là trường hợp chùm nho xanh trí tuệ mà thôi. Tuy nhiên, khi nhận được các bức thư của Germain, những đột phá của bà đã gây cho ông ấn tượng đủ để tạm thời quên đi sự ý tứ dè dặt vốn có của ông đối với Định lý cuối cùng của Fermat.

Bảy mươi lăm năm trước, Euler đã công bố chứng minh của ông cho trường hợp n = 3, và rồi từ đó các nhà toán học không chứng minh được thêm một trường hợp riêng nào nữa. Tuy nhiên, Germain đã áp dụng một chiến lược mới và bà đã mô tả cho Gauss cách tiếp cận tổng quát của bài toán. Nói một cách khác, mục đích trước mắt của bà không phải là chứng minh một trường hợp cụ thể nào đó mà là nói được một điều gì đó về nhiều trường hợp ngay một lúc. Trong bức thư của bà gửi Gauss, Germain đã phác thảo những tính toán tập trung vào một loại số nguyên tố p đặc biệt sao cho 2p +1 cũng là một số nguyên tố. Bảng liệt kê các số nguyên tố này có chứa số 5 vì 11 = 2 × 5 +1 cũng là một số nguyên tố, nhưng nó không chứa số 13 vì 27 = 2 × 13 +1 không phải là số nguyên tố.

Đối với các giá trị của n bằng các số nguyên tố của Germain, bà đã dùng một cách lập luận rất thanh nhã để chứng tỏ rằng rất có thể không tồn tại nghiệm của phương trình $x^n + y^n = z^n$. Với cụm từ "rất có thể" là bà muốn nói rằng rất ít khả năng tồn tại một nghiệm nào đó, bởi vì nếu có nghiệm thì các số x, y, z sẽ phải là bội số của n và điều này đặt ra một hạn chế rất ngặt nghèo đối với bất cứ một nghiệm nào. Nhiều đồng nghiệp của Germain đã xem xét kỹ lưỡng từng số một trong bản liệt kê các số nguyên tố của bà nhằm chứng minh rằng x, y, z không thể là bội số của n và do đó chứng minh được rằng với giá trị cụ thể đó của n, phương trình Fermat không có nghiệm.

Năm 1825, phương pháp của bà đã nhận được thành công đầu tiên nhờ Gustav Lejeune-Dirichlet và Adrien-Marie Legendre, hai nhà toán học có tuổi tác cách nhau cả một thế hệ. Legendre là ông già đã ở tuổi thất tuần, người đã sống qua những ngày bão táp của cuộc Cách mạng Pháp. Sự từ chối ủng hộ một ứng viên của chính phủ vào Viện Quốc gia đã khiến ông bị mất lương hưu, và vào thời đó việc ông có những đóng góp giải bài toán Fermat là rất khó khăn. Trái lại, Dirichlet là một nhà lý thuyết số đầy tham vọng, vừa mới bước sang tuổi hai mươi. Cả hai con người độc lập đã chứng minh được rằng trường hợp n = 5 không có nghiệm, nhưng chứng minh cũng như thành công của họ đều nhờ vào công lao của Sophia Germain.

Mười bốn năm sau, một người Pháp khác đã thực hiện được một đột phá mới. Gabriel Lamé đã có những bổ sung tài tình cho phương pháp của Germain và đã chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat cho trường hợp n = 7 (cũng là một số nguyên tố). Như vậy là Gemain đã chỉ ra cho các nhà lý thuyết số cách thức loại đi hàng loạt các số nguyên tố và giờ đây với sự hợp sức của các đồng nghiệp của bà, Định lý cuối cùng của Fermat tiếp tục được chứng minh cho từng trường hợp một.

Công trình của Germain về Định lý cuối cùng của Fermat là đóng góp lớn nhất của bà cho toán học, nhưng phải khá lâu sau nó mới được mọi người thừa nhận. Khi Germain viết thư cho Gauss bà vẫn đang còn ở tuổi hai mươi và mặc dù đã có tiếng tăm ở Paris, nhưng bà vẫn e sợ người đàn ông vĩ đại đó coi thường vì mình là đàn bà. Để bảo vệ mình, Germain lại một lần nữa đội tên Le Blanc khi ký dưới những bức thư gửi cho Gauss.

Sự tôn kính pha chút sợ sệt được thể hiện rõ trong một bức thư bà gửi cho Gauss: "Thật không may, độ sâu trí tuệ của tôi lại không tương xứng với sự tham lam của tôi, vì vậy tôi đành phải liều lĩnh làm phiền một đấng thiên tài như ngài khi tôi không có quyền đòi hỏi sự chú ý của ngài ngoài sự khâm phục mà tất cả những độc giả của ngài nhất thiết phải chia sẻ". Gauss hoàn toàn không biết nhân thân thực của người viết thư cho mình, ông muốn làm cho người đó cảm thấy đỡ bối rối hơn, nên đã đáp lại: "Tôi rất vui mừng thấy rằng số học đã tìm được ở anh một người bạn tài năng như vậy".

Đóng góp của Germain suýt nữa sẽ vĩnh viễn bị sai lầm gán cho anh chàng Le Blanc đầy bí ẩn, nếu như không có Hoàng đế Napoleon. Năm 1806, Napoleon xâm chiếm nước Phổ và quân đội Pháp tràn qua hết thành phố này đến thành phố khác. Germain sợ rằng số phận giáng xuống đầu Archimedes cũng sẽ lại lấy đi cuộc sống của Gauss, một người anh hùng vĩ đại khác của bà. Vì vậy bà đã gửi một bức thư cho bạn bà là tướng Joseph-Marie Pernety, người đang chịu trách nhiệm chỉ huy các lực lượng tiền phương. Bà đã đề nghị viên tướng đảm bảo an toàn cho Gauss, và kết quả là viên tướng đã quan tâm đặc biệt tới nhà toán học người Đức đồng thời cũng giải thích cho ông ta biết rằng mạng sống của ông ta giữ được là nhờ một cô gái người Pháp tên là Sophia Germain. Gauss hết sức biết ơn nhưng vô cùng ngạc nhiên vì ông chưa bao giờ nghe thấy cái tên đó.

Rồi trò chơi cũng đến hồi kết thúc. Trong bức thư tiếp sau gửi cho Gauss, Germain đã miễn cưỡng phải tiết lộ nhân thân thực của mình. Không hề tỏ ra tức giận vì bị lừa dối, Gauss đã rất vui mừng viết thư trả lời:

> Làm sao có thể mô tả được sự khâm phục và kinh ngạc của tôi đối với cô, khi biết rằng người trao đổi thư từ đáng kính của tôi là Ông Le Blanc lại biến hình thành một nhân vật nổi tiếng, người đã cho một ví dụ chói sáng về điều mà tôi thấy khó có thể tin

được. Năng khiếu đối với các khoa học trừu tượng mà trên hết là bí mật của các con số là cực kỳ hiếm hoi: đây là chuyện không có gì đáng ngạc nhiên, bởi vì cái vẻ đẹp quyến rũ của khoa học siêu đẳng này chỉ hé lộ cho những ai có dũng cảm đi sâu vào nó. Nhưng khi một người thuộc giới tính, mà theo tập quán và định kiến sẽ gặp vô vàn khó khăn hơn nam giới trong việc tiếp cận với những nghiên cứu rất hóc búa này, đã thành công vượt qua được những trở ngại đó và đi sâu được vào những phần tối tăm nhất của nó, thì không nghi ngờ gì nữa người đó phải có lòng dũng cảm cao quý nhất, có tài năng đặc biệt và thiên tài siêu đẳng. Thực tế không gì có thể chứng minh cho tôi một cách hãnh diện và tin chắc rằng sự hấp dẫn của khoa học này - khoa học đã làm giàu có cho cuộc đời tôi với biết bao niềm vui - không phải là chuyện hão huyền, bằng sự ưa chuộng mà bà đã làm vinh dự cho nó.

Sự trao đổi thư với Carl Gauss đã tạo nhiều cảm hứng cho công việc nghiên cứu của Sophia Germain, nhưng vào năm 1808 mối quan hệ đó đột ngột chấm dứt. Gauss được bổ nhiệm làm giáo sư thiên văn học tại Đại học Gottingen, do vậy mối quan tâm của ông bây giờ được chuyển sang những lĩnh vực toán học có tính ứng dụng hơn, và ông không còn bận tâm đến chuyện trả lời những bức thư của Germain nữa. Không có thầy hướng dẫn, sự tự tin của bà giảm dần và một năm sau bà bỏ hẳn toán học thuần túy.

Mặc dù không có những đóng góp thêm nữa cho việc chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat, nhưng bà lại dấn thân vào một sự nghiệp cũng rất sôi động của một nhà vật lý, một lĩnh vực mà bà cũng đã nổi lên như một gương mặt xuất sắc, nhưng lại cũng phải chịu rất nhiều định kiến. Đóng góp quan trọng nhất của bà trong lĩnh vực này là “Luận văn về dao động của các tấm đàn hồi”, một bài báo xuất sắc đặt nền móng cho lý thuyết đàn hồi hiện đại. Do công trình này và công trình về Định lý cuối cùng của Fermat bà đã được Viện Pháp quốc trao huy chương và là người phụ nữ đầu tiên được dự nghe giảng tại Viện Hàn lâm Khoa học Pháp mà không với tư cách là vợ của một Viện sĩ. Sau này, vào những năm tháng cuối đời, bà có nối lại quan hệ với Carl Gauss, người đã thuyết phục được trường Đại học Gottingen tặng cho bà bằng danh dự. Thật đáng tiếc, trường Gottingen chưa kịp trao cho bà vinh dự đó thì bà đã qua đời do bệnh ung thư vú.

> Cân nhắc mọi mặt thì bà có lẽ là người phụ nữ có trí tuệ sâu sắc nhất mà nước Pháp đã sản sinh ra. Thế mà, lạ lùng thay, khi một nhân viên nhà nước đến làm giấy khai tử cho bà, y lại ghi cho bà là rentière-annuitant (có nghĩa là một phụ nữ độc thân không nghề nghiệp) chứ không là nhà nữ toán học. Nhưng chưa hết. Khi tháp Eiffel được xây dựng, những kỹ sư buộc phải chú ý tới tính đàn hồi của các vật liệu được sử dụng, và người ta đã ghi trên công trình đồ sộ này tên tuổi của 72 nhà bác học. Thế nhưng người ta không tìm thấy trong danh sách đó tên tuổi người phụ nữ thiên tài mà những nghiên cứu của bà đã đóng góp rất nhiều cho việc hình thành lý thuyết đàn hồi của kim loại, đó là Sophia Germain. Phải chăng bà bị loại ra khỏi danh sách đó cũng vì chính những lý do khiến cho Agnesi đã không được bầu vào Viện Hàn lâm Pháp, vì bà là phụ nữ? Dường như đúng là như vậy. Và nếu quả thật là như thế đối với Germain, thì sẽ lại càng đáng xấu hổ hơn nữa cho kẻ đã chịu trách nhiệm về sự vô ơn đối với một người hết sức xứng đáng của khoa học và là người với những thành tựu của mình đã dành được một vị trí đáng ước ao trên đài vinh quang.
>
> H.J.MOZANS, 1913

Những chiếc phong bì gắn xi

Sau đột phá của Sophia Germain, Viện Hàn lâm Khoa học Pháp đã đặt ra một loạt giải thưởng, bao gồm huy chương vàng và 30.000 franc cho nhà toán học nào đi được đến cùng trong việc khám phá những bí mật của Định lý cuối cùng của Fermat. Ngoài uy tín do chứng minh được định lý này ra, còn có một phần thưởng rất có giá trị gắn với thách thức đó. Các phòng tiếp ở Paris ầm ĩ những tin đồn về chiến lược mà người này hay người kia sẽ sử dụng và họ đã gần tới ngày công bố kết quả tới mức nào. Rồi sau đó, vào ngày 1 tháng 3 năm 1847, Viện Hàn lâm đã tổ chức một cuộc họp đầy kịch tính nhất mà người ta từng biết.

Tập kỷ yếu đã mô tả Gabriel Lamé, người vừa mới chứng minh được trường hợp n = 7 năm trước, đã bước lên diễn đàn trước các nhà toán học xuất sắc nhất thời đó và tuyên bố rằng ông đã sắp sửa chứng minh xong Định lý cuối cùng của Fermat. Ông thừa nhận rằng chứng minh của ông còn chưa hoàn tất, nhưng ông cũng đã vạch ra được những nét chính trong phương pháp của mình và lạc quan tiên đoán rằng trong mấy tuần tới ông sẽ cho công bố chứng minh hoàn chỉnh của mình trong tạp chí của Viện Hàn lâm.

Toàn bộ cử tọa hoàn toàn sững sờ, ngay khi Lamé rời diễn đàn thì Augustin Louis Cauchy, một nhà toán học xuất sắc khác của Paris hồi đó, đứng lên xin phát biểu. Cauchy cũng tuyên bố với Viện Hàn lâm rằng ông cũng đang tiến hành nghiên cứu theo đường hướng tương tự như Lamé và ông cũng sắp sửa công bố một chứng minh hoàn chỉnh.

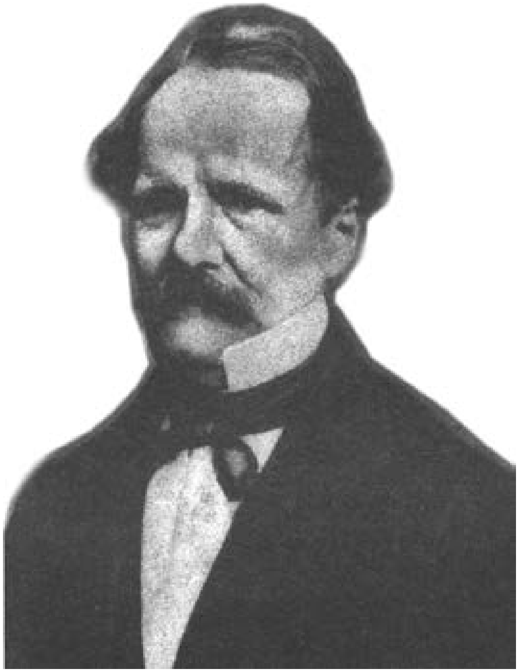
Cả Cauchy lẫn Lamé đều nhận thấy rằng vấn đề thời gian là yếu tố rất quyết định. Ai trình sớm chứng minh hoàn chỉnh sẽ là người

Gabriel Lameù

được nhận giải thưởng đầy uy tín và rất có giá trị trong toán học. Mặc dù, cả hai người chẳng ai có được chứng minh hoàn chỉnh, nhưng hai đối thủ đều lớn tiếng tuyên bố những tham vọng của mình và chỉ ba tuần sau lời tuyên bố của mình, họ đã nộp cho Viện Hàn lâm hai phong bì gắn xi kín mít. Đây là thông lệ ở thời đó, nó cho phép các nhà toán học đăng ký mà không cần phải tiết lộ những chi tiết chính xác trong công trình của họ. Nếu sau này xảy ra tranh chấp về nguồn gốc của những ý tưởng ban đầu, thì những phong bì gắn xi này sẽ cung cấp bằng chứng để xác lập ai là người đã đưa ra trước.

Augustin Cauchy

Sự nôn nóng chờ đợi kéo dài suốt tháng tư, rồi cuối cùng Cauchy và Lamé cũng đã công bố những chi tiết chứng minh nhưng còn nhiều úp mở và mơ hồ trong kỷ yếu của Viện Hàn lâm. Mặc dù toàn bộ cộng đồng toán học đều nóng lòng muốn được thấy chứng minh hoàn chỉnh, nhưng nhiều người trong họ đã âm thầm hy vọng rằng người thắng trong cuộc đua này là Lamé chứ không phải Cauchy. Theo ý kiến chung, thì Cauchy là người lúc nào cũng xem mình là đúng, một người cuồng tín và rất không được đồng nghiệp ưa thích. Ông được chấp nhận ở Viện Hàn lâm chẳng qua là do tài năng xuất sắc của mình mà thôi.



Ernst Kummer

Nhưng sau đó, ngày 24 tháng 5, một thông báo đã làm chấm dứt mọi phỏng đoán. Người trình bày trước Viện Hàn lâm lần này không phải là Cauchy cũng chẳng phải Lamé mà lại là Joseph Liouville. Liouville đã làm cho cử tọa choáng váng khi đọc nội dung bức thư của nhà toán học người Đức Ernst Kummer.

Kummer là nhà lý thuyết số thuộc đẳng cấp cao nhất, nhưng trong lúc đang có nhiều hứa hẹn nhất trên con đường sự nghiệp của mình thì lòng yêu nước cuồng nhiệt được đốt cháy bởi sự căm thù đối với Napoleon đã làm chệch chí hướng của ông. Hồi Kummer còn nhỏ, quân Pháp xâm chiếm Sorau, thành phố quê hương ông, và mang tới nạn dịch lao phổi. Cha Kummer là bác sĩ của thành phố và chỉ trong ít tuần ông cũng đã bị mắc căn bệnh đó. Bị thương tổn bởi trải nghiệm đó, Kummer đã thề sẽ làm hết sức mình để bảo vệ quê hương chống lại những cuộc tấn công sau này, và ngay sau khi tốt nghiệp đại học ông đã dùng trí tuệ của mình để giải bài toán vẽ quỹ đạo của các viên đạn đại bác. Cuối cùng, ông chuyên dạy các quy luật đạn đạo cho một trường quân sự ở Berlin.

Song song với sự nghiệp nhà binh của mình, Kummer rất tích cực theo đuổi việc nghiên cứu toán học thuần túy và biết rất đầy đủ về câu chuyện đang diễn ra tại Viện Hàn lâm Pháp. Ông đã đọc rất kỹ tập kỷ yếu và phân tích những chi tiết ít ỏi mà Cauchy và Lamé đã tiết lộ. Đối với Kummer thì hai nhà toán học Pháp này chắc chắn đang tiến tới cùng một ngõ cụt về logic và ông đã trình bày những lý lẽ của ông trong bức thư gửi cho Liouville.

Theo Kummer vấn đề căn bản ở đây là chứng minh của Cauchy cũng như của Lamé đều dựa trên việc dùng một tính chất của các số nguyên có tên là phân tích tiêu chuẩn. Phân tích tiêu chuẩn nói rằng *chỉ có một tổ hợp duy nhất các số nguyên tố mà khi nhân với nhau sẽ nhận được số đã cho.* Ví dụ, tổ hợp duy nhất các số nguyên tố tạo nên số 18 là như sau:

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

Tương tự, những số dưới đây có phân tích tiêu chuẩn như sau:

$$35 = 5 \times 7$$

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

$$106.260 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 23$$

Phân tích tiêu chuẩn đã được Euclid phát hiện từ thế kỷ thứ IV trước Công nguyên. Ông đã chứng minh được rằng nó đúng đối với mọi số tự nhiên và đã mô tả chứng minh đó trong quyển IX của bộ *Cơ sở*. Việc phân tích tiêu chuẩn đúng với mọi số tự nhiên là yếu tố sống còn đối với nhiều chứng minh khác và ngày hôm nay nó được gọi là định lý cơ bản của số học.

Thoạt nhìn thì không có lý do gì để Cauchy và Lamé không thể dựa trên phân tích tiêu chuẩn, như hàng trăm nhà toán học trước họ đã làm. Không may là chứng minh của cả hai người lại đều liên quan với các số ảo. Mặc dù phân tích tiêu chuẩn là đúng đối với các số nguyên thực, nhưng Kummer chỉ ra rằng điều đó không nhất thiết phải đúng đối với các số ảo. Theo ông cái sai chết người là ở chỗ đó.

Ví dụ, nếu chúng ta chỉ giới hạn xét các số thực thì số 12 chỉ được phân tích duy nhất dưới dạng 12 = 2×2×3. Tuy nhiên, nếu cho phép các số ảo có mặt trong chứng minh của chúng ta, thì số 12 bây giờ còn có thể được phân tích theo cách sau:

$$12 = (1+\sqrt{-11}) \times (1-\sqrt{-11})^{(*)}$$

trong đó $(1+\sqrt{-11})$ là một số phức, tức là một tổ hợp của số thực và số ảo. Mặc dù phép nhân bây giờ phức tạp hơn so với các số thông thường, nhưng sự tồn tại của các số phức đã dẫn tới một cách phân tích khác của số 12. Một cách phân tích khác nữa của số 12 là $(2+\sqrt{-8}) \times (2-\sqrt{-8})$. Như vậy bây giờ không còn phân tích duy nhất nữa, mà là chọn các phân tích.

Sự mất đi phân tích duy nhất đã làm hư hại nghiêm trọng những chứng minh của Cauchy và Lamé, nhưng không nhất thiết phá hủy

* hằng đẳng thức (a-b) (a+b) = $a^2 - b^2$ với $i^2 = -1$

nó hoàn toàn. Những chứng minh này được dự định nhằm chứng tỏ rằng phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên đối với mọi giá trị của n lớn hơn 2. Như đã được thảo luận ở trên, chứng minh này chỉ cần đúng đối với những giá trị nguyên tố của n. Bằng cách sử dụng những kỹ thuật khác nữa, Kummer đã chứng minh được rằng có thể phục hồi lại phân tích duy nhất đối với những giá trị khác nhau của n. Ví dụ, vấn đề phân tích duy nhất có thể né tránh được đối với tất cả các số nguyên tố không lớn hơn 31. Tuy nhiên, số nguyên tố 37 lại không thể xử lý dễ dàng như vậy được. Trong số các số nguyên tố khác nhỏ hơn 100, thì hai số nguyên tố n = 59 và 67 cũng là những trường hợp rất khó khăn. Những số nguyên tố gọi là bất thường này nằm rải rác giữa các số nguyên tố còn lại và giờ đây là vật chướng ngại đối với một chứng minh hoàn chỉnh.

Kummer đã chỉ ra rằng không có một công cụ toán học đã biết nào cho phép xử lý được tất cả các số bất thường đó ngay một lúc. Tuy nhiên, ông tin rằng bằng những kỹ thuật thích hợp cho từng số nguyên tố bất thường riêng rẽ, chúng có thể lần lượt được xử lý từng số một. Việc thực hiện những kỹ thuật riêng rẽ này là một công việc cực kỳ chậm chạp và nặng nhọc, nhưng tồi tệ hơn cả là số lượng số nguyên tố bất thường lại cũng là vô hạn. Toàn thể cộng đồng các nhà toán học trên khắp thế giới phải làm việc cho đến khi chấm hết thời gian mới có thể xử lý xong.

Bức thư của Kummer đã tác động ghê gớm đến Lamé. Thực ra, nhìn lại thì giả thiết về phân tích duy nhất quá lắm cũng chỉ là do quá lạc quan và tệ nhất thì cũng chỉ là do thiếu cẩn trọng mà thôi. Chính Lamé cũng nhận thấy rằng nếu như ông tiết lộ nhiều hơn về công trình của mình thì chắc là sai lầm của ông đã được phát hiện ra sớm hơn. Trong một bức thư gửi Dirichlet, một đồng nghiệp của ông ở Berlin, ông viết: "Nếu chỉ cần anh ở Paris hoặc là tôi ở Berlin thì tất cả những chuyện này đã không xảy ra".

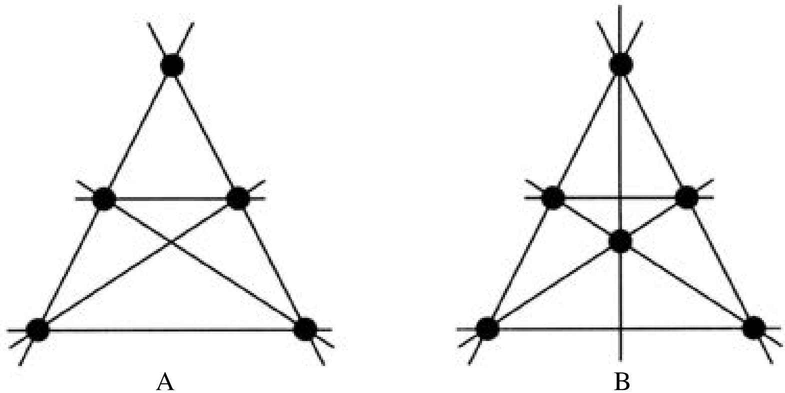
Trong khi Lamé cảm thấy mình bị hạ nhục, thì Cauchy vẫn chưa chịu chấp nhận thất bại. Ông cảm thấy rằng so với cách chứng minh của Lamé thì cách của ông ít dựa trên phân tích duy nhất hơn, và chừng nào sự phân tích của Kummer còn chưa được kiểm tra một cách đầy đủ thì còn có khả năng nó cũng có thể phạm sai lầm. Trong một vài tuần, ông vẫn tiếp tục công bố những bài báo về đề tài này, nhưng vào cuối mùa hè thì ông cũng im tiếng luôn.

Kummer đã chứng tỏ được rằng một chứng minh hoàn chỉnh của Định lý Fermat nằm ngoài mọi cách tiếp cận toán học hiện có. Đây là một công trình xuất sắc về logic toán, nhưng là một đòn nặng nề giáng xuống cả một thế hệ các nhà toán học, những người đang nuôi hy vọng có thể giải được bài toán hóc búa nhất thế giới.

Năm 1857, trong bản báo cáo kết thúc cuộc thi chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat của Viện Hàn lâm, Cauchy tổng kết tình hình trên như sau:

Báo cáo về cuộc thi giành Giải thưởng lớn trong toán học. Mở đầu vào năm 1853 và kéo dài tới năm 1856

> Đã có mười một công trình được gửi tới Ban thư ký. Nhưng không có công trình nào giải được bài toán đặt ra. Như vậy là sau nhiều lần được đưa ra treo giải, bài toán vẫn còn nằm nguyên tại chỗ mà ngài Kummer đã để lại. Tuy nhiên, toán học cũng nên chúc mừng họ vì những công trình đã được tiến hành bởi các nhà hình học với



Hình 13. Trong các giản đồ trên mỗi chấm được nối với mỗi chấm khác bằng một đường thẳng. Liệu có thể dựng được một giản đồ trong đó mỗi đường có chứa ba điểm không?

> mong muốn giải được bài toán đặt ra, mà chủ yếu là công trình của ngài Kummer; và các ủy viên hội đồng nghĩ rằng Viện Hàn lâm sẽ làm được một quyết định danh dự và hữu ích nếu như rút lại bài toán thi và trao huy chương cho ngài Kummer vì những nghiên cứu rất tuyệt vời của ông về các số phức tạo bởi căn của đơn vị và các số nguyên.

Như vậy là trong hơn hai thế kỷ, mọi ý định phát hiện lại chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat đều kết thúc thất bại. Trong suốt thời thiếu niên của mình cho tới tuổi 20, Andrew Wiles đã bỏ công nghiên cứu các công trình của Euler, Germain, Cauchy, Lamé và cuối cùng là Kummer. Anh hy vọng có thể học được điều gì đó từ những sai lầm của họ, nhưng vào thời anh tốt nghiệp Đại học Oxford, thì chính anh cũng lại phải đương đầu trước bức tường gạch mà Kummer đã từng phải đối mặt.

Một số người đương thời với Wiles đã bắt đầu ngờ rằng đây là bài toán không thể giải được. Có lẽ Fermat đã tự lừa dối mình và do đó nguyên nhân của việc không ai phát hiện lại được chứng minh của Fermat đơn giản chỉ là chứng minh đó không hề tồn tại. Mặc dù có sự hoài nghi đó, Wiles vẫn tiếp tục tìm kiếm chứng minh. Anh được khích lệ bởi biết rằng trong quá khứ đã từng có một số trường hợp những chứng minh cuối cùng cũng đã được phát hiện sau nhiều thế kỷ nỗ lực. Và trong một số trường hợp, cái chớp sáng của trực giác đã cho phép giải được bài toán mà không phải dựa vào những kiến thức mới của toán học, đó là lời giải mà lẽ ra đã được thực hiện rất lâu từ trước.

Một ví dụ về một bài toán đã không sao giải được hàng chục năm là giả thuyết các điểm. Thách thức này có liên quan tới một dãy các điểm được nối với nhau bằng các đường thẳng, chẳng hạn như sơ đồ các điểm được minh họa trên hình 13. Giả thuyết này nói rằng không thể vẽ được một sơ đồ các điểm sao cho mỗi đường có trên nó ít nhất ba điểm (trừ sơ đồ trong đó các điểm đều nằm trên cùng một đường thẳng). Chắc chắn là bằng cách thực nghiệm với một số ít sơ đồ ta đều thấy giả thuyết trên là đúng. Ví dụ, hình 13(a) có 5 điểm được nối với nhau bởi 6 đường thẳng, trong đó bốn đường không chứa trên nó ba điểm, và điều này rõ ràng là không thỏa mãn yêu cầu mỗi đường phải chứa ba điểm. Bằng cách thêm vào sơ đồ một điểm và đường có liên quan, như trong hình 13(b), số các đường không chứa ba điểm rút xuống chỉ còn ba. Tuy nhiên, mọi cố gắng biến đổi sơ đồ hơn nữa để cho tất cả các đường đều chứa ba điểm dường như là không thể làm được. Tất nhiên điều đó chưa thể chứng minh được những sơ đồ như vậy là không tồn tại.

Nhiều thế hệ các nhà toán học đã thử tìm chứng minh cho giả thuyết bề ngoài quá ư đơn giản đó nhưng đều đã thất bại. Điều làm cho giả thuyết này còn trở nên trớ trêu hơn nữa là khi tìm ra được chứng minh, thì nó lại chỉ dùng đến một số tối thiểu tri thức toán học cộng với đôi chút khéo léo. Chứng minh này được trình bày vắn tắt trong Phụ lục 6.

Có khả năng là tất cả những kỹ thuật cần thiết để chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat đã có sẵn và cái duy nhất mà ta còn thiếu chỉ là đôi chút khôn khéo mà thôi. Dù thế nào thì sự chuẩn bị của Wiles không phải là để đầu hàng: việc tìm kiếm chứng minh cho Định lý cuối cùng của Fermat đã chuyển từ niềm ham mê thơ trẻ thành một nỗi ám ảnh đã hoàn toàn trưởng thành. Sau khi đã học được tất cả những cái cần phải học trong toán học thế kỷ XIX, Wiles quyết định phải trang bị cho mình những kỹ thuật của thế kỷ XX.

IV
ĐI VÀO TRỪU TƯỢNG

> Chứng minh là một thần tượng mà trước đó nhà toán học tự hành hạ mình.
>
> SIR ARTHUR EDDINGTON

Tiếp theo sau công trình của Ernst Kummer, niềm hy vọng tìm ra chứng minh cho Định lý cuối cùng dường như mờ nhạt hơn bao giờ hết. Hơn nữa, các nhà toán học đã bắt đầu chuyển sang những lĩnh vực nghiên cứu khác và có nguy cơ thế hệ các nhà toán học mới rồi sẽ vứt bỏ bài toán dường như không thể giải được đó. Vào đầu thế kỷ XX, bài toán này vẫn chiếm một vị trí đặc biệt trong trái tim các nhà lý thuyết số, nhưng họ đã nhìn nhận Định lý cuối cùng của Fermat giống như các nhà hóa học nhìn nhận môn giả kim thuật. Cả hai đều là những giấc mơ bay bổng điên rồ của quá khứ.

Nhưng đến năm 1908, một nhà công nghiệp Đức ở Darmstadt là Paul Wolfskehl đã làm cho bài toán này kéo dài được sự sống của nó. Gia đình Wolfskehl nổi tiếng vì sự giầu có và sự bảo trợ của họ đối với nghệ thuật và khoa học, Paul không phải là một ngoại lệ. Ông đã học toán tại trường đại học và, tuy dành hầu hết thời gian trong cuộc sống cho việc xây dựng đế chế buôn bán của gia đình, ông vẫn duy trì quan hệ tiếp xúc với các nhà toán học chuyên nghiệp và tiếp tục đắm mình trong lý thuyết số. Đặc biệt Wolfskehl đã không chịu từ bỏ Định lý cuối cùng của Fermat.

Paul Wolfskeh

Wolfskehl không phải là một nhà toán học có năng khiếu thiên bẩm và định mệnh cũng không dành cho ông sự đóng góp quan trọng nào cho việc tìm một chứng minh cho Định lý cuối cùng. Tuy nhiên, nhờ một chuỗi các sự kiện kỳ lạ, ông đã trở thành một người gắn bó mãi mãi với bài toán của Fermat, và truyền cảm hứng cho hàng ngàn người khác đương đầu với thách thức này.

Câu chuyện bắt đầu với nỗi ám ảnh của Wolfskehl về một người đàn bà mà danh tính chưa bao giờ được tiết lộ. Chán nản đối với Wolfskehl, người đàn bà bí hiểm này đã từ chối ông và ông đã rơi vào trạng thái hoàn toàn thất vọng đến nỗi ông quyết định tự tử. Ông là một người đàn ông say đắm, nhưng không nông nổi, và ông đã trù liệu cho cái chết của mình với những chi tiết kỹ lưỡng. Ông chọn ngày để tự tử và sẽ tự bắn vào đầu mình khi đồng hồ điểm đúng 12 giờ đêm. Trong những ngày còn lại, ông đã giải quyết tất cả những công việc buôn bán còn tồn tại, và vào ngày cuối cùng, ông ngồi viết di chúc, rồi soạn thảo thư từ cho tất cả bạn bè thân thiết và gia đình.

Wolfskehl đã giải quyết mọi việc mỹ mãn đến nỗi mọi thứ đều đã được hoàn tất xong xuôi trước thời hạn chót giữa đêm của ông, và trong lúc chờ đợi thời giờ trôi qua, ông đi tới tủ sách và bắt đầu duyệt qua các tài liệu toán học đã được công bố. Một lúc sau ông bỗng bị hút vào công trình kinh điển của Kummer giải thích sự thất bại của Cauchy và Lamé. Đó là một trong những phép tính rất khó của thời đại đó và thật thích hợp cho một nhà toán học đang muốn tự tử đọc trong những giây phút cuối cùng. Wolfskehl lần theo từng dòng một trong tính toán của Kummer. Bỗng nhiên ông phát hiện thấy một chỗ có vẻ như thiếu logic - Kummer đưa ra một giả thuyết và đã phạm sai lầm trong một bước lý luận. Wolfskehl băn khoăn không biết là ông đã khám phá ra một sai lầm nghiêm trọng hay giả thuyết của Kummer thực sự là đúng. Nếu ý nghĩ thứ nhất đúng thì có cơ may là việc chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat có thể sẽ dễ dàng hơn người ta tưởng rất nhiều.

Ông ngồi xuống, xem xét kỹ đoạn chứng minh không thỏa đáng, và đắm mình vào việc phát triển một chứng minh phụ, chứng minh này hoặc sẽ cứu vãn công trình của Kummer hoặc sẽ chứng tỏ giả thuyết của ông ấy sai, khi đó toàn bộ công trình của Kummer sẽ là vô giá trị. Lúc trời hửng sáng thì công việc của Wolfskehl cũng xong xuôi. Tin xấu đã đến với thế giới toán học: chứng minh của Kummer đã phạm một sai lầm và như thế Định lý cuối cùng vẫn sẽ tiếp tục là điều bí ẩn; nhưng giờ khắc ấn định cho việc tự tử đã trôi qua, và Wolfskehl rất tự hào với việc ông đã phát hiện và sửa chữa một thiếu sót trong công trình của một nhà toán học lớn như Ernst Kummer, đến nỗi sự thất vọng và buồn phiền của Wolfskehl đã tan biến. Toán học đã hồi sinh khát vọng của ông đối với cuộc sống.

Wolfskehl xé những lá thư vĩnh biệt, viết lại di chúc dưới ánh sáng của những gì đã xảy ra vào đêm hôm trước. Ông mất năm 1908, bản di chúc mới của ông đã được đem ra đọc, và gia đình của Wolfskehl bị sốc khi biết rằng Paul đã để lại một phần lớn tài sản làm giải thưởng trao tặng cho ai có thể chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Giải thưởng trị giá 100.000 mác (mác là đơn vị tiền của nước Đức, thường được viết tắt là DM- ND), tương đương với hơn 1.000.000 bảng Anh bây giờ (khoảng 1,75 triệu USD, lớn hơn giải Nobel hiện nay- ND), là cách để ông trả món nợ cho câu đố đã cứu cuộc đời của ông.

Số tiền đó được giao cho Hội Konigliche Gesellschaft der Wissenschaften ở Gottingen, và trong cùng năm đó Hội này đã chính thức thông báo cuộc thi giành Giải Wolfskehl như sau:

> Căn cứ trên quyền hạn do tiến sĩ Paul Wolfskehl, mất tại Darmstadt, trao cho chúng tôi, chúng tôi lập ra một quỹ giải thưởng một trăm ngàn mác, để tặng cho người đầu tiên giải được định lý lớn của Fermat.
>
> Sau đây là những quy định phải tuân thủ:
>
> (1) Hội Konigliche Gesellschaft der Wissenschaften ở Gottingen sẽ có tự do tuyệt đối trong việc quyết định lựa chọn ai sẽ là người xứng đáng được trao Giải thưởng. Hội từ chối nhận bất kỳ bản thảo nào được viết chỉ với mục đích tham gia cuộc thi để giành Giải thưởng này. Hội chỉ xem xét những luận văn toán học đã xuất hiện dưới dạng một chuyên đề công bố trên các tạp chí định kỳ, hoặc một ấn bản bầy bán trong các hiệu sách. Hội đề nghị tác giả của những luận văn đó gửi ít nhất năm bản.
>
> (2) Các công trình được công bố với một ngôn ngữ mà các nhà học giả chuyên môn được chọn vào ban giám khảo không hiểu sẽ bị loại khỏi cuộc thi. Tác giả của những công trình đó được phép thay thế luận văn của mình bằng các bản dịch với đầy đủ sự tin cậy.
>
> (3) Hội từ chối trách nhiệm đối với việc xem xét các công trình mà Hội không được thông báo, cũng như đối với những sai sót có thể xảy ra do việc Hội không biết tác giả của công trình đó, hoặc một phần của công trình đó.
>
> (4) Hội sẽ giữ quyền quyết định trong trường hợp có nhiều người khác nhau cùng có công tìm ra lời giải của bài toán, hoặc đối với trường hợp lời giải là kết quả của sự tổng hợp nỗ lực của một vài học giả, đặc biệt có liên quan đến việc phân chia giải.

(5) Việc trao Giải thưởng sẽ diễn ra không sớm hơn hai năm sau khi công bố luận văn sẽ được trao giải. Khoảng thời gian chờ đợi này nhằm để các nhà toán học Đức và nước ngoài phát biểu ý kiến của mình về sự hợp thức của lời giải đã được công bố.

(6) Ngay sau khi Giải thưởng được Hội quyết định trao tặng, một thư ký thay mặt cho Hội sẽ thông báo cho người đoạt giải; kết quả sẽ được công bố ở tất cả những nơi nào mà giải thưởng đã được thông báo trong năm trước. Việc trao Giải thưởng bởi Hội sẽ không còn là đề tài của bất kỳ một cuộc thảo luận nào thêm nữa.

(7) Số tiền của Giải thưởng sẽ được trao cho người đoạt giải sau ba tháng kể từ khi trao giải, tại Ngân khố Hoàng gia của Đại học Gottinggen, hoặc tại bất kỳ nơi nào khác mà người nhận chỉ định, nhưng phải tự gánh chịu mọi rủi ro, mất mát.

(8) Giá trị vốn của Giải thưởng sẽ được giao trả kèm theo biên nhận, theo ý của Hội, hoặc bằng tiền mặt, hoặc chuyển sang những giá trị tài chính khác tương đương, dù cho giá trị tổng cộng của nó vào lúc cuối ngày đó có thể không đạt được 100.000 mác.

(9) Nếu đến ngày 13 tháng 9 năm 2007 mà Giải thưởng vẫn chưa được trao tặng cho ai, thì mọi đăng ký tham dự giải sau đó đều sẽ không được chấp nhận.

Cuộc thi giành Giải thưởng Wolfskehl đã bắt đầu kể từ hôm nay, dưới những điều kiện đã nói ở trên.

Gottingen, 27 tháng 6 năm 1908
Die Konigliche Gesellschaft der Wissenschaften

Cần phải nhấn mạnh rằng mặc dù Ủy ban trao giải sẽ tặng 100.000 mác cho người đầu tiên chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat là đúng, nhưng họ sẽ chẳng trao tặng một xu nào cho bất kỳ ai chứng minh rằng định lý đó là sai!

Giải thưởng Wolfskehl được thông báo trên tất cả các tạp chí toán học và tin tức về cuộc thi nhanh chóng lan khắp châu Âu. Bất chấp cả một chiến dịch quảng cáo và sự khích lệ thêm của một giải thưởng lớn, Ủy ban Wolfskehl đã thất bại trong việc đánh thức sự quan tâm đặc biệt của các nhà toán học nghiêm túc. Đa số các nhà toán học chuyên nghiệp đã coi Định lý cuối cùng của Fermat như một thứ vô vọng và họ quyết định chẳng dại gì mà lãng phí sự nghiệp của họ để làm một việc vớ vẩn như vậy. Tuy nhiên, giải thưởng đã thành công trong việc giới thiệu bài toán đến một nhóm công chúng hoàn toàn mới, cả một đội quân háo hức muốn dấn thân tìm hiểu câu đố tối hậu này và tiếp cận nó theo một con đường hết sức ngây thơ.

Thời đại của những câu đố và những trò đố bí hiểm

Kể từ thời Hy Lạp đến nay, các nhà toán học đã tìm cách làm cho những cuốn sách giáo khoa của họ thêm đậm đà bằng cách trình bày lại các chứng minh và các định lý dưới dạng lời giải của những câu đố về các con số. Suốt nửa sau của thế kỷ XIX, kiểu tiếp cận mang màu sắc trò chơi này đã xuất hiện trên báo chí phổ thông; và những câu đố về các con số thường xuất hiện dưới dạng các trò chơi ô chữ hoặc đảo chữ thu hút số độc giả cho các mục đố vui toán học, bao gồm cả *Định lý cuối cùng của Fermat,* ngày càng tăng lên, kể cả những người không chuyên.

Có lẽ tác giả của những câu đố phong phú nhất là Henry Dudeney, ông viết cho rất nhiều báo và tạp chí, trong đó có các tờ

Strand, Cassell, Queen, Tit-Bits, Weekly Dispatch và Blightly. Một tác giả nổi tiếng khác thời Victoria là đức cha Charles Dodgson, giảng viên toán học tại trường Christ Church ở Oxford, được biết nhiều dưới tên Lewis Carroll. Dodgson đã dành nhiều năm để biên soạn một bộ sách khổng lồ gồm các câu đố với đầu đề Curiosa Mathematica, và mặc dầu bộ sách chưa hoàn tất, nhưng ông đã viết được một số tập, bao gồm *Những bài toán gối đầu giường.*

Người vĩ đại nhất trong số tất cả các người viết câu đố là Sam Loyd (1841-1911), một người Mỹ phi thường, ngay từ tuổi niên thiếu đã có được một tài sản giàu có nhờ sáng tạo ra những câu đố mới và tái chế lại những câu đố cũ. Trong cuốn *Sam Loyd và những trò đố của ông: Một tiểu sử tự thuật,* ông viết rằng một số trò đố đầu tiên của ông đã được sáng tạo cho chủ một gánh xiếc và cũng là một nhà ảo thuật tên là P.T.Barnum:

> Nhiều năm trước đây, khi gánh xiếc của Barnum còn đang là "một chương trình biểu diễn vĩ đại nhất trên Trái đất", nhà ảo thuật nổi tiếng đã tìm đến tôi để nhờ chuẩn bị cho ông ta một loạt trò đố có thưởng nhằm mục đích quảng cáo. Những trò chơi đó đã trở nên nổi tiếng rộng khắp dưới cái tên "Những câu hỏi của con Nhân sư", do có nhiều giải thưởng lớn dành cho những ai giải được chúng.

Điều lạ lùng là cuốn tiểu sử tự thuật này được viết vào năm 1928, tức 17 năm sau khi Loyd mất. Loyd đã truyền lại những cái tinh khôn cho cậu con trai cùng tên là Sam, anh chàng này mới là tác giả thật của cuốn sách, người biết rất rõ là bất kỳ ai mua cũng đinh ninh rằng cuốn sách là do Sam Loyd bố nổi tiếng hơn viết ra.

Sáng tạo nổi tiếng nhất của Loyd ở thời đó được xem tương đương với “Khối vuông Rubik” ngày nay, là trò đố “14-15”, hiện nay vẫn còn thấy bán trong các cửa hàng đồ chơi. Mười lăm miếng lát đánh số từ 1 đến 15 đã được sắp xếp trong một bảng chia ô vuông mỗi chiều 4 miếng, mục đích là phải sắp xếp chúng lại theo đúng trật tự từ nhỏ đến lớn với điều kiện chỉ được phép đẩy các miếng đó di chuyển trong bảng ô vuông mà không được nhấc chúng lên khỏi mặt bảng. Cách sắp xếp các miếng của trò đố “14-15” lúc bán cho khách được thể hiện trong hình 14, và ông ta đã treo một phần thưởng có giá trị cho ai có thể kết thúc trò chơi bằng cách chuyển các miếng “14” và “15” về vị trí đúng của chúng thông qua một loạt các động tác di chuyển các miếng lát. Loyd con đã viết về cảnh nhốn nháo gây ra bởi trò chơi dễ hiểu nhưng rất toán học này như sau:

Hình 14. Bức tranh phản ánh sự mê cuồng do “trò đố 14-15” của Sam Loyd gây ra

> Một phần thưởng trị giá 1.000 $ hứa trao tặng cho lời giải đúng đầu tiên của bài toán đã không bao giờ được trao, mặc dù có hàng ngàn người nói rằng họ đã đạt được kết quả mong muốn. Người ta đã trở nên mê cuồng với trò chơi này và nhiều chuyện cười về những người bán hàng sao nhãng cả việc mở cửa hiệu, về một vị linh mục đáng kính đứng dưới đèn đường trong một đêm mùa đông rét mướt để cố nhớ lại các bước mà mình đã đi tới lời giải. Điều bí ẩn của trò chơi này là ở chỗ dường như chẳng ai nhớ nổi chuỗi những di chuyển mà họ cảm thấy chắc chắn đã dẫn họ tới lời giải của bài toán thách đố này. Người ta kể rằng có những người lái tàu thủy mải chơi làm xô vỡ cả tàu, những kỹ sư cho tàu hỏa của họ chạy ào qua các nhà ga mà quên không dừng lại. Một biên tập viên của tờ Baltimore nổi tiếng kể ông ta đã đi ăn trưa ra sao và đã bị đám nhân viên bộ sậu của ông lùng sục tìm thấy ông ta vào lúc quá nửa đêm, trên tay vẫn đang dịch qua dịch lại mấy miếng lát bé tí chạy quanh một chiếc bảng vuông như thế nào.

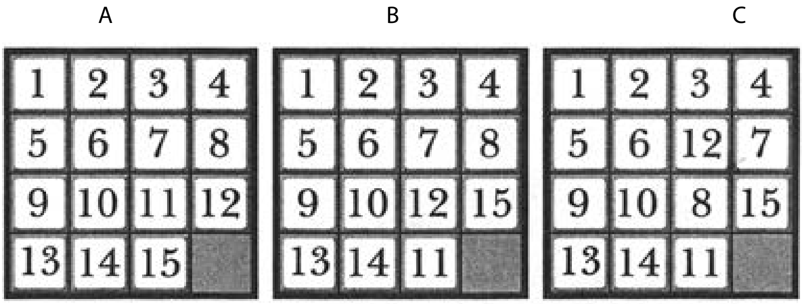
Loyd luôn luôn tự tin rằng ông ta sẽ không bao giờ phải mất 1.000 $ vì ông đã biết chắc rằng không thể nào đảo chỗ hai miếng lát mà không làm hỏng thứ tự ở chỗ nào đó trong trò đố của mình. Tương tự như một nhà toán học có thể chứng minh một phương trình cụ thể nào đó là vô nghiệm, Loyd đã chứng minh được rằng câu đố "14-15" là không giải được.

Chứng minh của Loyd bắt đầu bằng việc định nghĩa một đại lượng đo mức độ sai thứ tự của trò đố, gọi là thông số sai trật tự D_p. Thông số sai trật tự đối với mỗi cách sắp xếp là số cặp miếng lát có thứ tự sai, chẳng hạn với một trật tự đúng như trong hình 15(a) thì $D_p = 0$, bởi vì không có cặp nào sai thứ tự cả.

Xuất phát từ một cách sắp xếp có trật tự đúng, sau đó đẩy các miếng lát di chuyển vòng quanh, ta dễ dàng có được cách sắp xếp như hình 15(b). Các miếng lát ở đây sắp xếp đúng thứ tự cho tới khi chúng ta gặp các miếng 12 và 11. Rõ ràng là miếng 11 đáng lẽ phải đứng trước miếng 12 và do đó cặp (12,11) là sai thứ tự. Danh sách đầy đủ của những cặp sai thứ tự là: (12,11), (15,13), (15,14), (15,11), (13,11) và (14,11). Với 6 cặp sai thứ tự trong cách sắp xếp này, ta có D_p= 6. (Chú ý rằng miếng 10 và miếng 12 ở cạnh nhau, chúng rõ ràng là được sắp đặt chưa chuẩn, nhưng không phải là sai thứ tự. Do đó cặp này không đóng góp gì vào thông số sai thứ tự).

Dịch chuyển thêm một số bước nữa, chúng ta có được cách sắp xếp trong hình 15(c). Nếu bạn liệt kê một danh sách các cặp sai thứ tự bạn sẽ thấy trong trường hợp này D_p = 12. Điều quan trọng cần chú ý là trong tất cả các trường hợp (a), (b), và (c), giá trị của thông số sai trật tự đều là một số chẵn (0, 6, và 12). Thật vậy, nếu bạn bắt đầu từ một cách sắp xếp đúng và tiến hành sắp xếp lại nó thì nhận xét này là luôn luôn đúng. Chừng nào mà ô nằm cuối bảng bên tay phải còn trống, thì bất kỳ số bước di chuyển các miếng như thế nào cũng đều dẫn đến kết quả chẵn của D_p. Giá trị chẵn của thông số sai thứ tự là một đặc tính tổng quát của bất kỳ một cách sắp xếp nào được rút ra từ cách sắp xếp đúng ban đầu. Trong toán học một tính chất luôn luôn đúng bất kể điều gì xảy ra được gọi là một bất biến.

Tuy nhiên, nếu bạn kiểm tra cách sắp xếp của Loyd trong sản phẩm đem bán, trong đó cặp 14 và 15 bị đảo thứ tự, thì giá trị của thông số sai trật tự lại là một, D_p = 1, nghĩa là chỉ có 1 cặp sai thứ tự là cặp 14 và 15. Như vậy, đối với cách sắp xếp của Loyd, thông



Hình 15. Bằng cách đẩy các miếng lát ta có thể tạo ra những cách sắp xếp sai thứ tự khác nhau. Với mỗi cách sắp xếp có thể đo mức độ sai thứ tự thông qua thông số sai trật tự D_p.

số sai trật tự là một số lẻ! Nhưng chúng ta biết rằng bất kỳ một cách sắp xếp nào rút ra từ một cách sắp xếp đúng đều cho một giá trị chẵn đối với thông số sai trật tự. Từ đó ta đi tới kết luận rằng từ cách sắp xếp đúng không thể biến đổi thành cách sắp xếp của Loyd, và ngược lại từ cách sắp xếp của Loyd không thể đưa trở lại thành một cách sắp xếp đúng - do đó mà số tiền 1.000 $ của Loyd sẽ bình an vô sự.

Trò đố của Loyd và thông số sai thứ tự chứng tỏ sức mạnh của một đại lượng bất biến. Những đại lượng bất biến cung cấp cho các nhà toán học một chiến lược quan trọng để chứng minh rằng không thể biến đổi một đối tượng này thành một đối tượng khác. Chẳng hạn, một lĩnh vực đang kích thích sự quan tâm hiện nay là những nghiên cứu về các nút, và các nhà lý thuyết về nút lẽ tự nhiên quan tâm tới chuyện thử chứng minh xem liệu một nút có thể biến thành một nút khác bằng cách vặn hay cuộn thành vòng mà không cắt đứt nó hay không. Để trả lời câu hỏi này họ có ý định tìm ra một đặc tính của nút thứ nhất sao cho nó không bị phá hủy bất kể việc vặn hoặc cuộn thành vòng xảy ra như thế nào - tức là một bất biến của nút. Sau đó họ tính toán cũng đặc tính đó đối với nút thứ hai. Nếu các giá trị thu được là khác nhau thì kết luận là không thể nhận được nút thứ hai từ nút thứ nhất.

Trước khi kỹ thuật này được Kurt Reidemeister phát minh vào những năm 1920, người ta không thể chứng minh được: một nút không thể biến thành một nút bất kỳ khác. Nói cách khác, trước khi những bất biến nút được khám phá người ta không thể nào chứng minh được một nút thắt lưng khác một cách căn bản với một nút kép khó tháo, với một nút đơn hoặc thậm chí một vòng tròn đơn giản đến nỗi chẳng phải là một nút nữa. Khái niệm về một tính chất bất biến là trung tâm của nhiều chứng minh toán học và, như chúng ta sẽ thấy ở Chương 5, nó sẽ là ý tưởng quyết định để đưa Định lý cuối cùng của Fermat trở về với dòng chảy chính của toán học.

Vào thời điểm bản lề của thế kỷ XIX chuyển sang XX, nhờ những trò đố kiểu Sam Loyd và trò chơi "14-15" của ông, có hàng triệu người giải toán không chuyên trên khắp châu Âu và châu Mỹ háo hức tìm tòi những câu đố mới. Khi tin về tài sản của Wolfskehl đến tai những nhà toán học mới chập chững bước vào nghề, Định lý cuối cùng của Fermat lại một lần nữa trở thành bài toán nổi tiếng nhất thế giới. Định lý cuối cùng vô cùng phức tạp hơn so với những trò đố hóc búa nhất của Loyd, nhưng giải thưởng cũng lớn hơn rất nhiều. Các nhà toán học không chuyên mơ ước rằng họ sẽ tìm ra một mẹo khéo léo nhưng tương đối giản đơn khiến họ có thể vượt qua mặt các giáo sư lớn trong quá khứ. Một nhà toán học không chuyên sắc sảo của thế kỷ XX sẽ có lợi thế quá lớn so với Pierre de Fermat về hiểu biết các kỹ thuật toán học. Sự thách thức ở đây là phải địch được sự sáng tạo của Fermat trong việc sử dụng những kỹ thuật của mình.

Trong vài tuần lễ thông báo Giải thưởng Wolfskehl, cả một dòng thác các bài dự thi đổ về Đại học Gottingen. Chẳng có gì ngạc nhiên là tất cả chứng minh đó đều sai. Mặc dù mỗi người dự thi đều tin rằng họ đã giải được một bài toán tồn đọng hàng thế kỷ nay, nhưng tất cả đều đã phạm phải những sai lầm tinh vi, và đôi khi cũng chẳng tinh vi lắm, trong logic của họ. Nghệ thuật của lý thuyết số quá trừu tượng đến nỗi người ta dễ đi chệch ra khỏi con đường logic một cách đáng sợ và hoàn toàn không biết rằng mình đã lạc vào chỗ vô lý. Phụ lục 7 sẽ cho thấy một kiểu sai lầm cổ điển mà một nhà toán học không chuyên đang say sưa rất dễ mắc phải.

Bất kể là ai đã gửi chứng minh đến, mỗi người trong họ đều được xem xét một cách thận trọng kể cả trường hợp một nhà toán học không chuyên, không có tiếng tăm đã vấp ngã trước một chứng minh đã được săn tìm nhiều nhất trong toán học. Lãnh đạo Khoa toán của Đại học Gottingen trong khoảng từ 1909 đến 1934 là giáo sư Edmund Landau và trách nhiệm của ông là phải xem xét các bài dự thi tranh Giải Wolfskehl. Landau thấy rằng công việc nghiên cứu của mình thường xuyên bị ngắt quãng vì phải xử lý hàng tá chứng minh lộn xộn tới nằm trên bàn làm việc của ông mỗi tháng. Để khắc phục tình trạng này ông nghĩ ra một phương pháp khôn ngoan để dẹp bớt công việc. Vị giáo sư này đã cho in hàng trăm cái thẻ viết sẵn:

Kính gửi ....
Xin cảm ơn ngài về bản thảo
chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat.
Lỗi thứ nhất nằm ở:
Trang............Dòng..............
Điều đó làm cho chứng minh của ngài
không còn giá trị nữa.
G.S. E. M. Landau

Sau đó Landau giao từng bài dự thi mới, kèm theo một tấm thẻ in sẵn, cho các sinh viên của ông và đề nghị họ xem kỹ rồi điền vào chỗ trống.

Trong nhiều năm số lượng bài gửi tới dự thi không hề giảm sút, thậm chí sau khi Giải Wolfskehl bị mất giá thảm hại do kết quả của sự siêu lạm phát sau cuộc Chiến tranh thế giới lần thứ nhất. Người ta kháo nhau rằng ngày hôm nay bất kỳ ai chiến thắng cuộc thi này, thì với số tiền thưởng đó cũng khó lòng mua nổi một ly cà phê, tuy nhiên những lời kêu ca đó có phần đã bị thổi phồng. Một bức thư được viết bởi tiến sĩ F. Schlichting, người có trách nhiệm xem xét các bài dự thi trong giai đoạn những năm 1970, giải thích rằng giải thưởng vẫn còn có giá trị khoảng 10.000 mác. Bức thư được gửi cho Paulo Ribenboim và được công bố trong cuốn sách *13 bài giảng về Định lý cuối cùng của Fermat* của ông, cho thấy một cái nhìn thấu suốt có một không hai đối với công việc của Ủy ban Wolfskehl như sau:

Thưa Ngài,

Cho đến nay không thể đếm xuể số lượng tổng cộng của những lời giải đã được gửi tới. Trong năm đầu tiên (1907-1908) 621 lời giải đã được đăng ký trong các hồ sơ của Viện Hàn lâm, và tới ngày hôm nay số thư từ có liên quan đến bài toán Fermat đã xếp cao tới 3m. Trong những thập kỷ gần đây, vấn đề này đã được giải quyết theo cách sau đây: Thư ký của Viện Hàn lâm chia các bản thảo gửi đến thành hai loại:

+ Loại hoàn toàn vô nghĩa, sẽ được gửi trả lại (cho người gửi) ngay tức khắc.

+ Loại bản thảo xem ra có vẻ là toán học.

Loại thứ hai được giao cho Khoa toán, và ở đó công việc đọc, tìm lỗi và trả lời được Ủy quyền cho một trong các trợ lý khoa học (tại các trường đại học ở Đức, các trợ lý này là những nghiên cứu sinh đang làm luận án tiến sĩ) - và vào lúc đó công việc này lại rơi vào chính tôi. Mỗi tháng tôi phải trả lời khoảng từ 3 đến 4 bức thư, trong đó có rất nhiều chuyện buồn cười và kỳ quặc, chẳng hạn như một người gửi nửa thứ nhất của chứng minh đến và hứa sẽ gửi nốt phần thứ hai nếu chúng tôi chịu tạm ứng trước 1000 DM; hoặc một người khác, anh ta hứa trả cho tôi 1% lợi nhuận mà anh ta nhận được từ các nhà xuất bản, từ các cuộc phỏng vấn của đài phát thanh và truyền hình sau khi anh ta nổi tiếng, với điều kiện tôi phải chịu giúp đỡ anh ta bây giờ; nếu không, anh ta đe dọa sẽ gửi công trình đến Khoa toán ở Nga mà không dành cho chúng tôi niềm vinh quang phát hiện ra anh ta. Thỉnh thoảng cũng có người xuất hiện ở Đại học Gottingen, đòi được gặp và thảo luận riêng.

Gần như tất cả các lời giải đều được viết ở một trình độ rất sơ cấp (có sử dụng các ký hiệu của toán học cao cấp và có lẽ cả của một số công trình chưa tiêu hóa được của lý thuyết số nữa), nhưng tuy thế cũng rất khó hiểu.

Về mặt xã hội, thường người gửi là những người học về kỹ thuật nhưng không thành đạt trong sự nghiệp và họ muốn tìm kiếm thành công trong việc chứng minh bài toán Fermat. Tôi đã đưa một số bản thảo đó cho các bác sĩ và họ chẩn đoán tác giả của chúng đã mắc bệnh loạn thần kinh nặng.

Một điều kiện trong bản di chúc cuối cùng của Wolfskehl là hàng năm Viện Hàn lâm phải công bố tình hình giải thưởng trên các tạp chí toán học chủ yếu. Nhưng ngay sau những năm đầu tiên các tạp chí đó đã từ chối in thông báo, vì nếu in, họ sẽ phải nhận cả một dòng thác những thư từ và bản thảo điên rồ.

Tôi hy vọng rằng những thông tin này sẽ được ngài chú ý.

Thân ái

F. Schlichting

Như tiến sĩ Schlichting đề cập, những người dự thi không tự hạn chế chỉ gửi "lời giải" đến Viện Hàn lâm. Mọi khoa toán trên thế giới có lẽ đều có một tủ riêng để chứa những chứng minh rất đáng ngờ của các nhà toán học không chuyên. Nhưng trong khi phần lớn các cơ quan có trách nhiệm đều không đếm xỉa đến những chứng minh của các nhà toán học không chuyên này, thì một số nơi khác lại đối xử với họ một cách độc đáo hơn. Nhà văn chuyên viết về toán học Martin Gardner nhớ lại rằng một người bạn của ông đã gửi lại một bức thư nói rằng ông ta không đủ giỏi để kiểm tra chứng minh, thế nên ông cung cấp cho người này tên và địa chỉ của một chuyên gia trong đúng lĩnh vực đó, người có thể giúp đỡ họ. Thực ra, vị "chuyên gia" này chính là người đã gửi cho bạn của Gardner một chứng minh trước đó. Một người bạn khác của ông thì viết: "Tôi có một lập luận rất tuyệt vời bác bỏ chứng minh của bạn, nhưng không may là trang này không đủ rộng để viết nó ra”.

Mặc dù trong suốt một thế kỷ các nhà toán học không chuyên trên khắp thế giới đã cố gắng chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat hòng giành Giải Wolfskeh để rồi thất bại, nhưng các nhà toán học chuyên nghiệp thì vẫn tiếp tục gần như không đếm xỉa đến bài toán đó. Thay vì xây dựng tiếp trên những công trình của Kummer và của các nhà lý thuyết số khác trong thế kỷ XIX, các nhà toán học giờ đây lại bắt đầu tiến hành xem xét lại nền tảng môn học của họ nhằm giải quyết một số vấn đề cơ bản nhất về các con số. Một số khuôn mặt vĩ đại nhất của thế kỷ XX, gồm Bertrand Russell, David Hilbert và Kurt Godel, đã cố gắng tìm hiểu những tính chất sâu sắc nhất của các con số nhằm thâu tóm được ý nghĩa thật sự của chúng và để khám phá ra những câu hỏi nào lý thuyết số có thể trả lời, và quan trọng hơn là câu hỏi nào không thể trả lời. Công trình của họ sẽ làm rung chuyển nền tảng của toán học và sau hết có những tác động rất đặc biệt đối với Định lý cuối cùng của Fermat.

Nền tảng của tri thức

Trải qua hàng trăm năm các nhà toán học đã không ngừng bận bịu sử dụng chứng minh logic để xây dựng nên một hệ thống lý thuyết từ những cái đã biết đến những cái chưa biết. Tiến bộ thật phi thường, cứ mỗi một thế hệ mới lại mở rộng được cấu trúc lý thuyết của họ và tạo ra được những khái niệm mới về số và hình. Tuy nhiên, đến cuối thế kỷ XIX, thay vì nhìn về phía trước, các nhà logic toán học bắt đầu ngoái nhìn lại những nền tảng của toán học mà trên đó mọi thứ đã được xây dựng. Họ muốn kiểm tra lại nền tảng của toán học và xây dựng lại tất cả một cách chặt chẽ từ những nguyên lý đầu tiên, nhằm mục đích tái đảm bảo cho chính họ rằng những nguyên lý đầu tiên đó là có thể tin cậy được.

Các nhà toán học nổi tiếng là những người khắt khe khi đòi hỏi một chứng minh tuyệt đối trước khi chấp nhận bất kỳ một mệnh đề nào. Sự nổi tiếngcủa họ được thể hiện một cách rõ ràng trong một câu chuyện do Ian Stewart kể trong cuốn *Những khái niệm của toán học hiện đại:*

> Ba nhà khoa học gồm một nhà thiên văn, một nhà vật lý và một nhà toán học cùng đi với nhau trên một chuyến tàu hỏa để về miền quê nghỉ hè. Khi con tàu băng qua miền đồng cỏ Scotland, qua cửa sổ con tàu, họ nhìn thấy một chú cừu đen hiền lành đang gặm cỏ trên một cánh đồng. "Ồ tuyệt quá, hóa ra cừu ở Scotland đều là cừu đen!" nhà thiên văn thốt lên. Nhưng nhà vật lý vội ngắt lời: "Không, làm sao anh nói thế được. Chỉ có thể nói một số cừu ở Scotland là cừu đen mà thôi!". "Không, không được", nhà toán học lên tiếng. "Nói thế cũng chưa đúng. Phải nói thế này: Tại Scotland có ít nhất một cánh đồng mà trên đó có ít nhất một con cừu, con cừu này có ít nhất một bên mình màu đen".

Những nhà toán học chuyên nghiên cứu logic toán học suy luận chặt chẽ hơn cả những nhà toán học thông thường. Các nhà logic toán học bắt đầu đặt ra những nghi vấn đối với những ý tưởng mà các nhà toán học khác đã xem là dĩ nhiên trong hàng thế kỷ nay. Ví dụ, định luật "tam phân" (trichotomy) phát biểu rằng mọi số đều hoặc âm, hoặc dương, hoặc bằng 0. Điều này dường như quá rõ ràng và các nhà toán học đã ngầm thừa nhận điều đó là đúng, nhưng chưa có ai bận tâm chứng minh điều này thực sự là đúng cả. Tuy nhiên, các nhà logic nhận thấy rằng chừng nào luật tam phân còn chưa được chứng minh là đúng thì có nghĩa nó vẫn có thể sai, và nếu điều này xảy ra thì toàn bộ tòa nhà kiến thức - tức mọi thứ dựa trên định luật này - sẽ sụp đổ. May thay đối với toán học, vào cuối thế kỷ XIX luật tam phân đã được chứng minh là đúng.

Kể từ thời Hy Lạp cổ đại đến nay, toán học đã tích lũy được ngày càng nhiều định lý và chân lý, và mặc dù hầu hết chúng đều đã được chứng minh một cách chặt chẽ, các nhà toán học vẫn áy náy rằng một số trong chúng, như luật tam phân chẳng hạn, đã len lỏi vào toán học mà không được kiểm tra một cách thích đáng. Một số ý tưởng đã trở thành bộ phận của truyền thống, nhưng chưa ai biết chắc chúng đã được chứng minh như thế nào nếu quả thật chúng đã được chứng minh, do đó các nhà logic quyết định chứng minh lại tất cả các định lý xuất phát từ một số nguyên lý ban đầu. Tuy nhiên, bất kỳ một chân lý nào cũng được suy ra từ những chân lý khác. Những chân lý này, đến lượt nó, trước hết cũng phải được chứng minh từ những chân lý căn bản hơn, và cứ thế tiếp tục. Cuối cùng các nhà logic đi đến chỗ phải bằng lòng với một số ít các mệnh đề chủ yếu có tính cơ bản đến nỗi bản thân chúng không thể chứng minh được nữa. Những định đề cơ bản ấy là những tiên đề của toán học.

Một ví dụ về các tiên đề là tính chất giao hoán của phép cộng, được phát biểu đơn giản rằng đối với mọi số m và n thì:

$$m + n = n + m$$

Tiên đề này và hàng loạt các tiên đề khác được coi là hiển nhiên, và có thể dễ dàng được kiểm chứng bằng việc áp dụng chúng cho các số cụ thể. Cho đến nay các tiên đề đã vượt qua được mọi sự kiểm tra và đã được tiếp nhận như là nền tảng của toán học. Thử thách đối với các nhà logic là xây dựng lại toàn bộ toán học từ những tiên đề này. Phụ lục 8 xác định tập hợp các tiên đề số học và cho ta một ý niệm về cách thức mà các nhà logic xây dựng phần còn lại của toán học.

Cả một đội quân các nhà logic đã tham gia vào quá trình hết sức chậm chạp và gian truân của việc xây dựng lại cái cơ thể vô cùng phức tạp của tri thức toán học, trong đó chỉ sử dụng một số tiên đề tối thiểu. Ý tưởng là củng cố những gì mà các nhà toán học nghĩ là họ đã biết, bằng cách chỉ sử dụng những tiêu chuẩn logic chặt chẽ nhất. Nhà toán học Đức Hermann Weyl đã tóm tắt không khí của thời kỳ đó như sau: "Logic là vệ sinh học mà các nhà toán học đã thực hành để giữ cho những ý tưởng của họ được khỏe mạnh và chắc chắn". Bên cạnh việc làm sạch những cái đã biết, niềm hy vọng là cách tiếp cận mang tinh thần cơ bản đó cũng sẽ rọi một tia sáng vào những bài toán vẫn còn chưa giải được, trong đó có Định lý cuối cùng của Fermat.

Chương trình này được lãnh đạo bởi một khuôn mặt sáng giá nhất của thời đại, David Hilbert. Hilbert tin rằng mọi thứ trong toán học có thể và cần phải được chứng minh dựa trên hệ tiên đề cơ sở. Kết quả là phải chứng minh một cách dứt khoát hai cơ sở quan trọng nhất của hệ thống toán học. Một: ít nhất về mặt lý thuyết, toán học phải trả lời được mọi câu hỏi riêng biệt - đây cũng là bản chất của tính đầy đủ mà trong quá khứ đã đòi hỏi phải phát minh ra những số mới như số âm và số ảo. Hai: toán học phải thoát khỏi sự mâu thuẫn - điều đó có nghĩa là sau khi đã chứng tỏ rằng một mệnh đề đúng bằng một phương pháp này thì không thể chứng minh nó là sai bởi một phương pháp khác. Hilbert tin rằng bằng cách nắm lấy chỉ một vài tiên đề, sẽ có thể trả lời bất kỳ một câu hỏi toán học nào được tưởng tượng ra mà không sợ mâu thuẫn.

Ngày 08 tháng 8 năm 1900, Hilbert đã đọc một bản báo cáo lịch sử tại Hội nghị toán học quốc tế ở Paris. Hilbert nêu lên 23 bài toán chưa giải được trong toán học mà ông tin rằng đó là những bài toán quan trọng cấp thiết nhất. Một số trong những bài toán đó liên quan đến những lĩnh vực tổng quát hơn của toán học, nhưng hầu hết đều tập trung vào nền tảng logic của môn học này. Những bài toán này có ý định tập trung sự chú ý của thế giới toán học và đưa ra một chương trình nghiên cứu. Hilbert muốn khích lệ cộng đồng giúp ông thực hiện quan điểm về một hệ thống toán học thoát khỏi mọi sự ngờ vực và mâu thuẫn - một hoài bão mà ông đã cho khắc trên mộ chí của ông:

Wir mssen wissen	*Chúng ta phải biết*
Wir werden wissen	*Chúng ta sẽ biết*

Mặc dù đôi khi là đối thủ gay gắt của Hilbert, nhưng Gotlob Frege lại là một trong số những ngọn đèn dẫn dắt trong chương trình Hilbert. Trong suốt hơn một thập kỷ, Frege đã tận tụy rút ra hàng trăm định lý phức tạp từ những tiên đề đơn giản và những thành công của Frege dẫn ông tới chỗ tin rằng ông đã đi đúng đường để hoàn tất một phần quan trọng giấc mơ của Hilbert. Một trong những công trình đột phá chủ yếu của Frege là đã sáng tạo ra chính cái định nghĩa của một con số. Ví dụ, điều mà chúng ta thực sự ngụ ý cho số 3 là cái gì? Hóa ra để định nghĩa số 3, Frege trước tiên phải định nghĩa "cái 3".

"Cái 3" là một tính chất trừu tượng của tập hợp các đối tượng chứa 3 phần tử. Chẳng hạn "cái 3" có thể được sử dụng để mô tả tập hợp các con chuột bị mù trong một bài hát ru rất phổ biến, hoặc "cái 3" cũng rất thích hợp để mô tả tập hợp các cạnh của một tam giác. Frege nhấn mạnh rằng có rất nhiều tập hợp phô bày "cái 3" và ông đã sử dụng ý tưởng về các tập hợp để định nghĩa chính số "3". Ông đã tạo ra một tập hợp mới và đặt vào bên trong nó tất cả các tập hợp phô bầy "cái 3". *Do đó, một tập hợp có 3 phần tử nếu và chỉ nếu nó nằm bên trong tập hợp "3".*

Có vẻ đây là một định nghĩa phức tạp quá mức đối với một khái niệm mà chúng ta sử dụng hàng ngày, nhưng sự mô tả của Frege về "3" là chặt chẽ và không thể chối cãi, nó hoàn toàn cần thiết đối với chương trình không thỏa hiệp của Hilbert.

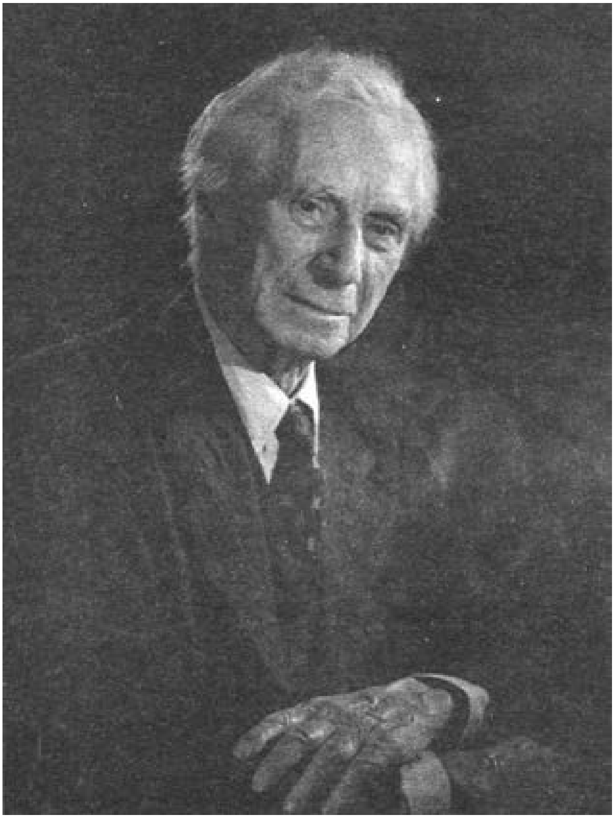
Năm 1902, cuộc thử thách gay go của Frege dường như đang đến hồi kết thúc khi ông chuẩn bị công bố công trình *Những nguyên lý cơ bản của Số học* - một công trình hai tập đồ sộ và đầy thẩm quyền với ý định thiết lập một tiêu chuẩn mới của tính xác định trong toán học. Cùng lúc đó, nhà logic người Anh Bertrand Russell, người cũng có đóng góp vào chương trình vĩ đại của Hilbert, đã công bố một phát hiện mang tính chất đột phá. Mặc dù theo đuổi nghi thức chặt chẽ của Hilbert, nhưng ông đã đi đến một mâu thuẫn. Russell nhớ lại phản ứng của chính mình đối với một phát hiện thật kinh khủng rằng toán học có thể mâu thuẫn một cách cố hữu như sau:

Davis Hilbert

> Đầu tiên tôi nghĩ rằng tôi có thể vượt qua mâu thuẫn đó một cách dễ dàng, và có lẽ đã có một sai lầm tầm thường nào đó trong lập luận. Nhưng dần dần, tình hình càng trở nên rõ ràng không phải như vậy... Suốt nửa sau của năm 1901, tôi tưởng việc giải quyết sẽ dễ dàng, nhưng đến cuối giai đoạn đó tôi đi đến kết luận rằng đó là một công việc lớn... Đêm nào tôi cũng có thói quen đi lang thang, từ 11 giờ đến 1 giờ, trong thời gian đó tôi đã nhận được ra ba tiếng kêu khác nhau của con cú (hầu hết mọi người chỉ biết một). Tôi đã hết sức cố gắng giải quyết mâu thuẫn. Sáng sáng tôi lại ngồi trước một tờ giấy trắng. Rồi suốt cả ngày, trừ một khoảng thời gian bữa trưa ngắn ngủi, tôi cứ ngồi nhìn chòng chọc vào tờ giấy trắng đó. Và thường thì khi đêm đến nó vẫn còn trắng tinh như vậy.

Không tài nào thoát ra khỏi mâu thuẫn. Công trình của Russell chắc sẽ gây ra một sự đổ vỡ to lớn đối với giấc mơ về một hệ thống toán học không có nghi ngờ, mâu thuẫn và nghịch lý. Ông bèn viết thư cho Frege, người có bản thảo đã nằm tại nhà in. Bức thư đã làm cho công trình để đời của Frege trở thành vô giá trị, nhưng bất chấp cú knock-out đó, Frege vẫn cho công bố tác phẩm để đời của mình và chỉ bổ sung một tái bút trong tập thứ hai: "Một nhà khoa học khó có thể có một sự thất vọng nào lớn hơn khi thấy nền tảng lý thuyết của mình bị sụp đổ đúng vào lúc công trình vừa mới kết thúc. Tôi đã bị đặt vào trong tình thế này bởi nhận được lá thư từ ngài Bertrand Russell khi công trình của tôi sắp được công bố".

Thật trớ trêu, mâu thuẫn của Russell lại xuất hiện từ chính những tập hợp mà Frege hết sức nâng niu. Nhiều năm sau này, trong cuốn sách *Nghiên cứu triết học của tôi,* Russell nhớ lại những suy nghĩ đã làm bật ra những câu hỏi về công trình của Frege: "Dường như



Bertrand Russel

đối với tôi một tập hợp đôi khi là, và đôi khi không là, phần tử của chính nó. Chẳng hạn, tập hợp những cái thìa uống trà không phải là một cái thìa uống trà, nhưng tập hợp những đồ vật không phải là thìa uống trà lại là một trong những thứ không phải là thìa uống trà". Chính điều quan sát kỳ quặc và rõ ràng minh bạch này đã dẫn tới một nghịch lý đầy tai họa.

Nghịch lý Russell thường được giải thích bằng câu chuyện về một người thủ thư quá cẩn thận kỹ lưỡng. Một hôm, trong khi đi lang thang giữa những giá sách, người thủ thư phát hiện thấy một tập hợp các danh mục. Có những danh mục khác nhau về tiểu thuyết, về sách tham khảo, về thi ca v.v. Người thủ thư nhận thấy một số danh mục liệt kê cả bản thân nó, trong khi các danh mục khác thì lại không như vậy.

Nhằm mục đích đơn giản hệ thống, người thủ thư làm thêm hai danh mục nữa, một trong chúng liệt kê tất cả các danh mục tự liệt kê cả bản thân nó và, thú vị hơn, một danh mục liệt kê tất cả những danh mục không tự liệt kê nó. Để hoàn tất nhiệm vụ, người thủ thư phải giải quyết bài toán: Liệu danh mục liệt kê tất cả những danh mục không tự liệt kê mình có được liệt kê trong bản thân nó hay không? Nếu có, thì theo định nghĩa nó sẽ không được liệt kê. Tuy nhiên, nếu nó không được liệt kê, thì theo định nghĩa, nó sẽ được liệt kê. Người thủ thư sẽ rơi vào một tình thế không thể quyết định được.

Các danh mục rất giống với các tập hợp mà Frege sử dụng trong định nghĩa cơ bản của các con số. Do đó sự mâu thuẫn đã gây phiền nhiễu cho người thủ thư cũng sẽ gây nên những chuyện rắc rối trong cấu trúc logic đã được tiên liệu của toán học. Toán học không thể tha thứ cho tính thiếu nhất quán, nghịch lý và mâu thuẫn. Ví dụ, một công cụ mạnh mẽ của chứng minh là phương pháp phản chứng, phương pháp này dựa trên cơ sở toán học không có nghịch lý. Chứng minh bằng phản chứng lập luận rằng nếu một giả thiết dẫn tới vô lý thì giả thiết đó sai, nhưng theo Russell thậm chí các tiên đề cũng có thể dẫn tới những hệ quả vô lý. Do đó, chứng minh bằng phản chứng có thể chứng tỏ một tiên đề là sai, trong khi các tiên đề là nền tảng của toán học và được thừa nhận là đúng.

Nhiều nhà trí thức đã chất vấn công trình của Russell, họ lý luận rằng toán học là một công trình đang được theo đuổi một cách thành công rõ ràng và không thể sai lầm được. Russell đã trả lời họ bằng cách giải thích ý nghĩa công trình của ông như sau:

> "Nhưng", bạn có thể nói, "chẳng gì có thể lay chuyển được niềm tin của bạn rằng 2 cộng 2 là 4". Bạn quá đúng, trừ những trường hợp giáp ranh - và chỉ trong những trường hợp giáp ranh đó mà bạn có thể ngờ vực liệu một con vật xác định nào đó có phải một con chó hay không, hoặc ngờ vực liệu một chiều dài xác định nào đó có nhỏ hơn 1 mét hay không. 2 phải là 2 cái gì đó, và mệnh đề 2 cộng 2 là 4 sẽ vô dụng trừ phi nó được áp dụng. 2 con chó và 2 con chó tất nhiên phải là 4 con chó, nhưng có những trường hợp phát sinh trong đó bạn nghi ngờ không biết 2 trong số đó có phải là chó hay không. "Cũng chẳng hề gì, dù sao thì cũng có 4 con vật", bạn nói. Nhưng khốn thay, lại có những vi sinh vật mà ta phân vân không biết chúng là động vật hay thực vật. Bạn sẽ lại nói: "Cũng chẳng sao, thì ta nói về các cơ thể sống vậy". Nhưng lại có những thứ mà ta cũng không biết rõ có là cơ thể sống thực hay không. Bạn sẽ buộc phải nói: "Thì ta nói 2 thực thể và 2 thực thể là 4 thực thể vậy". Nhưng khi bạn nói cho tôi biết "thực thể" là gì, thì chúng ta sẽ lại tiếp tục tranh luận.

Công trình của Russell đã lay chuyển nền tảng của toán học và đẩy sự nghiên cứu logic toán học vào một trạng thái hỗn loạn. Các nhà logic biết rằng một nghịch lý ẩn núp trong nền tảng của toán học có thể sớm muộn gì rồi cũng để lộ ra tính chất phi logic của nó và gây ra những hệ lụy sâu sắc. Vì thế, cùng với Hilbert và các nhà logic khác, Russell cũng tìm cách cố gắng chữa chạy tình thế và hồi phục lại sức khoẻ cho toán học.

Tính mâu thuẫn này là hệ quả trực tiếp của quá trình làm việc với các tiên đề của toán học, mà cho đến lúc đó vẫn được coi là hiển nhiên và đủ để xác định phần còn lại của toán học. Có một hướng nghiên cứu là sáng tạo ra một tiên đề bổ sung nhằm ngăn cấm bất kỳ một tập hợp nào là phần tử của chính nó. Điều này sẽ chặn được nghịch lý Russell bằng cách làm cho câu hỏi "liệu có nên đưa danh mục của những danh mục không tự liệt kê vào chính nó hay không?" là một câu hỏi thừa.

Russell đã dành cả một thập kỷ tiếp theo để xem xét các tiên đề của toán học, phần chủ yếu nhất của môn học này. Đến năm 1910, với sự cộng tác của Alfred North Whitehead, ông đã cho công bố tập I của bộ sách ba tập *Những nguyên lý của toán học* - một ý đồ có vẻ thành công trong việc xử lý được một phần bài toán do nghịch lý của chính ông tạo ra. Suốt trong hai thập kỷ tiếp theo, những người khác đã dùng *Những nguyên lý của toán học* như một cuốn cẩm nang để thiết lập một tòa nhà toán học không có sai lầm; và vào thời điểm Hilbert về hưu năm 1930, ông cảm thấy tự tin rằng toán học đang đi đúng trên con đường phục hồi. Mơ ước của Hilbert về một hệ logic phi mâu thuẫn, đủ mạnh để trả lời mọi câu hỏi, rõ ràng đang trở thành hiện thực.

Nhưng năm 1931, một nhà toán học 25 tuổi chưa được ai biết đến đã công bố một công trình làm tiêu tan vĩnh viễn hy vọng của Hilbert. Kurt Godel buộc các nhà toán học chấp nhận rằng toán học có thể không bao giờ là hoàn hảo về mặt logic, và công trình của ông gây ra một ý nghĩ cho rằng những bài toán như Định lý cuối cùng của Fermat có thể thậm chí không thể nào giải được.

Kurt Godel sinh ngày 28 tháng 04 năm 1906 tại Moravia, hồi đó thuộc đế chế Áo - Hung, nay thuộc Cộng hòa Séc. Ngay từ thuở thiếu thời ông thường hay đau ốm và nghiêm trọng nhất là một cơn sốt do thấp khớp ở tuổi lên 6. Sự sớm đụng chạm đến cái chết này đã khiến cho Godel bị căn bệnh trầm uất ám ảnh kéo dài suốt cuộc đời ông. Năm 8 tuổi, trong khi đọc một cuốn sách giáo khoa y học, ông nghĩ rằng tim của mình bị yếu, mặc dù các bác sĩ của ông không tìm được bằng chứng nào về bệnh tình đó. Sau này, lúc sắp từ giã cuộc đời, ông tin tưởng một cách mù quáng rằng ông bị đầu độc và vì thế ông từ chối ăn uống đến nỗi gần như tự để cho mình chết vì đói.

Khi còn nhỏ, Godel đã thể hiện tài năng đối với khoa học và toán học, và bản chất hay lục vấn của ông đã khiến mọi người trong gia đình đặt cho ông cái tên der Herr Warum (Ông Tại sao). Ông theo học tại Đại học Vienna trong khi còn băn khoăn không biết nên theo chuyên ngành toán hay vật lý, nhưng một bài giảng gây cảm hứng và say sưa của giáo sư P. Furtwangler đã thuyết phục Godel hiến dâng đời mình cho lý thuyết số. Tất cả những bài giảng này còn trở nên phi thường hơn nữa bởi vì Furtwangler bị liệt từ cổ trở xuống và phải giảng bài từ trên xe lăn, không có vở ghi chép, trong khi phụ tá của ông viết trên bảng đen.

Vào năm 20 tuổi, Godel đã chính thức làm việc tại khoa toán, nhưng thỉnh thoảng ông vẫn cùng với các đồng nghiệp của mình đi lang thang xuống hành lang để dự những cuộc họp của Wiener Kreis (Hội Thành Vienne) - một nhóm các nhà triết học tụ họp lại để thảo luận những câu hỏi logic lớn của thời đại. Điều đó diễn ra trong suốt thời kỳ Godel phát triển những ý tưởng mà sau này sẽ hủy hoại nền tảng của toán học.

Năm 1931, Godel công bố cuốn sách về những mệnh đề hình thức không thể quyết định được trong cuốn *Những nguyên lý của toán học* - và những hệ liên quan, trong đó có chứa những định lý về tính không thể quyết định được. Khi tin tức về những định lý này đến Mỹ, nhà toán học lớn John von Newmann ngay lập tức hủy bỏ loạt bài giảng mà ông đã giảng về chương trình Hilbert và thay thế phần còn lại của giáo trình bằng một cuộc thảo luận về công trình có tính cách mạng của Godel.

Godel đã chứng minh rằng việc cố gắng tạo ra một hệ thống toán học đầy đủ và phi mâu thuẫn là một nhiệm vụ bất khả thi. Tư tưởng của ông có thể gói gọn trong hai mệnh đề:

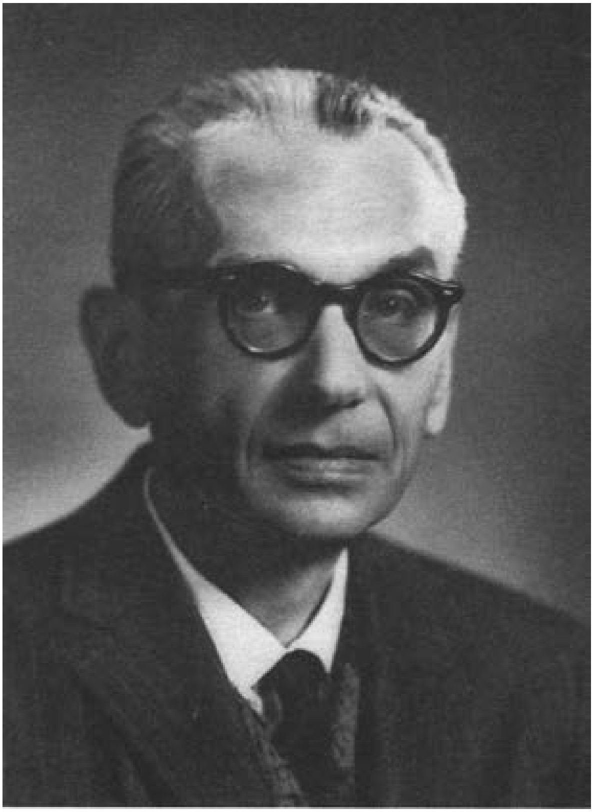
1. Định lý thứ nhất về tính không thể quyết định được:

Nếu lý thuyết dựa trên một hệ tiên đề là phi mâu thuẫn, thì tồn tại những định lý hoặc không thể chứng minh hoặc không thể bác bỏ.

2. Định lý thứ hai về tính không thể quyết định được:

Không có một quy trình kiến thiết nào cho phép chứng minh một lý thuyết dựa trên hệ tiên đề là phi mâu thuẫn.

Mệnh đề thứ nhất của Godel chủ yếu nói rằng bất kể tập hợp tiên đề nào được sử dụng, sẽ có những câu hỏi mà toán học không thể trả lời - nghĩa là tính đầy đủ sẽ không bao giờ đạt được. Còn tệ hơn nữa, mệnh đề thứ hai nói rằng thậm chí toán học có thể sẽ không bao giờ biết chắc chắn sự chọn lựa tiên đề của nó sẽ không



Kurt Godel

dẫn tới một mâu thuẫn - nghĩa là tính phi mâu thuẫn sẽ không bao giờ đạt được. Godel đã chỉ ra chương trình Hilbert là một chương trình bất khả thi.

Nhiều thập kỷ sau, trong cuốn *Những bức chân dung vẽ từ ký ức*, Bertrand Russell kể lại phản ứng của ông đối với khám phá của Godel như sau:

> Tôi muốn có sự chắc chắn theo kiểu cách mà trong đó người ta muốn có đức tin tôn giáo. Tôi đã từng nghĩ tính chắc chắn có vẻ như sẽ được tìm thấy trong toán học nhiều hơn ở bất kỳ nơi nào khác. Nhưng tôi khám phá ra rằng nhiều chứng minh toán học, mà các thầy giáo của tôi bắt tôi phải chấp nhận, có đầy những ngụy biện, và rằng nếu tính chắc chắn thực sự là có thể khám phá được trong toán học, thì nó sẽ phải nằm trong một lĩnh vực mới của toán học, với những nền tảng chắc chắn hơn những nền tảng mà cho đến nay đã được nghĩ là an toàn. Nhưng khi công việc diễn tiến, mọi chuyện cứ khiến tôi phải luôn nhớ tới câu chuyện ngụ ngôn về con voi và con rùa. Trong khi xây dựng xong con voi mà trên đó thế giới toán học có thể an tọa, tôi lại phát hiện thấy con voi ngã xiên ngã vẹo, và lại phải tiến hành xây dựng con rùa để giữ cho con voi khỏi ngã. Nhưng rồi con rùa cũng chẳng an toàn gì hơn con voi, và sau khoảng 20 năm làm việc cực nhọc gian truân, tôi đi đến kết luận rằng tôi chẳng còn có thể làm gì hơn nữa để tạo ra những tri thức toán học không bị nghi ngờ.

Mặc dù mệnh đề thứ hai của Godel nói rằng không thể chứng minh các tiên đề là phi mâu thuẫn, nhưng nó không nhất thiết có nghĩa chúng là mâu thuẫn. Trong trái tim mình, nhiều nhà toán học vẫn còn tin rằng toán học của họ vẫn là phi mâu thuẫn, nhưng trong khối óc của họ, họ không thể chứng minh được điều đó. Nhiều năm về sau, nhà lý thuyết số vĩ đại André Weil nói: "Chúa tồn tại vì toán học là phi mâu thuẫn, và Quỷ tồn tại vì chúng ta không thể chứng minh được điều đó".

Thực tế, cả cách phát biểu lẫn chứng minh các định lý của Godel đều cực kỳ phức tạp. Ví dụ, cách phát biểu chặt chẽ Định lý thứ nhất của Godel về tính không thể quyết định được có dạng như sau:

Ứng với mỗi một lớp ω đệ quy phi mâu thuẫn - κ của các công thức, có tồn tại một lớp đệ quy các dấu r sao cho cả υ Gen r lẫn Neg(υ Gen r) đều không thuộc Flg(κ) (trong đó υ là biến tự do của r).

May thay, cũng giống như nghịch lý của Russell và câu chuyện về người thủ thư, định lý thứ nhất của Godel có thể minh họa bằng một logic khác tương tự do Epimenides (một nhà thơ và tu sĩ cổ Hy Lạp thế kỷ VII - VI trước C.N.) sáng tác và nổi tiếng với cái tên nghịch lý Crete, hay nghịch lý kẻ nói dối. Là người thuộc đảo Crete (Hy Lạp), Epimenides tuyên bố:

"Ta là kẻ nói dối!"

Nghịch lý xuất hiện khi chúng ta cố gắng xác định xem liệu mệnh đề này đúng hay sai. Trước hết hãy xem điều gì sẽ xảy ra nếu ta giả định rằng mệnh đề này đúng. Mệnh đề đúng ngụ ý rằng Epimenides là một kẻ nói dối, nhưng chúng ta đã giả định lúc đầu rằng ông ta phát biểu một mệnh đề đúng và do đó Epimenides không phải là kẻ nói dối - chúng ta có một mâu thuẫn. Mặt khác, hãy xem điều gì xảy ra nếu ta giả định mệnh đề trên là sai. Mệnh đề sai ngụ ý rằng Epimenides không phải là kẻ nói dối, nhưng vì ta đã giả định lúc đầu rằng ông ta đã phát biểu một mệnh đề sai và do đó Epimenides là kẻ nói dối - chúng ta lại có một mâu thuẫn khác. Như vậy, dù ta giả định mệnh đề là đúng hay sai thì chúng ta cũng đều đi tới một mâu thuẫn, và do đó mệnh đề chẳng đúng và cũng chẳng sai.

Godel đã giải thích lại nghịch lý nói dối và đưa vào đó khái niệm chứng minh. Kết quả là một mệnh đề như dưới đây:

Mệnh đề này không có bất kỳ một chứng minh nào.

Nếu mệnh đề sai thì có nghĩa là mệnh đề có thể chứng minh được, nhưng điều này mâu thuẫn với chính mệnh đề đó. Do đó mệnh đề phải đúng để tránh mâu thuẫn. Tuy nhiên, mặc dù mệnh đề đúng nhưng nó không thể chứng minh được, bởi vì mệnh đề này (mà bây giờ chúng ta biết là đúng) đã nói như vậy.

Vì Godel có thể phiên dịch mệnh đề trên thành một khái niệm toán học, nên ông có thể chứng minh rằng trong toán học tồn tại những mệnh đề đúng nhưng không bao giờ có thể chứng minh được rằng nó đúng - những mệnh đề không quyết định được. Đây chính là một đòn chí tử giáng vào chương trình Hilbert.

Về nhiều phương diện, công trình của Godel song song với những khám phá tương tự được thực hiện trong vật lý lượng tử. Đúng bốn năm trước khi Godel công bố công trình của ông về tính không thể quyết định được, nhà vật lý Đức Werner Heisenberg đã phát minh ra *nguyên lý bất định*. Cũng giống như có một giới hạn cơ bản đối với những định lý mà các nhà toán học có thể chứng minh, Heisenberg chỉ ra rằng *có một giới hạn cơ bản đối với những tính chất mà các nhà vật lý có thể đo lường*. Chẳng hạn, nếu họ muốn đo vị trí chính xác của một đối tượng, thì họ chỉ có thể đo tốc độ của đối tượng đó với độ chính xác tương đối kém. Đó là vì muốn đo vị trí của một đối tượng thì cần phải rọi sáng nó bằng các hạt ánh sáng (photon), nhưng để chỉ ra chính xác vị trí nó thì các hạt photon sẽ phải có một năng lượng rất lớn. Tuy nhiên, nếu đối tượng bị bắn phá bởi các photon năng lượng cao thì tốc độ của nó sẽ bị ảnh hưởng và trở thành bất định một cách cố hữu. Do đó, nếu muốn biết vị trí của một đối tượng, thì các nhà vật lý sẽ phải từ bỏ một số hiểu biết về tốc độ của nó.

Nguyên lý bất định Heisenberg chỉ bộc lộ ở cấp độ nguyên tử, khi mà các phép đo có độ chính xác cao trở thành quan trọng. Do đó phần lớn vật lý, bất chấp nguyên lý này, vẫn có thể cứ tiếp tục phát triển như cũ, trong khi các nhà vật lý lượng tử quan tâm đến những vấn đề sâu sắc về giới hạn của sự hiểu biết. Điều tương tự cũng xảy ra trong thế giới toán học. Trong khi các nhà logic tranh luận với mức độ chuyên sâu rất cao, chỉ những người đặc biệt quan tâm mới hiểu nổi, thì phần còn lại của cộng đồng toán học vẫn tiếp tục nghiên cứu, bất chấp những cuộc tranh luận của các nhà logic. Mặc dù Godel đã chứng minh rằng có một số mệnh đề không thể chứng minh được, nhưng vẫn có rất nhiều mệnh đề khác có thể chứng minh và khám phá của ông không hề làm vô hiệu hóa những gì đã được chứng minh trong quá khứ. Hơn nữa, nhiều nhà toán học tin rằng các định lý về tính không quyết định được sẽ chỉ được tìm thấy trong những vùng tăm tối nhất ở đâu đó tại ngoại vi của toán học, chính vì thế một nhà toán học có thể không bao giờ phải chạm trán với nó. Sau hết, Godel chỉ nói rằng những mệnh đề (không quyết định được) này tồn tại, chứ ông chưa thể thực sự chỉ ra một mệnh đề như thế. Nhưng đến năm 1963, cơn ác mộng lý thuyết của Godel đã trở thành hiện thực.

Paul Cohen, một nhà toán học 29 tuổi thuộc Đại học Stanford, đã phát triển một kỹ thuật cho phép kiểm tra xem một vấn đề cụ thể nào đó có phải là không quyết định được hay không. Kỹ thuật này chỉ dùng được trong một số trường hợp rất đặc biệt, nhưng dù sao ông cũng là người đầu tiên khám phá ra những câu hỏi cụ thể thực sự không quyết định được. Sau khi thực hiện được khám phá đó, với chứng minh cầm trong tay, Cohen bay ngay tới Đại học

Princeton để đưa cho chính Godel kiểm tra. Lúc này Godel đang lâm vào giai đoạn hoang tưởng trong đời, ông mở hé cánh cửa, giật lấy tập giấy và đóng sầm cánh cửa lại. Hai ngày sau Cohen nhận được lời mời uống trà tại nhà Godel, một dấu hiệu cho thấy người thầy đã đóng cho chứng minh của Cohen con dấu xác nhận. Điều đặc biệt bi đát là một số vấn đề không thể quyết định được này lại nằm ở trung tâm của toán học. Trớ trêu thay, Cohen đã chứng minh rằng một trong số 23 bài toán mà Hilbert đã tuyên bố là quan trọng nhất của toán học, đó là giả thuyết continum, lại là không thể quyết định được.

Công trình của Godel, bao gồm cả những mệnh đề không quyết định được của Cohen, đã gửi một bản thông điệp đầy lo ngại tới tất cả các nhà toán học, chuyên nghiệp lẫn nghiệp dư - những người đang cố kiên gan trong ý đồ của họ hòng chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat - rằng có lẽ Định lý này là không quyết định được! Điều gì sẽ xảy ra nếu Pierre de Fermat đã phạm một sai lầm nào đó khi ông tuyên bố đã tìm ra chứng minh? Nếu đúng như vậy, thì có khả năng Định lý cuối cùng là không quyết định được. Chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat có thể không chỉ có khó khăn, mà hơn thế nữa có thể là bất khả. Nếu Định lý này là không quyết định được, thì các nhà toán học đã tiêu phí hàng thế kỷ để tìm một chứng minh mà nó không hề tồn tại.

Thật kỳ lạ là nếu Định lý cuối cùng của Fermat hóa ra là không quyết định được, thì điều này lại ngụ ý rằng nó phải đúng. Lý do như sau. Định lý cuối cùng nói rằng không có nghiệm nguyên đối với phương trình:

$$x^n + y^n = z^n \text{ với n lớn hơn 2.}$$

Nếu Định lý cuối cùng thực sự là sai, thì sẽ có khả năng chứng minh điều này bằng cách đưa ra một nghiệm của nó (tức là đưa ra một phản ví dụ). Nếu thế thì Định lý cuối cùng sẽ là quyết định được. Như vậy, nếu Định lý Fermat là sai thì điều đó sẽ mâu thuẫn với tính không quyết định được của nó. Tuy nhiên, nếu Định lý cuối cùng là đúng thì không nhất thiết phải có một cách chứng minh nó rõ ràng như vậy - nó là không quyết định được. Do đó, Định lý cuối cùng của Fermat có thể là đúng, nhưng không có cách nào để chứng minh nó.

Thôi thúc vì trí tò mò

Mẩu ghi chú tình cờ của Pierre de Fermat bên lề cuốn *Arithmetica* của Diophantus đã dẫn tới một thách đố điên đầu nhất trong lịch sử. Bất chấp ba thế kỷ thất bại một cách vẻ vang và gợi ý của định lý Godel cho rằng có thể họ đang săn đuổi một chứng minh không hề tồn tại, nhưng một số nhà toán học vẫn tiếp tục bị bài toán đó hấp dẫn. Định lý cuối cùng là nàng tiên cá đầy quyến rũ trong toán học, nàng nhử các bậc thiên tài đến gần, chỉ cốt để làm tan tành niềm hy vọng của họ. Bất kỳ một nhà toán học nào đã từng dính líu đến Định lý cuối cùng của Fermat đều có nguy cơ tiêu phí sự nghiệp của họ, tuy nhiên ai có thể tạo ra một đột phá quan trọng thì người đó sẽ đi vào lịch sử như là người đã giải được bài toán khó nhất trên thế giới.

Nhiều thế hệ các nhà toán học đã bị ám ảnh bởi Định lý cuối cùng của Fermat vì hai lý do. Một là niềm đam mê muốn làm được điều gì đó hơn người. Thật vậy, Định lý cuối cùng là một thử thách tột bậc và bất kỳ ai chứng minh được nó thì sẽ là người đạt được thành công ở chính nơi mà Cauchy, Euler, Kummer và một số không đếm được những người khác đã từng thất bại. Cũng giống như bản thân Fermat đã rất lấy làm khoái chí khi giải được những bài toán quá khó mà những người cùng thời với ông phải bó tay, người nào chứng minh được Định lý cuối cùng cũng sẽ được hưởng niềm hạnh phúc của người đã giải được một bài toán từng làm khốn khổ toàn thể cộng đồng toán học trong hàng trăm năm. Hai là bất kỳ ai vượt qua được thách thức của Fermat cũng sẽ còn được hưởng cảm giác thỏa mãn phấn khích vì đã giải được một câu đố. Niềm vui nảy sinh từ việc giải được những bài toán phức tạp nhất trong lý thuyết số cũng không khác nhiều lắm so với những niềm vui giản đơn trong việc giải những câu đố bình thường của Sam Loyd. Có lần một nhà toán học nói với tôi rằng niềm vui ông có được từ việc giải các bài toán toán học cũng gần tương tự như niềm vui mà những người nghiền trò chơi ô chữ có được. Điền được chữ vào ô trống cuối cùng trong một trò chơi ô chữ đặc biệt khó luôn luôn là một trải nghiệm đầy thỏa mãn, nhưng hãy tưởng tượng cảm giác sẽ hạnh phúc biết bao khi đạt được thành công tìm ra lời giải, sau khi đã tiêu tốn bao nhiêu năm trời cho một câu đố mà không ai khác trên thế gian này có thể giải nổi.

Đó cũng chính là những lý do tại sao Andrew Wiles lại bị mê hoặc bởi Fermat: "Các nhà toán học thuần túy chỉ thích đối mặt với thách thức. Họ yêu những bài toán chưa giải được. Khi làm toán, họ có một cảm xúc thật khó tả. Bạn bắt đầu với một bài toán mà nó làm cho bạn hoang mang bối rối. Bạn không thể hiểu được nó, nó quá phức tạp, bạn chẳng thể lần ra đầu mối của nó. Nhưng rồi sau khi đã giải được nó, bạn sẽ có một cảm xúc không thể tưởng tượng được rằng làm sao nó có thể đẹp đến như thế, làm sao mà nó lại kết cấu với nhau một cách ăn khớp tuyệt vời đến như thế. Những bài toán dễ đánh lừa người ta nhất là những bài toán trông bề ngoài rất dễ dàng, nhưng hóa ra chúng cực kỳ phức tạp. Định lý cuối cùng của Fermat là một thí dụ tuyệt vời nhất của loại bài toán này. Trông nó có vẻ như là đã có một chứng minh, tất nhiên là rất đặc biệt vì Fermat đã khẳng định rằng ông đã tìm ra chứng minh của nó".

Toán học có những ứng dụng trong khoa học và công nghệ, nhưng đó không phải điều kích thích các nhà toán học. Họ được truyền cảm hứng bởi niềm vui khám phá. G.H. Hardy đã cố gắng giải thích và đánh giá nghề nghiệp của bản thân ông trong cuốn sách mang tên *Lời xin lỗi của một nhà toán học* như sau:

> Tôi sẽ chỉ nói rằng nếu một bài toán chơi cờ, nói theo nghĩa thô thiển, là "vô dụng", thì tương tự điều đó cũng đúng với phần lớn những lĩnh vực toán học đẹp nhất... Tôi chưa bao giờ làm được bất kỳ cái gì "có ích" cả. Chẳng có khám phá nào của tôi, dù là trực tiếp hay gián tiếp, đã làm hoặc có thể sẽ làm thay đổi một mảy may nào theo hướng tốt hoặc xấu những thú vui ở thế gian. Đánh giá theo tất cả những tiêu chuẩn thực tiễn, thì giá trị cuộc đời toán học của tôi là số 0 và dẫu sao thì bên ngoài toán học nó cũng là tầm thường. Tôi chỉ có một cơ hội để tránh khỏi bị phán xét là vô dụng, nếu người ta thấy rằng tôi đã tạo ra một điều đáng được sáng tạo. Việc tôi đã sáng tạo ra được một cái gì đó là điều không thể phủ nhận: vấn đề chỉ là giá trị của nó mà thôi.

Khát vọng tìm ra lời giải đối với bất kỳ bài toán toán học nào đều được đốt cháy bởi sự tò mò, tính hiếu kỳ, và phần thưởng đơn giản chỉ là sự thỏa mãn đã nảy sinh từ việc giải được một thách đố. Nhà toán học E.C. Tithmarsch có lần nói: "Có thể việc biết số pi (π) là số vô tỷ chẳng có ứng dụng gì trong thực tiễn, nhưng nếu chúng ta có thể biết được điều đó mà chúng ta lại không biết thì đó là điều không thể dung thứ được".

Trường hợp Định lý cuối cùng của Fermat là một sự kỳ lạ kích thích trí tò mò. Công trình của Godel về tính không quyết định được đã dẫn tới sự ngờ vực rằng liệu bài toán có thể giải được hay không, nhưng điều này không đủ để làm nhụt chí những kẻ thật sự cuồng tín đối với Định lý Fermat. Điều làm ngã lòng nhiều hơn là ở chỗ trong những năm 1930 các nhà toán học đã tận dụng hết mọi kỹ thuật của họ và chỉ còn rất ít kỹ thuật dự trữ. Cái cần có là một công cụ mới, một cái gì đó thực sự vực dậy được tinh thần toán học. Và cuộc Chiến tranh thế giới lần thứ hai đã cung cấp đúng cái cần có - đó là bước nhảy vọt vĩ đại nhất của khả năng tính toán kể từ khi phát minh ra thước logarit.

Cách tiếp cận bạo lực

Năm 1940, sau khi tuyên bố rằng những loại toán học đẹp đẽ nhất phần lớn là vô dụng, G.H.Hardy đã vội vã bổ sung rằng điều đó không nhất thiết là dở: "Toán học thật (tức toán học thuần túy - ND) sẽ không có tác dụng gì trong chiến tranh cả. Chưa ai khám phá ra lý thuyết số phục vụ bất cứ một mục đích chiến tranh nào". Nhưng chẳng bao lâu tuyên bố của Hardy đã bị chứng minh là sai.

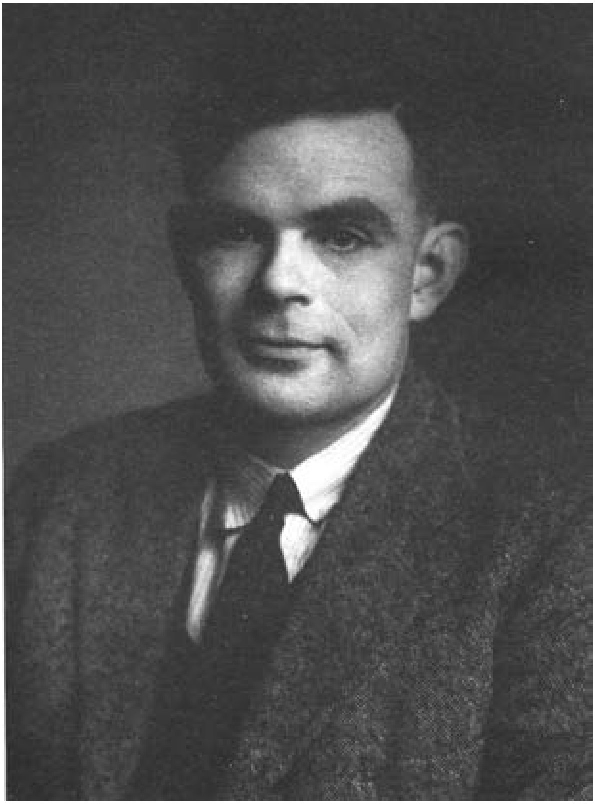
Năm 1944, John von Newmann là đồng tác giả của cuốn *Lý thuyết trò chơi và hành vi kinh tế,* trong đó ông đã tung ra thuật ngữ lý thuyết trò chơi. Lý thuyết trò chơi là ý đồ của von Newmann nhằm sử dụng toán học để mô tả cấu trúc của những trò chơi và cách thức con người chơi những trò chơi đó ra sao. Ông bắt đầu nghiên cứu môn chơi cờ và môn đánh bạc, sau đó tiếp tục thử nghiệm và xây dựng mô hình những trò chơi tinh tế hơn như kinh tế học. Sau Chiến tranh thế giới lần thứ hai, tổ hợp RAND nhận thấy tiềm năng trong những ý tưởng của von Newmann và đã thuê ông vạch ra những chiến lược của cuộc Chiến tranh lạnh. Từ điểm này trở đi, lý thuyết trò chơi trong toán học đã trở thành một công cụ căn bản cho các vị tướng soái dùng để kiểm tra những chiến lược quân sự của họ bằng cách xem các trận đánh như những ván cờ phức tạp. Một minh họa đơn giản cho việc áp dụng lý thuyết trò chơi là câu chuyện cuộc đấu tay ba dưới đây.

Một cuộc đấu tay ba cũng tương tự như cuộc đấu tay đôi, trừ việc có ba người tham gia thay vì chỉ có hai. Một buổi sáng, ông Black, ông Grey và ông White quyết định giải quyết một xung đột bằng một cuộc đấu súng tay ba cho tới khi chỉ còn một người sống sót. Ông Black là người bắn kém nhất, trung bình chỉ bắn trúng mục tiêu một trong ba phát bắn. Ông Grey bắn tốt hơn, trúng hai trong ba phát. Ông White bắn tốt nhất, luôn luôn bắn trúng. Để cho cuộc đấu công bằng hơn, ông Black được phép bắn trước, sau đó đến ông Grey (nếu ông ta còn sống), tiếp theo là ông White (nếu ông này còn sống), và quay vòng lại đến chừng nào chỉ còn sống sót một trong ba người. Câu hỏi đặt ra là: Ông Black nên nhắm bắn vào ai trước? Bạn có thể phỏng đoán dựa vào trực giác, hoặc tốt hơn có thể dựa vào lý thuyết trò chơi. Câu trả lời sẽ được thảo luận trong Phụ lục 9.

Một ngành toán học thậm chí còn có ảnh hưởng trong chiến tranh lớn hơn cả lý thuyết trò chơi là khoa học giải mã. Suốt trong cuộc

Chiến tranh thế giới lần thứ hai, quân đội đồng minh đã nhận thấy rằng về mặt lý thuyết, có thể dùng logic toán để giải mã các bức điện của Đức, chỉ nếu những tính toán có thể được thực hiện đủ nhanh. Thách thức ở đây là phải tìm ra cách tự động hóa toán học sao cho một chiếc máy có thể thực hiện được các phép tính đó, và một người Anh đã có những đóng góp nhiều nhất vào nỗ lực giải mã này là Alan Turing.

Năm 1938, Turing quay trở lại Đại học Cambridge sau khi đã hoàn thành công việc của mình tại Đại học Princeton. Ông đã trực tiếp chứng kiến tình trạng náo động do các định lý của Godel về tính không quyết định được gây ra, đồng thời tham gia vào những nỗ lực cứu vớt những mảnh mơ ước còn lại của Hilbert. Đặc biệt, ông rất muốn biết liệu có thể có một phương pháp xác định những vấn đề nào là quyết định được và vấn đề nào là không quyết định được hay không, ông đã cố gắng phát triển một cách có phương pháp để trả lời câu hỏi này. Vào thời đó máy móc tính toán còn rất thô sơ và không có hiệu quả thực tế khi xuất hiện những nhu cầu toán học nghiêm túc; và để thay thế những chiếc máy thô sơ đó Turing xây dựng những ý tưởng của mình dựa trên quan niệm về một chiếc máy tưởng tượng có khả năng tính toán vô hạn. Chiếc máy giả thuyết này dùng một lượng vô hạn các băng giấy tưởng tượng giống như máy điện báo và có thể tính toán mãi mãi, đó là tất cả những gì mà ông đòi hỏi để khảo sát những vấn đề logic trừu tượng của mình. Turing không hề ngờ rằng việc cơ khí hóa tưởng tượng những vấn đề giả thuyết của ông cuối cùng lại dẫn tới một đột phá trong việc thực hiện các phép tính thực trên những máy tính thực.



Alan Turing

Bất chấp sự bùng nổ chiến tranh, Turing vẫn tiếp tục công trình nghiên cứu của mình ở trường King College, cho đến tận ngày 4 tháng 9 năm 1940 cuộc sống phẳng lặng của ông nhờ Đại học Cambridge mới đi đến một kết thúc bất ngờ. Ông được Trường mật mã của Chính phủ trưng dụng, nhiệm vụ của trường này là giải mã những bức điện đã mã hóa của quân thù. Trước chiến tranh, người Đức đã có một nỗ lực đáng kể để phát triển một hệ thống mã hóa cao cấp, và đây là một vấn đề gây lo lắng nghiêm trọng đối với cơ quan phản gián Anh, cơ quan đã từng giải mã các liên lạc của kẻ thù một cách tương đối dễ dàng trong quá khứ. Cuốn sách lịch sử chiến tranh chính thức của HMSO mang tên *Tình báo Anh trong Chiến tranh thế giới lần thứ hai* mô tả tình thế sân khấu thời cuộc những năm 1930 như sau:

> Vào năm 1937, người ta đã xác minh được rằng, không giống như các đồng minh Italia và Nhật của mình, lục quân Đức, hải quân Đức, và có lẽ cả không quân Đức, cùng với những tổ chức nhà nước khác như ngành đường sắt và cơ quan SS, ngoại trừ các thông tin liên lạc chiến thuật ra, còn thì tất cả đều sử dụng các phiên bản khác nhau của cùng một hệ thống mật mã - đó là chiếc máy Enigma đã được bán ngoài thị trường trong những năm 1920 nhưng giờ đây đã được người Đức cải tiến cho an toàn hơn. Năm 1937, Trường mật mã chính phủ đã khám phá thành công cấu trúc của một mô hình ít thay đổi và kém an toàn hơn của chiếc máy này, mà người Đức và các lực lượng quốc xã ở Italia và Tây Ban Nha đã quen sử dụng. Nhưng ngoài trường hợp này ra thì chiếc Enigma cho đến lúc đó vẫn kháng cự lại mọi cuộc công phá, và dường như nó sẽ còn tiếp tục kháng cự như thế.

Máy Enigma bao gồm một bộ bàn phím nối với bộ phận mã hóa. Bộ phận mã hóa này chứa ba rotor riêng rẽ và vị trí của các rotor xác định mỗi chữ cái trên bàn phím sẽ được mã hóa ra sao. Mã của Enigma rất khó phá do số lượng khổng lồ của các cách mà chiếc máy này có thể tạo lập. Đầu tiên, ba rotor trong máy sẽ được chọn từ 5 khả năng tuyển lựa, và lại có thể được biến đổi và hoán vị vòng quanh để gây rối cho người giải mã. Thứ hai, mỗi rotor lại có thể được định vị theo một trong 26 cách khác nhau. Điều này có nghĩa là chiếc máy có thể thiết đặt theo hơn một triệu cách khác nhau. Bổ sung thêm cho các hoán vị do các rotor cung cấp, bảng phích cắm kết nối ở phía sau của chiếc máy có thể được thay đổi bằng tay sẽ cung cấp tổng cộng 150 triệu triệu triệu cách thiết lập khác nhau. Để tăng cường tính an toàn hơn nữa, ba rotor liên tục thay đổi sự định hướng của chúng, sao cho mỗi lần một chữ cái được phát đi, sự thiết lập máy, và cả sự mã hóa, cũng sẽ thay đổi cho chữ cái tiếp theo. Thí dụ, khi ta gõ "DODO" có thể tạo ra bức điện "FTGB" - nghĩa là chữ "D" và chữ "O" được gửi đi hai lần nhưng mỗi lần lại được mã hóa khác nhau.

Những chiếc máy Enigma đã được giao cho hải, lục, không quân Đức, và thậm chí cũng được sử dụng để phục vụ ngành đường sắt và các bộ khác trong Chính phủ. Cũng như tất cả các hệ thống mã hóa được sử dụng trong giai đoạn đó, chỗ yếu của Enigma là người nhận mã phải biết được cách thiết lập trong máy Enigma của người gửi. Để đảm bảo an toàn, những kiểu thiết lập này phải được thay đổi trên căn bản hàng ngày. Một cách để người gửi thay đổi cách thiết lập thường xuyên và bảo đảm cho người nhận được biết là công bố những cách thiết lập này trong một cuốn sách mật mã bí mật. Nguy cơ của phương pháp này là ở chỗ quân Anh có thể bắt được một tàu ngầm của Đức và sẽ thu được cuốn sách mật mã với tất cả các cách thiết lập hàng ngày như thế cho cả tháng tiếp theo. Một cách thay thế khác, và cũng là cách chủ yếu được chọn trong chiến tranh, là thông báo cách thiết đặt của ngày hôm nay trong lời mở đầu của bức điện được mã hóa bằng mã của ngày hôm trước.

Khi Chiến tranh thế giới lần thứ hai nổ ra, biên chế của Trường mật mã Anh chủ yếu bao gồm các nhà nghiên cứu ngôn ngữ cổ và các nhà ngôn ngữ học. Nhưng Bộ Ngoại giao Anh sớm nhận thấy rằng các nhà lý thuyết số có cơ may tốt hơn để tìm ra chìa khóa bẻ mã của người Đức; và để bắt đầu, chín nhà lý thuyết số xuất sắc nhất của Anh đã được triệu tập về căn nhà mới của Trường mật mã ở Bletchley Park, một lâu đài thời Victoria ở Bletchley, Buckinghamshire. Vậy là Turing đành phải từ bỏ những chiếc máy giả thuyết của ông với những băng giấy điện báo vô hạn và thời gian xử lý vô tận để chuyển sang làm việc với một bài toán thực tiễn cùng những nguồn tài nguyên hữu hạn và một thời hạn quy định rất thực tế.

Khoa học mật mã là một cuộc đấu trí giữa người lập mã và người giải mã. Thách thức đối với người lập mã là phải làm cho bức điện gửi đi rối ren tới mức nếu bị kẻ thù chặn bắt được thì cũng không thể giải mã ra. Tuy nhiên, có một giới hạn đối với số lượng của các thao tác toán học khả dĩ bởi vì cần phải gửi bức điện đi nhanh và hiệu quả. Thế mạnh của mã tạo bởi máy Enigma của Đức là ở chỗ các bức điện được mã hóa ở một số cấp độ với tốc độ rất cao. Thách thức đối với người giải mã là lấy một bức điện bị chặn bắt và phá được khóa mã trong khi nội dung của bức điện vẫn còn đang có giá trị. Một bức điện của Đức ra lệnh phải đánh chìm một con tàu của Anh phải được giải mã trước khi con tàu này bị đánh chìm.

Turing lãnh đạo nhóm các nhà toán học với nhiệm vụ dựng lại một bản sao của chiếc máy Enigma. Turing kết hợp những ý tưởng trừu tượng của ông trước chiến tranh vào trong những chiếc máy này, về mặt lý thuyết chúng có thể kiểm tra một cách có phương pháp tất cả các khả năng mà chiếc máy Enigma có thể thiết đặt cho đến khi khóa mã bị bẻ gãy mới thôi. Những chiếc máy của Anh, chiều cao và chiều rộng đều lớn hơn 2 mét, sử dụng những rơle cơ điện để kiểm tra tất cả các cách thiết lập có thể có của Enigma. Tiếng lách tách không ngừng của các rơle này khiến người ta đặt cho những chiếc máy này biệt danh là những "quả bom". Mặc dù có tốc độ khá cao, nhưng các quả bom này cũng không thể kiểm tra hết 150 triệu triệu triệu cách thiết lập khả dĩ của Enigma trong một khoảng thời gian hợp lý, và do đó nhóm của Turing phải tìm cách để giảm thiểu một cách đáng kể số các hoán vị bằng cách lượm lặt bất kể thông tin gì có thể được từ những bức điện được đối phương gửi đi.

Một trong những đột phá vĩ đại nhất mà quân Anh làm được là việc phát hiện ra chiếc máy Enigma không bao giờ mã hóa một chữ cái bằng chính nó, nghĩa là nếu người gửi gõ chữ "R" thì có nhiều khả năng là chiếc máy gửi đi bất kỳ một chữ cái nào trừ chữ "R", tùy thuộc vào cách thiết đặt của máy. Điều này bề ngoài có vẻ vô hại nhưng chính là tất cả những gì cần thiết để giảm thiểu một cách ghê gớm thời gian đòi hỏi để giải mã một bức điện. Người Đức đã đánh lại bằng cách giới hạn độ dài của bức điện họ gửi đi. Tất cả các bức điện không tránh khỏi đều có chứa những đầu mối đối với nhóm những nhà giải mã, và bức điện càng dài thì càng có nhiều đầu mối. Bằng cách giới hạn tất cả các bức điện tối đa chỉ có 250 chữ cái, người Đức hy vọng sẽ bù được thiếu sót của máy Enigma khi nó "không muốn" mã hóa một chữ cái bằng chính chữ cái đó.

Nhằm mục đích bẻ mã, Turing thường xuyên cố gắng đoán những từ chủ yếu trong bức điện. Nếu ông đoán đúng thì điều đó sẽ làm tăng vọt tốc độ giải mã phần còn lại của bức điện. Thí dụ, nếu người giải mã ngờ rằng đây là một bức điện có nội dung báo cáo về thời tiết, một loại báo cáo mã hóa thường xuyên, thì họ sẽ đoán bức điện có chứa những từ như "fog" (sương mù) hoặc "windspeed" (tốc độ gió). Nếu đoán đúng thì họ có thể nhanh chóng giải mã được bức điện, và vì thế có thể suy ra được các cách thiết đặt của Enigma trong ngày hôm đó. Đối với phần còn lại trong ngày, những bức điện khác có giá trị hơn có thể được bẻ mã một cách dễ dàng.

Khi không đoán ra các từ thời tiết, người Anh sẽ thử đặt mình vào vị thế của những người điều khiển chiếc Enigma của Đức để đoán những từ khóa khác. Một người điều khiển cẩu thả có thể xưng hô với người nhận theo tên hoặc có những từ ngữ thân mật riêng mà người bẻ mã đã biết. Khi tất cả những cách này vẫn thất bại và sự thông tin liên lạc của người Đức vẫn trôi chảy không thể kiểm soát được, thì nghe nói Trường mật mã Anh thậm chí đã phải cầu viện đến lực lượng hàng không hoàng gia (RAF), yêu cầu họ thả mìn một cảng nào đó của Đức. Ngay lập tức người phụ trách bến cảng này của Đức sẽ phải gửi đi một bức điện mã hóa mà người Anh có thể chặn bắt được. Những người giải mã có thể tin chắc rằng bức điện sẽ chứa những từ như "mine" (mìn), "avoid" (tránh) và "map reference" (tham khảo bản đồ). Sau khi giải mã được bức điện này, Turing sẽ biết được cách thiết đặt của máy Enigma và bất kỳ bức điện nào tiếp sau của Đức đều dễ dàng được giải mã nhanh chóng.

Ngày 1 tháng 2 năm 1942, người Đức đã bổ sung thêm bánh xe thứ tư vào các máy Enigma dùng để gửi những thông tin đặc biệt nhạy cảm. Đây là một bước leo thang lớn nhất về cấp độ lập mã trong suốt cuộc chiến tranh, nhưng tất nhiên là nhóm của Turing đã đánh trả lại bằng việc tăng cường hiệu quả của các "quả bom".

Nhờ Trường mật mã, quân đồng minh biết về kẻ thù của họ nhiều hơn mức mà người Đức từ trước tới nay có thể ngờ tới. Hiệu quả hoạt động của tàu ngầm Đức tại Đại Tây Dương đã bị giảm thiểu đáng kể và người Anh đều đã thành công báo trước được những cuộc tấn công của không quân Đức. Các nhà giải mã cũng đã chặn bắt và giải mã được những bức điện cho biết vị trí chính xác của tàu dự trữ của hải quân Đức, và điều này cho phép người Anh có thể đưa các máy bay ném bom tới đánh chìm chúng.

Trong toàn bộ thời gian đó, các lực lượng đồng minh đã phải hết sức cẩn trọng để những hành động né tránh bị tấn công của họ hoặc những cuộc tấn công kỳ lạ mà họ đánh lại đối phương không để lộ rằng họ đã giải mã được các thông tin liên lạc của Đức. Nếu người Đức nghi ngờ Enigma đã bị bẻ khóa thì họ sẽ tăng cường mức độ mã hóa của họ, và người Anh có thể sẽ trở về tình trạng không lại hoàn không. Vì thế có những trường hợp khi Trường mật mã thông báo cho đồng minh biết một cuộc tấn công sắp xảy ra, quân đồng minh đã không chọn biện pháp đối phó thái quá. Thậm chí có tin đồn rằng thủ tướng Anh Churchill đã biết trước Coventry sẽ là mục tiêu của một cuộc oanh tạc tàn khốc, nhưng ông đã không đưa ra những biện pháp đặc biệt nào để tránh sự nghi ngờ của người Đức. Tuy nhiên, Stuart Milner-Barry, người đã làm việc cùng Turing, phủ nhận những lời đồn đại đó, và nói rằng thực ra bức điện tín liên quan đến Coventry mà ta đang nói đã không được giải mã kịp thời trước lúc quá muộn.

Việc sử dụng kiềm chế những thông tin đã được giải mã được thực hiện một cách hoàn mỹ. Thậm chí khi người Anh sử dụng những thông tin liên lạc chặn bắt được để giáng cho kẻ thù những tổn thất nặng, người Đức cũng không ngờ rằng mã của Enigma đã bị phá. Họ tin rằng mức độ mã hóa của họ cao cấp đến nỗi tuyệt đối không thể giải mã được. Thay vì thế họ lại đổ lỗi những tổn thất khác thường của họ là do các nhân viên mật vụ Anh đã lọt vào hàng ngũ của họ.

Do phải giữ bí mật xung quanh công việc mà Turing và nhóm của ông tiến hành ở Betchley, nên sự đóng góp vô cùng to lớn của họ cho chiến tranh có thể không bao giờ được thừa nhận một cách công khai, thậm chí trong nhiều năm sau chiến tranh. Người ta thường nói rằng: Chiến tranh thế giới lần thứ nhất là cuộc chiến tranh của các nhà hóa học và Chiến tranh thế giới lần thứ hai là cuộc chiến tranh của các nhà vật lý. Thực tế, từ những thông tin được tiết lộ trong những thập kỷ gần đây, có lẽ đúng ra phải nói rằng Chiến tranh thế giới lần thứ hai là cuộc chiến tranh của các nhà toán học và trong trường hợp có một thế chiến thứ ba thì đóng góp của họ (những nhà toán học) thậm chí sẽ còn quan trọng hơn nữa.

Trong suốt thời gian làm công việc giải mã, Turing vẫn không bao giờ sao nhãng những mục tiêu toán học. Những chiếc máy giả thuyết đã được thay thế bằng những chiếc máy hiện thực, nhưng những câu hỏi bí hiểm thì vẫn còn đó. Vào giai đoạn cuối của chiến tranh Turing đã giúp xây dựng Colossus, một chiếc máy tính điện tử bao gồm 1.500 đèn điện tử, nhanh hơn rất nhiều so với những cái rơle cơ điện dùng trong các “quả bom”. Colossus là một chiếc máy tính theo nghĩa hiện đại của từ này, và với tốc độ và sự tinh vi siêu hạng của nó, Turing bắt đầu nghĩ về nó như một bộ não thô sơ - nó có một bộ nhớ, nó có thể xử lý thông tin, và những trạng thái bên trong của nó giống với những trạng thái của bộ óc.

Turing đã biến chiếc máy tưởng tượng của ông thành một chiếc computer hiện thực đầu tiên.

Khi cuộc chiến kết thúc, Turing vẫn tiếp tục xây dựng những chiếc máy tính có độ phức tạp tăng lên không ngừng, như chiếc ACE (Automatic Computing Engine - Máy tính tự động), chẳng hạn. Năm 1948, ông chuyển đến Đại học Manchester và xây dựng chiếc máy tính đầu tiên trên thế giới có chương trình lưu trữ bằng điện tử. Turing đã cung cấp cho nước Anh những chiếc máy tính tiên tiến nhất trên thế giới, nhưng ông đã không sống đủ lâu để thấy những tính toán kỳ diệu nhất của nó.

Trong những năm sau chiến tranh, Turing luôn phải chịu sự giám sát của cơ quan phản gián Anh. Cơ quan này biết rằng ông đang có quan hệ đồng tính luyến ái và họ e ngại rằng một người biết quá rõ về các mã an ninh của Anh hơn bất kỳ ai khác sẽ dễ bị hăm dọa tống tiền, nên đã quyết định theo dõi từng bước đi của ông. Turing hầu như đã cam chịu tình trạng đó, nhưng vào năm 1952 ông đã bị bắt vì vi phạm các đạo luật về đồng tính luyến ái của Anh. Sự nhục nhã này đã làm cho cuộc sống của Turing trở nên không thể chịu đựng nổi nữa. Andrew Hodges, một người viết tiểu sử Turing, đã mô tả những sự kiện dẫn tới cái chết của ông như sau:

> Cái chết của Alan Turing là một cú sốc đối với tất cả những ai đã từng biết ông... Chuyện ông là một người bất hạnh, luôn luôn trong trạng thái căng thẳng thần kinh; chuyện ông đã từng tới khám ở một chuyên gia tâm thần và đã từng chịu những đòn có thể làm gục ngã nhiều người - tất cả những chuyện đó đều đã rõ ràng. Nhưng phiên tòa xử ông hai năm trước, việc điều trị hormone đã kết thúc một năm trước đó, và dường như ông đã vượt qua được tất cả những điều đó.

> Cuộc điều tra vào ngày 10 tháng 6 năm 1954 đã khẳng định rằng đó là một vụ tự sát. Người ta đã phát hiện thấy ông nằm còng queo trên giường, quanh miệng đầy bọt. Nhà nghiên cứu bệnh học - người khám nghiệm tử thi - đã dễ dàng xác nhận rằng nguyên nhân của cái chết là do ngộ độc xyanua... Trong nhà có một cốc to chứa chất kali xyanua, và một cái cốc to khác đựng dung dịch xyanua. Bên cạnh giường ông có một nửa quả táo, đã cắn một vài miếng. Người ta đã không phân tích quả táo đó, và vì thế không bao giờ xác lập được một cách chính xác, mặc dù dường như đã quá rõ ràng, là quả táo đã bị nhúng trong dung dịch xyanua.

Di sản của Turing là một chiếc máy có thể thực hiện trong vài giờ đồng hồ những tính toán dài tới mức phi thực tế, nếu được thực hiện bởi con người. Những máy tính ngày nay có thể thực hiện trong một phần giây một khối lượng tính toán mà cả đời Fermat cũng không thực hiện nổi. Các nhà toán học hiện vẫn đang còn vật lộn với Định lý cuối cùng của Fermat đã bắt đầu sử dụng máy tính để công phá bài toán đó, bằng cách dựa vào phiên bản máy tính hóa của phương pháp đã được Kummer phát triển ở thế kỷ XIX.

Sau khi khám phá ra sai lầm trong công trình của Cauchy và Lamé, Kummer đã chỉ ra khó khăn nổi bật trong việc chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat là những chứng minh đối với các trường hợp trong đó số mũ n là một số nguyên tố bất thường - đối với những giá trị của n nhỏ hơn 100 thì chỉ có ba số nguyên tố bất thường là 37, 59 và 67. Đồng thời, Kummer cũng đã chỉ ra rằng về mặt lý thuyết việc chứng minh với mỗi số nguyên tố bất thường có thể được khảo sát một cách riêng rẽ. Vấn đề duy nhất đặt ra chỉ là ở chỗ mỗi trường hợp đòi hỏi một khối lượng tính toán khổng lồ.

Việc Kummer cùng với cộng sự của mình là Dimitri Mirimanoff đã mất hàng tuần lễ để chứng minh cho trường hợp các số nguyên tố bất thường nhỏ hơn 100 đã chứng tỏ khối lượng tính toán lớn tới mức nào. Tuy nhiên, họ và những nhà toán học khác chưa được chuẩn bị để tiến hành tính toán cho nhóm các số nguyên tố bất thường tiếp theo từ 100 đến 1.000.

Vài thập kỷ sau, những bài toán với khối lượng tính toán khổng lồ đã bắt đầu dễ xử lý hơn. Với sự xuất hiện của máy tính, những trường hợp rắc rối của Định lý cuối cùng của Fermat đã có thể được giải quyết nhanh chóng, và sau Chiến tranh thế giới lần thứ hai, nhiều nhóm các nhà khoa học công nghệ thông tin và toán học đã chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat với những giá trị của n lên tới 500, rồi 1.000, và đến 10.000. Trong những năm 1980, Samuel S. Wagstaff thuộc Đại học Illinois đã nâng giới hạn lên tới 25.000 và gần đây hơn các nhà toán học đã có thể tuyên bố rằng Định lý cuối cùng của Fermat đúng với mọi giá trị của n lên tới 4 triệu.

Mặc dù những người ngoại đạo cho rằng cuối cùng thì công nghệ hiện đại cũng đã giúp ta đạt tới những kết quả tốt hơn đối với Định lý cuối cùng, nhưng cộng đồng toán học biết rõ rằng thắng lợi của họ mới chỉ thuần túy là một thứ khai vị. Thậm chí, nếu các máy tính có tiêu tốn hàng thập kỷ để chứng minh hết giá trị n này đến giá trị n khác thì nó cũng chẳng bao giờ chứng minh được với mọi giá trị của n tới vô cùng, và do đó không bao giờ có thể tuyên bố là đã chứng minh hoàn toàn định lý. Thậm chí nếu định lý được chứng minh với n lên đến một tỷ, thì cũng chẳng có lý do gì để kết luận nó sẽ đúng với n bằng một tỷ linh một. Và nếu định lý có được chứng minh với n lên tới một nghìn tỷ, cũng chẳng có lý do gì để kết luận nó đúng với một nghìn tỷ linh một, và cứ như thế tới vô cùng. Vô cùng không thể nhận được đơn thuần chỉ bằng bạo lực nghiền nát những con số đã được máy tính hóa.

David Lodge trong cuốn sách *Những cuộc phiêu du trong các bức tranh* đã mô tả rất hay về cái vĩnh cửu, một khái niệm có liên quan tới khái niệm cái vô hạn, như sau: "Hãy tưởng tượng một quả cầu thép to bằng Trái đất, và một con ruồi đậu nhẹ xuống đó cứ một triệu năm một lần. Khi quả cầu thép mòn hết đi vì sự ma sát (của con ruồi - ND) thì cái vĩnh cửu thậm chí vẫn còn chưa bắt đầu".

Tất cả những điều máy tính có thể làm là cung cấp những bằng chứng ủng hộ Định lý cuối cùng của Fermat mà thôi. Đối với một người quan sát tình cờ thì bằng chứng đó có vẻ như là quá mạnh, nhưng không có một số lượng bằng chứng nào đủ để làm thỏa mãn các nhà toán học, một cộng đồng hoài nghi không chấp nhận điều gì ngoài một chứng minh tuyệt đối. Ngoại suy một lý thuyết để bao trùm một số vô hạn các số dựa trên những bằng chứng từ một số hữu hạn các số là một trò đỏ đen đầy rủi ro (và không thể chấp nhận được).

Dãy các số nguyên tố đặc biệt sau đây sẽ cho thấy việc ngoại suy từ một tập hợp hữu hạn sang vô hạn là nguy hiểm tới mức nào. Bằng sự kiểm tra chi tiết, các nhà toán học thế kỷ XVII đã chỉ ra rằng các số sau đây là nguyên tố:

31; 331; 3.331; 33.331; 333.331; 3.333.331; 33.333.331

Những số tiếp theo của dãy số đó trở nên rất lớn, và việc kiểm tra xem liệu chúng có phải là số nguyên tố hay không đòi hỏi một nỗ lực đáng kể. Vào thời đó một số nhà toán học đã có ý định ngoại suy hình mẫu này rộng thêm ra, và giả định rằng mọi số có dạng đó đều là số nguyên tố. Tuy nhiên, số hạng ngay tiếp theo trong hình mẫu đó, tức là số 333.333.331, hóa ra lại không phải là nguyên tố:

$$333.333.331 = 17 \times 19.607.843$$

Một ví dụ lý thú khác cho thấy tại sao các nhà toán học không thể bị thuyết phục bởi các bằng chứng của máy tính là trường hợp Giả thuyết Euler. Euler tuyên bố rằng không có lời giải đối với phương trình tương tự với phương trình Fermat:

$$x^4 + y^4 + z^4 = \Omega^4$$

Trong hai trăm năm không ai chứng minh được giả thuyết này, nhưng mặt khác cũng không ai có thể phủ nhận được nó bằng cách chỉ ra được một phản ví dụ. Cả những tính toán đầu tiên bằng tay lẫn nhiều năm tìm kiếm bằng máy tính sau đó đều không tìm ra một nghiệm số nào. Việc không tìm ra một phản ví dụ là bằng chứng mạnh mẽ ủng hộ Giả thuyết Euler. Nhưng năm 1988, Naom Elkies ở Đại học Harvard đã phát hiện ra nghiệm sau đây:

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$$

Mặc dù có nhiều bằng chứng, nhưng Giả thuyết Euler hóa ra lại là sai. Thực ra, Elkies đã chứng minh được rằng phương trình trên có vô số nghiệm. Bài học "luân lý" rút ra ở đây là *bạn không thể dùng bằng chứng của một triệu con số đầu tiên để chứng minh một giả thuyết đối với mọi con số.*

Nhưng tính chất đánh lừa của Giả thuyết Euler chưa ăn thua gì so với Giả thuyết ước lượng quá về số lượng các số nguyên tố. Khi rà soát những số nguyên ngày càng lớn hơn, chúng ta thấy một điều rõ ràng là ngày càng khó tìm ra các số nguyên tố hơn. Ví dụ, giữa 0 và 100 có 25 số nguyên tố nhưng giữa 10.000.000 và 10.000.100 chỉ có 2 số nguyên tố. Năm 1791, khi mới 14 tuổi, Karl

Gauss đưa ra một quy luật gần đúng, trong đó tần suất xuất hiện của số nguyên tố giữa các số khác có chiều hướng giảm dần. Công thức này khá chính xác, nhưng dường như nó luôn cho một ước lượng hơi vượt quá một chút so với sự phân bố thực của các số nguyên tố. Kiểm tra các số nguyên tố tới 1 triệu, 1 tỷ hoặc 1 nghìn tỷ đều cho thấy ước lượng của Gauss có phần hơi rộng rãi quá và các nhà toán học tin tưởng mạnh mẽ rằng điều này sẽ đúng với mọi số tới tận vô cùng, và do đó ra đời Giả thuyết ước lượng quá về số lượng các số nguyên tố.

Nhưng đến năm 1914, J.E. Littlewood, một cộng sự của G.H. Hardy ở trường Cambridge, đã chứng minh được rằng đối với các số rất lớn, công thức của Gauss lại dẫn tới ước lượng non về số lượng các số nguyên tố. Năm 1955, S. Skewes đã chỉ ra rằng sự ước lượng non có thể sẽ xảy ra trước khi đạt tới con số

$$10^{10^{10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000}}$$

Đây là một con số vượt ra ngoài trí tưởng tượng của chúng ta, và vượt ra ngoài mọi ứng dụng thực tiễn nào. Hardy gọi con số của Skewes là "số lớn nhất từ xưa tới nay đã được sử dụng cho một mục đích xác định trong toán học". Ông tính toán rằng nếu một người chơi cờ với tất cả các hạt cơ bản trong vũ trụ (10^{87}), trong đó mỗi nước đi chỉ có ý nghĩa đơn giản là hoán vị hai hạt cơ bản bất kỳ cho nhau, thì số lượng các nước đi khả dĩ của trò chơi này có thể sẽ xấp xỉ bằng số Skewes.

Chẳng có lý do gì khiến cho Định lý cuối cùng của Fermat lại không tàn nhẫn và lừa dối như Giả thuyết Euler hoặc Giả thuyết ước lượng quá về số lượng các số nguyên tố.

Những năm nghiên cứu sinh

Năm 1975, Andrew Wiles bắt đầu sự nghiệp của mình với tư cách một nghiên cứu sinh tại Đại học Cambridge. Ba năm tiếp theo ông tập trung làm luận án tiến sĩ và học nghề toán học bằng chính con đường đó. Mỗi nghiên cứu sinh đều được dìu dắt và khích lệ bởi một người hướng dẫn, và trong trường hợp của Wiles, đó là một nhà toán học Australia, John Coates, giáo sư của trường Emmanuel College, vốn là người ở Possum Brush, tiểu bang New South Wales của Australia.

Coates vẫn còn nhớ rất rõ ông đã tiếp nhận Wiles ra sao: "Tôi nhớ một cộng sự nói với tôi rằng ông ta có một sinh viên rất giỏi vừa mới thi xong phần cuối cùng về toán, và ông ta hối thúc tôi tiếp nhận cậu ta làm nghiên cứu sinh. Tôi đã rất may mắn có được một nghiên cứu sinh như Andrew. Ngay từ khi còn là một nghiên cứu sinh, anh đã có những ý tưởng rất sâu sắc và rõ ràng rằng anh là một nhà toán học sẽ làm nên những công trình lớn. Tất nhiên, ở giai đoạn đó không có chuyện một nghiên cứu sinh sẽ làm việc ngay với Định lý cuối cùng của Fermat. Vì nó quá khó ngay cả với một nhà toán học đã có kinh nghiệm lão luyện".

Trong thập kỷ đã qua mọi thứ mà Wiles đã làm đều hướng tới chuẩn bị cho bản thân đón nhận thách thức của Fermat, nhưng giờ đây khi đã gia nhập hàng ngũ các nhà toán học chuyên nghiệp ông thấy cần phải thực dụng hơn. Như Wiles nhớ lại, ông đã phải tạm thời từ bỏ ước mơ của mình: "Khi đến Cambridge, tôi thực sự phải gác Định lý Fermat sang một bên. Không phải là để quên nó - vì nó luôn luôn ở bên tôi, - mà là do tôi nhận thấy rằng những kỹ thuật mà chúng ta dùng để thử chứng minh nó thực ra đã có khoảng 130 năm nay rồi. Điều rõ ràng là những kỹ thuật này dường như không cho phép thực sự đi tới được tận cội rễ của bài toán. Vấn đề là ở chỗ khi làm việc với Định lý Fermat, bạn có thể sẽ phải tiêu tốn hàng năm trời mà không đi đến đâu cả. Được làm việc với bài toán mà mình yêu thích là điều thật tuyệt vời, chừng nào trên con đường đó bạn còn tạo ra được những kết quả toán học hay, mặc dù rốt cuộc bạn vẫn không thể giải được nó. Định nghĩa một bài toán toán học hay là ở cái toán học mà nó tạo ra, chứ không phải ở bản thân bài toán đó".

Trách nhiệm của John Coates là phải tìm cho Andrew một bài toán hấp dẫn mới, nó sẽ là đối tượng nghiên cứu của Andrew ít nhất trong ba năm tiếp theo. "Tôi nghĩ, tất cả những gì mà một người hướng dẫn có thể làm đối với một nghiên cứu sinh của mình là thử cho anh ta một cú hích theo hướng đúng. Tất nhiên, không ai có thể biết trước một cách chắc chắn hướng nghiên cứu nào sẽ có kết quả, nhưng một nhà toán học già dặn có thể sử dụng sự nhạy cảm cùng với trực giác của mình để lựa chọn lĩnh vực nghiên cứu hay, còn chuyện nghiên cứu sinh đó có thể đi được bao xa trên con đường ấy là tùy thuộc vào bản thân anh ta". Cuối cùng Coates quyết định Wiles nên nghiên cứu một lĩnh vực toán học được gọi là những đường cong eliptic. Như sẽ được chứng minh sau này, quyết định đó đúng là một bước ngoặt trong sự nghiệp của Wiles, nó mang lại cho ông những kỹ thuật mà ông cần có để xây dựng nên một cách tiếp cận mới đối với Định lý cuối cùng của Fermat.

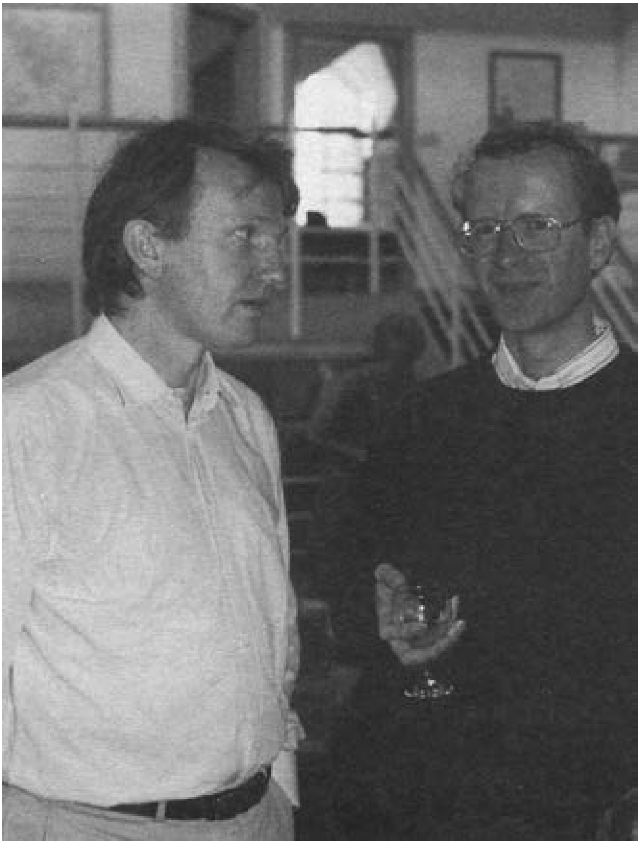
Cái tên "những đường cong eliptic" dễ khiến chúng ta hiểu lầm, vì chúng không phải là các đường elip, thậm chí cũng chẳng phải là những đường cong theo nghĩa thông thường của từ này. Thực ra, chúng là những phương trình có dạng:

$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ trong đó a, b, c là những số nguyên.

Andrew Wiles trong những năm đai học .

Sở dĩ chúng có cái tên như trên vì trong quá khứ chúng được sử dụng để đo chu vi của các hình elip và độ dài quỹ đạo các hành tinh, nhưng để cho rõ ràng tôi sẽ đơn giản gọi chúng là những phương trình eliptic thay vì là những đường cong eliptic.

Thách thức của các phương trình eliptic, cũng như của Định lý



John Coates, người hướng dẫn của Wiles,
vẫn tiếp tục giữ quan hệ với sinh viên cũ của mình.

cuối cùng của Fermat, là nằm trong câu hỏi: các phương trình này có nghiệm nguyên hay không, và nếu có, thì có bao nhiêu nghiệm. Ví dụ, phương trình eliptic:

$$y^2 = x^3 - 2, \text{ trong đó } a = 0, b = 0, c = -2$$

chỉ có một tập hợp nghiệm nguyên, cụ thể là:

$$5^2 = 3^3 - 2 \text{ hoặc } 25 = 27 - 2$$

Chứng minh phương trình eliptic này chỉ có một tập hợp nghiệm nguyên là một nhiệm vụ vô cùng khó khăn, và thực ra người đã tìm ra chứng minh đó lại chính là Pierre de Fermat. Bạn có thể còn nhớ rằng trong Chương 2 cũng chính Fermat là người đã chứng minh rằng 26 là con số duy nhất trong vũ trụ nằm kẹp giữa một số bình phương với một số lập phương. Điều này tương đương với chứng minh rằng phương trình eliptic nói trên chỉ có một nghiệm, tức là 5^2 và 3^3 là một bình phương và một lập phương duy nhất có hiệu số bằng 2, và do đó 26 là con số duy nhất bị kẹp giữa hai số như thế.

Cái làm cho các phương trình eliptic trở nên đặc biệt quyến rũ là ở chỗ chúng chiếm một vị trí trung gian kỳ lạ giữa một bên là những phương trình dạng khác đơn giản hơn mà hầu hết đều tầm thường, và một bên là những phương trình khác phức tạp hơn, không thể giải được. Bằng việc thay đổi một cách đơn giản các giá trị của a, b, và c trong phương trình eliptic tổng quát, các nhà toán học có thể tạo ra một tập hợp vô hạn các phương trình khác nhau, mỗi phương trình có những đặc trưng riêng, nhưng tất cả chúng đều có thể giải được.

Những phương trình eliptic đầu tiên đã được nghiên cứu bởi các nhà toán học cổ Hy Lạp, trong đó có Diophantus, người đã dành phần lớn tác phẩm *Arithmetica* của mình để khảo sát những tính chất của chúng. Có lẽ được Diophantus gây cảm hứng, Fermat cũng lao vào nghiên cứu các phương trình eliptic bởi vì chúng đã được nghiên cứu bởi chính người anh hùng của mình, nên Wiles rất thích thú tiếp tục khảo sát những phương trình này. Thậm chí sau hai ngàn năm, những phương trình eliptic vẫn còn đặt ra những bài toán kinh khủng đối với những nghiên cứu sinh như Wiles: "Còn rất lâu nữa chúng ta mới hiểu được hoàn toàn những phương trình này. Có rất nhiều câu hỏi bề ngoài đơn giản mà tôi có thể đặt ra về các phương trình eliptic mà vẫn còn chưa có lời giải. Thậm chí nhiều câu hỏi mà chính Fermat đã xem xét cũng vẫn còn chưa thể giải được. Về một phương diện nào đó, toàn bộ toán học mà tôi đã làm đều bắt nguồn nếu không phải ở Định lí cuối cùng của Fermat thì cũng ở những ý tưởng khác của ông".

Trong những phương trình mà Wiles nghiên cứu khi còn là nghiên cứu sinh, việc xác định chính xác số nghiệm khó đến nỗi chỉ có một cách duy nhất để thoát ra khỏi bế tắc là phải đơn giản hóa bài toán. Chẳng hạn, phương trình eliptic sau đây hầu như không thể giải được trực tiếp:

$$x^3 - x^2 = y^2 + y$$

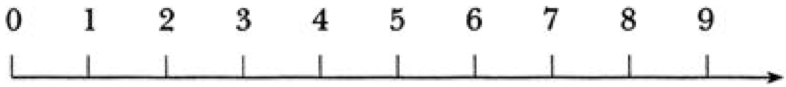
Vấn đề đặt ra bây giờ không phải là giải phương trình đó mà là tìm hiểu xem phương trình này có bao nhiêu nghiệm nguyên. Dễ dàng tìm được một nghiệm tầm thường là x=0 và y=0, vì:

$$0^3 - 0^2 = 0^2 + 0$$

Một nghiệm thú vị hơn một chút là x=1 và y=0:

$$1^3 - 1^2 = 0^2 + 0$$

Có thể có những nghiệm khác nữa, nhưng với một số vô hạn các số nguyên cần phải thử nghiệm, việc cho một danh sách đầy đủ các nghiệm của phương trình đặc biệt này là điều không thể thực hiện nổi. Một nhiệm vụ đơn giản hơn là tìm những nghiệm trong một không gian số hữu hạn, cái được gọi là số học đồng hồ.



Hình 16. Số học thông thường có thể được coi như sự dịch chuyển tới hoặc lui trên trục số.

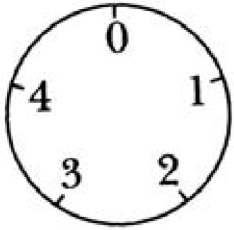
Ở các chương trước, chúng ta đã thấy các số nguyên có thể được coi như những vạch chia được đánh dấu trên trục số kéo dài đến vô cùng, như được thể hiện trong hình 16. Để làm cho không gian số trở nên hữu hạn, số học đồng hồ cắt từ trục số lấy một phần xác định, rồi nối hai đầu của nó thành một vòng kín thay cho trục số. Trên hình 17 bạn thấy một đồng hồ có 5 vạch chia: ta cắt cụt trục số ở vạch 5, sau đó dán đầu vừa cắt của đoạn lấy ra với đầu vạch 0. Khi này số 5 biến mất và trở thành tương đương với số 0, bởi vậy trong số học mới chỉ có các số (nguyên) 0, 1, 2, 3, 4.

Trong số học thông thường chúng ta có thể coi phép cộng như là sự dịch chuyển dọc theo trục số một lượng xác định các độ chia. Ví dụ, 4 + 2 = 6 cũng hệt như ta nói: bắt đầu từ vạch 4, dịch chuyển dọc theo trục số 2 độ chia, và ta sẽ đạt đến vạch 6.

Tuy nhiên, trong số học đồng hồ 5 vạch:

$$4 + 2 = 1$$

Sở dĩ như vậy là bởi vì nếu chúng ta bắt đầu từ vạch 4 và dịch chuyển theo chiều kim đồng hồ 2 độ chia thì chúng ta sẽ đi ngược trở lại 1. Số học đồng hồ có vẻ hơi xa lạ, nhưng thực ra, như tên gọi của nó gợi ý, nó vẫn được sử dụng hàng ngày trong câu chuyện của mọi người về thời gian. Bốn giờ nữa sau 11 giờ (tức là nói 11 + 4) nói chung không gọi là 15 giờ, mà thường được gọi là 3 giờ. Đây là số học đồng hồ 12 vạch.



Hình 17. Trong số học đồng hồ 5 vạch, trục số bị cắt tại số 5 và nối ngược trở lại thành vòng kín. Số 5 sẽ trùng với số 0, và do đó được thay thế bởi số 0.

Ngoài phép cộng ra, chúng ta cũng có thể thực hiện tất cả các phép toán thông thường khác, như phép nhân chẳng hạn. Trong số học đồng hồ 12 vạch thì $5 \times 7 = 11$. Phép nhân này có thể được tưởng tượng như sau: nếu bạn bắt đầu từ vạch 0, rồi dịch chuyển 5 lần, mỗi lần 7 độ chia, thì cuối cùng bạn sẽ tới vạch 11. Đây chỉ là một cách hình dung về phép nhân trong số học đồng hồ, còn có những cách khác làm cho việc tính toán nhanh hơn. Ví dụ, để tính 5×7 trong số học đồng hồ 12 vạch, chúng ta bắt đầu bằng cách tìm ra kết quả thông thường là 35. Sau đó, ta chia 35 cho 12 và tính ra số dư, đó là chính là đáp số cuối cùng. Số 12 chứa trong số 35 hai lần và dư 11, vậy đủ để biết chắc rằng 5×7 trong đồng hồ 12 vạch bằng 11. Điều này tương đương với sự tưởng tượng đi vòng quanh đồng hồ hai lần và còn phải đi thêm 11 độ chia nữa.

Vì số học đồng hồ chỉ làm việc với không gian số hữu hạn, nên tương đối dễ dàng tìm ra tất cả các nghiệm khả dĩ của một phương trình eliptic trong một số học đồng hồ cho trước. Chẳng hạn, khi làm việc với số học đồng hồ 5 vạch, người ta có thể liệt kê danh sách của tất cả các nghiệm khả dĩ đối với phương trình eliptic sau đây:

$$x^3 - x^2 = y^2 + y$$

Các nghiệm đó là: $x = 0$, $y = 0$

$x = 0, \qquad y = 4$

$x = 1, \qquad y = 0$

$x = 1, \qquad y = 4$

Mặc dù một số nghiệm này không có giá trị trong số học thông thường, nhưng trong số học đồng hồ 5 vạch chúng đều được chấp nhận. Ví dụ, nghiệm thứ tư (x=1, y=4):

$$x^3 - x^2 = y^2 + y$$
$$1^3 - 1^2 = 4^2 + 4$$
$$1 - 1 = 16 + 4$$
$$0 = 20$$

Nhưng nên nhớ rằng 20 là tương đương với 0 trong số học đồng hồ 5 vạch, bởi vì 20 chia cho 5 dư 0.

Vì không thể liệt kê tất cả các nghiệm của một phương trình eliptic trong không gian số thông thường, nên các nhà toán học, kể cả Wiles, đành phải tìm cách tính số nghiệm trong tất cả các số học đồng hồ khác nhau. Đối với phương trình eliptic đã cho ở trên, số nghiệm trong số học đồng hồ 5 vạch là 4, và do đó các nhà toán học nói rằng $E_5 = 4$. Số nghiệm trong các số học đồng hồ khác cũng có thể tính được. Chẳng hạn, trong số học đồng hồ 7 vạch, số nghiệm là 9, và do đó $E_7 = 9$.

Để tóm tắt những kết quả của mình, các nhà toán học đã liệt kê danh sách số nghiệm trong mỗi số học đồng hồ và gọi danh sách này là những dãy -L đối với phương trình eliptic. Nguồn gốc của chữ L này đã bị lãng quên từ lâu, nhưng một số người cho rằng đó là chữ L trong tên của Gustav Lejeune-Dirichlet, người đã từng nghiên cứu các phương trình eliptic. Để cho rõ ràng, tôi sẽ dùng thuật ngữ dãy -E là dãy được rút ra từ một phương trình eliptic. Đối với thí dụ đã cho ở trên thì dãy -E là như sau:

Phương trình eliptic: $x^3 - x^2 = y^2 + y$

Dãy -E:

$E_1 = 1$

$E_2 = 4$

$E_3 = 4$

$E_4 = 8$

$E_5 = 4$

$E_6 = 16$

$E_7 = 9$

$E_8 = 16$,

....

Vì đối với một số phương trình eliptic các nhà toán học còn chưa biết chúng có bao nhiêu nghiệm trong không gian số thông thường kéo dài đến vô cùng, nên dãy -E tỏ ra là một công cụ tốt nhất để khảo sát các phương trình eliptic. Thực ra, dãy -E đã gói ghém trong nó một lượng lớn thông tin về phương trình eliptic mà nó mô tả. Tương tự như phân tử ADN trong sinh học mang mọi thông tin cần thiết để xây dựng nên một cơ thể sống, dãy -E cũng mang trong nó thông tin chủ yếu về phương trình eliptic. Niềm hy vọng là ở chỗ bằng cách nghiên cứu các dãy -E, "phân tử ADN toán học", các nhà toán học cuối cùng sẽ có thể tính được mọi thứ mà từ trước tới nay họ muốn biết về phương trình eliptic.

Làm việc dưới sự hướng dẫn của John Coates, Wiles nhanh chóng nổi tiếng là một nhà lý thuyết số xuất sắc với những hiểu biết sâu rộng về các phương trình eliptic và những dãy -E. Mỗi khi đạt được một kết quả mới và một công trình mới được công bố, Wiles không hề nhận thấy rằng mình đang thu lượm kinh nghiệm mà nhiều năm về sau sẽ mang lại cho ông khả năng chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat.

Sau Chiến tranh thế giới lần thứ hai, các nhà toán học Nhật Bản đã khởi phát một chuỗi các sự kiện, cho phép xác lập mối liên hệ khăng khít giữa các phương trình eliptic với Định lý cuối cùng của Fermat, mặc dù vào thời gian ấy không ai ý thức được điều đó. Bằng việc khuyến khích Wiles nghiên cứu các phương trình eliptic, Coates đã cho ông những công cụ mà sau này sẽ giúp ông thực hiện được ước mơ của mình.

V.
CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG

> Những hình mẫu của các nhà toán học, cũng giống như những hình mẫu của các họa sĩ hay của các nhà thơ, đều phải đẹp; những ý tưởng, cũng tựa như màu sắc hoặc ngôn từ, phải ăn khớp với nhau một cách hài hòa. Cái đẹp chính là thử thách đầu tiên: không có chỗ cho toán học xấu xí.
>
> G.H. HARDY

Vào tháng giêng năm 1954, Goro Shimura, một nhà toán học trẻ đầy tài năng của Đại học Tokyo, tới thư viện của khoa như thường lệ. Ông đang nóng lòng muốn mượn cuốn tạp chí Mathematische Annalen, tập 24. Đặc biệt, ông muốn tìm bài báo của Deuring về lý thuyết đại số của phép nhân phức, mà ông hy vọng có thể giúp ông thực hiện được những tính toán rất rắc rối và hóc búa.

Điều khiến ông ngạc nhiên và hơi thất vọng là cuốn tạp chí đã có người mượn. Đó là Yutaka Taniyama, một người mà Shimura có quen láng máng, sống ở đầu kia của khu đại học. Shimura bèn viết một bức thư cho Taniyama giải thích rằng ông đang rất cần cuốn tạp chí để hoàn tất một số tính toán rất khó chịu, và lịch sự hỏi khi nào Taniyama sẽ trả lại thư viện. Ít ngày sau, một tấm bưu thiếp được đặt trên bàn làm việc của Shimura. Đó là trả lời của Taniyama, ông viết rằng ông cũng đang thực hiện chính những tính toán ấy và cũng đang mắc mứu ở chính điểm logic ấy. Ông đề nghị Shimura

Goro Shimura

cùng nhau chia sẻ các ý tưởng và nếu có thể, cùng cộng tác giải bài toán này. Cuộc gặp gỡ tình cờ nhờ cuốn tạp chí của thư viện đã khởi đầu cho một sự hợp tác đã góp phần làm thay đổi dòng chảy của lịch sử toán học.

Taniyama sinh ngày 12 tháng 11 năm 1927 tại một thị trấn nhỏ, cách Tokyo vài dặm về phía Bắc. Chữ Nhật ghi tên ông với ý định sẽ được đọc là "Toyo", nhưng phần lớn những người ngoài gia đình đều đọc sai thành "Yutaka" và khi lớn lên, Taniyama đã chấp nhận và lấy luôn tên đó. Hồi còn nhỏ, việc học hành của ông thường xuyên bị gián đoạn vì đau ốm. Những năm học trung học ông bị

Yutaka Taniyama

mắc bệnh lao và đã phải nghỉ học 2 năm liền. Rồi những năm tháng chiến tranh lại làm cho việc học tập của ông còn bị gián đoạn nhiều hơn nữa.

Goro Shimura ít hơn Taniyama một tuổi, và việc học tập của ông cũng chấm dứt trong những năm tháng chiến tranh. Trường của ông đóng cửa, và thay vì đến trường nghe giảng, Shimura phải làm việc trong một phân xưởng lắp ráp máy bay. Để bù lại những thiệt thòi do không được tiếp tục học tập, mỗi tối ông đều tự học và đặc biệt say mê toán học. "Tất nhiên có nhiều môn cần phải học, nhưng toán học là dễ nhất bởi vì chỉ cần đọc các sách giáo khoa về toán học là đủ. Tôi học giải tích toán hoàn toàn qua sách. Còn nếu tôi muốn theo đuổi môn hóa học hoặc vật lý thì cần phải có các thiết bị khoa học, do vậy mà tôi không thể học các môn đó. Tôi chưa bao giờ nghĩ rằng mình là người có tài năng, đơn giản tôi chỉ là người tò mò ham hiểu biết mà thôi".

Ít năm sau, chiến tranh kết thúc, Shimura và Taniyama đều trở lại trường đại học. Vào thời gian họ trao đổi bưu thiếp với nhau về cuốn tạp chí của thư viện, cuộc sống ở Tokyo đã bắt đầu trở lại bình thường, và hai học giả trẻ tuổi đã có thể được hưởng đôi chút xa xỉ. Chiều chiều họ gặp nhau trong các quán cà phê, buổi tối họ thường ăn ở các nhà hàng nhỏ với đặc sản thịt cá voi và cuối tuần họ rủ nhau lang thang trong các vườn thực vật hoặc công viên thành phố. Đó là những nơi lý tưởng để họ bàn luận về những tư tưởng toán học mới mẻ nhất của họ.

Mặc dù Shimura có tính cách hơi lập dị - cho tới tận ngày hôm nay ông vẫn thích giễu cợt thiền, nhưng so với Taniyama thì ông lại là người bảo thủ và chuẩn mực hơn nhiều. Shimura bao giờ cũng dậy sớm và ngay lập tức bắt tay vào làm việc, trong khi đó bạn ông còn đang ngái ngủ vì đã làm việc thâu đêm. Những người khách đến thăm phòng Taniyama thường thấy ông ngủ rất say ngay giữa buổi chiều.

Trong khi Shimura là người rất chỉn chu khó tính, thì Taniyama lại là người sống thoải mái tới mức lười nhác. Nhưng lạ một điều, đó lại là tính cách mà Shimura rất khâm phục: "Anh có biệt tài là hay phạm nhiều sai lầm, mà phần lớn lại theo hướng đúng. Tôi ghen tỵ với anh về điều đó và có bắt chước anh cũng chỉ vô ích mà thôi, nhưng tôi đã phát hiện ra rằng phạm những sai lầm tốt cũng rất khó."

Taniyama là điển hình của thiên tài đãng trí và điều này được phản ánh ngay trong vẻ bên ngoài của ông. Ông không thể thắt một chiếc nút cho ra hồn và do đó ông quyết định không thèm thắt dây giầy thay vì phải thắt đi thắt lại hàng chục lần trong ngày. Ông lúc nào cũng khoác cùng một chiếc áo veston màu xanh với ánh kim loại trông rất lạ mắt. Nó được cắt từ thứ vải quái dị tới mức tất cả các thành viên khác của gia đình đều đã vứt bỏ.

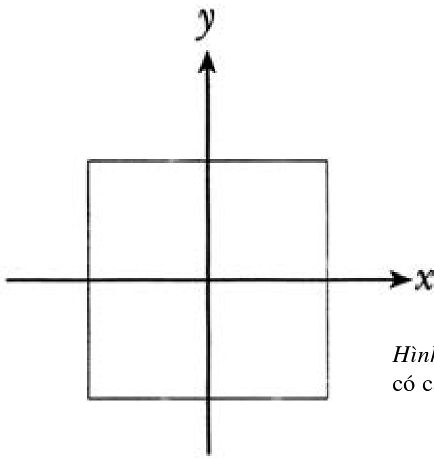
Khi họ gặp nhau vào năm 1954, thì Taniyama và Shimura đều mới bắt đầu sự nghiệp toán học của mình. Truyền thống xưa và hiện nay cũng vậy, những nghiên cứu sinh trẻ tuổi được nấp dưới cánh của một vị giáo sư, người dẫn dắt trí tuệ còn non nớt của họ nhưng Taniyama và Shimura đã được miễn hình thức tập sự đó. Trong thời gian chiến tranh, hoạt động nghiên cứu thực sự đã bị ngưng trệ và thậm chí tới những năm 1950 khoa toán vẫn còn chưa phục hồi lại được. Theo Shimura, các giáo sư "đã quá mệt mỏi, chán nản và vỡ mộng". Nhìn lớp sinh viên sau chiến tranh đang hăm hở và say mê học tập, họ nhanh chóng nhận thấy rằng con đường tiến lên duy nhất của họ là phải tự học. Sinh viên thường xuyên tổ chức các seminar để thông tin cho nhau những kỹ thuật và đột phá mới nhất. Mặc dù với vẻ trễ nải bề ngoài, nhưng ở các seminar bao giờ Taniyama cũng nổi lên như một người dẫn dắt đầy nhiệt huyết. Ông luôn luôn khuyến khích các sinh viên lớp trên khám phá những vùng đất còn hoang dã, và đối với các sinh viên lớp dưới ông ân cần như một người cha.

Do sự cách biệt với thế giới, các seminar này thường đề cập tới các đề tài mà ở châu Âu và Mỹ được xem là đã lỗi thời. Với sự ngây thơ thường có của sinh viên, họ nghiên cứu các phương trình mà ở phương Tây người ta đã vứt bỏ từ lâu. Một đề tài không còn là thời thượng nữa, nhưng đặc biệt hấp dẫn đối với cả Taniyama lẫn Shimura là nghiên cứu các dạng modular.

Các dạng modular thuộc nhóm những đối tượng lạ lùng và tuyệt vời nhất của toán học. Chúng cũng là một trong số những thực thể bí hiểm nhất của toán học; nhưng Eichler, nhà lý thuyết số của thế kỷ XX, lại xếp chúng vào hàng những phép toán cơ bản nhất: cộng, trừ, nhân, chia và dạng modular. Đa số các nhà toán học đều xem mình đã nắm vững bốn phép toán đầu, nhưng phép toán thứ năm thì họ vẫn thấy mình còn ít nhiều lúng túng.

Đặc điểm then chốt của các dạng modular là mức độ đối xứng thái quá của chúng. Mặc dù hầu như mọi người đều quen thuộc với khái niệm đối xứng trong cuộc sống hằng ngày, nhưng trong toán học, khái niệm này còn có một ý nghĩa rất cụ thể: *một đối tượng được gọi là có đối xứng nếu nó có thể được biến đổi theo một cách nào đó, nhưng rốt cuộc sau đó hóa ra lại là không thay đổi.* Để hiểu được sự đối xứng của dạng modular, trước hết ta hãy xem xét sự đối xứng của một đối tượng tầm thường hơn, như một hình vuông chẳng hạn.

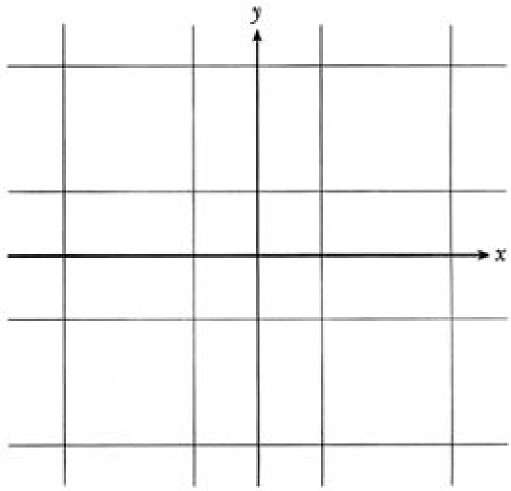
Trong trường hợp hình vuông, một dạng đối xứng là đối xứng quay. Cụ thể là nếu ta tưởng tượng có một trục quay nằm chỗ giao nhau của trục x và trục y (ở tâm hình vuông), thì hình vuông trên hình 18 có thể quay một phần tư vòng (tức 90^0) mà sau đó nhìn nó vẫn không có gì thay đổi. Tương tự, phép quay nửa vòng (180^0), ba phần tư vòng (270^0) và cả vòng (360^0) cũng đều làm cho hình vuông nhìn không có gì thay đổi.



Hình 18. Một hình vuông bình thường có cả đối xứng quay lẫn đối xứng gương.

Ngoài đối xứng quay ra, hình vuông còn có đối xứng gương. Nếu ta tưởng tượng có một gương phẳng đặt dọc theo trục x thì ảnh qua gương của nửa trên sẽ trùng khít với nửa dưới của nó và ngược lại. Như vậy, sau phép biến đổi như thế, hình vuông nhìn vẫn không có gì thay đổi. Tương tự, ta có thể xác định ba gương khác (dọc theo trục y và dọc theo hai đường chéo) đều cho ảnh của hình vuông đồng nhất với hình vuông ban đầu.

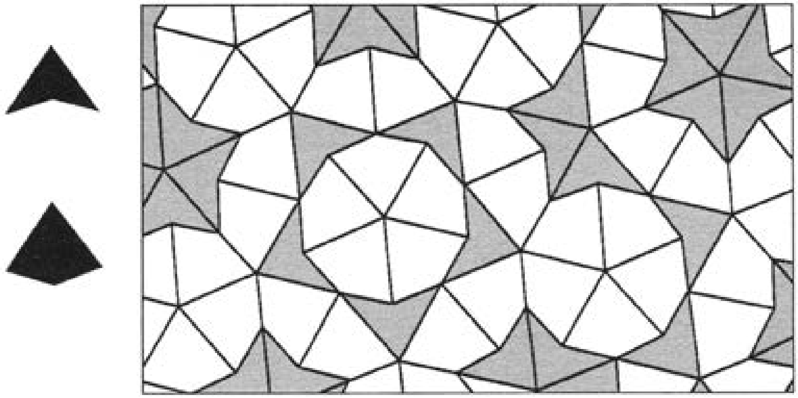
Mặc dù hình vuông khá đối xứng, nó có cả đối xứng quay lẫn đối xứng gương, nhưng nó lại không có đối xứng tịnh tiến. Điều này có nghĩa là nếu dịch hình vuông theo một hướng nào đó, thì người quan sát sẽ nhận ra ngay lập tức chuyển động của nó, vì vị trí tương đối của hình vuông đối với các trục bây giờ đã thay đổi. Tuy nhiên, nếu như toàn bộ không gian đều được lát bằng các hình vuông, thì như ta thấy trên hình 19, tập hợp vô hạn các hình vuông này lại có tính đối xứng tịnh tiến. Nếu một bề mặt được lát vô tận như thế được dịch lên trên hoặc xuống dưới một khoảng bằng hoặc



Hình 19. Một mặt vô hạn được lát bằng các hình vuông có cả đối xứng quay lẫn đối xứng gương, ngoài ra còn có đối xứng tịnh tiến nữa.

là bội số của cạnh viên gạch thì mặt lát được dịch là đồng nhất với mặt ban đầu.

Đối xứng của mặt lát gạch là tương đối dễ hiểu, nhưng cũng như nhiều khái niệm tưởng là đơn giản khác, trong chúng đều ẩn giấu những điểm rất tinh tế. Ví dụ, vào những năm 1970, nhà vật lý và cũng là nhà toán học nghiệp dư người Anh Roger Penrose đã bắt đầu thử nghiệm lát những loại gạch khác nhau trên cùng một mặt. Cuối cùng ông đã tìm ra hai loại gạch lý thú nhất, có dạng cái diều và đầu mũi tên, như được minh họa trên hình 20. Từng loại gạch này thì không thể lát kín bề mặt mà không để lại những chỗ hở hoặc đè lên nhau, nhưng nếu dùng cả hai loại một lúc thì lại nhận được một tập hợp những hình mẫu lát hết sức phong phú. Các hình cái diều và đầu mũi tên có thể lát khít với nhau theo vô số cách, và mặc dù mỗi hình mẫu nhìn thoáng có vẻ tương tự nhau, nhưng về chi



Hình 20. Bằng cách dùng hai loại gạch khác nhau, gạch hình cái diều và gạch hình đầu mũi tên, Roger Penrose đã có thể lát kín một bề mặt. Tuy nhiên, mặt lát của Penrose không có tính đối xứng tịnh tiến.

tiết chúng hoàn toàn khác nhau. Một hình mẫu tạo bởi những cái diều và đầu mũi tên được minh họa trên hình 20.

Các mặt lát của Penrose (tức các hình mẫu tạo bởi các loại gạch như hình cái diều và đầu mũi tên, chẳng hạn) còn có một đặc điểm lý thú khác, đó là chúng thể hiện mức độ đối xứng rất hạn chế. Thoạt nhìn, ta tưởng như mặt lát trên hình 20 có tính đối xứng tịnh tiến, nhưng mọi ý định xê dịch hình sao cho nó thực sự vẫn còn không đổi đều kết thúc thất bại. Thì ra những mặt lát Penrose bất đối xứng một cách rất dễ gây ngộ nhận và chính điều đó giải thích tại sao chúng lại rất hấp dẫn các nhà toán học và đã trở thành điểm xuất phát cho toàn bộ một lĩnh vực mới của toán học.

Một điều lạ lùng là mặt lát Penrose lại đã có phiên bản trong khoa học vật liệu. Các nhà tinh thể học xưa nay đều tin rằng các tinh thể đều được cấu trúc theo nguyên tắc nằm sau mặt lát hình vuông, tức

Hình 21. Bức tranh **Giới hạn vòng tròn IV** của Mauritz Escher đã chuyển tải được phần nào tính đối xứng của các dạng modular.

là có mức độ đối xứng tịnh tiến cao. Theo lý thuyết, việc tạo dựng nên các tinh thể dựa trên một cấu trúc lặp đi lặp lại và có tính đều đặn cao. Tuy nhiên, vào năm 1984, các nhà khoa học đã phát hiện ra rằng tinh thể kim loại tạo bởi nhôm và mangan lại được xây dựng theo những nguyên tắc của Penrose. Hình mẫu lắp ghép của nhôm và mangan hoàn toàn giống như những cái diều và đầu mũi tên, chúng tạo nên một tinh thể hầu như đều đặn, nhưng không hoàn toàn. Một công ty Pháp mới đây đã dùng tinh thể Penrose để làm lớp phủ cho các loại chảo rán.

Trong khi nét hấp dẫn của các mặt lát Penrose là tính đối xứng hạn chế của chúng, thì tính chất lý thú của các dạng modular lại là tính đối xứng vô hạn của chúng. Các dạng modular mà Taniyama và Shimura nghiên cứu có thể dịch chuyển, nghịch đảo, phản xạ gương và quay theo vô số cách mà chúng vẫn không thay đổi, điều này làm cho các dạng modular trở thành các đối tượng đối xứng nhất trong toán học. Khi nhà toán học đa tài người Pháp Henry Poincaré nghiên cứu các dạng modular ở thế kỷ XIX, ông đã rất khó khăn mới chấp nhận được sự đối xứng của chúng. Sau khi nghiên cứu một dạng modular cụ thể ông đã mô tả cho các đồng nghiệp của mình rằng trong suốt hai tuần, sáng nào thức dậy ông cũng đều thử và luôn tìm ra một sai sót nào đó trong tính toán của mình. Đến ngày thứ 15 ông mới nhận ra và thừa nhận rằng các dạng modular thực sự là có tính đối xứng hết cỡ.

Thật không may, vẽ hoặc ngay cả hình dung các dạng modular thôi cũng là điều không thể làm được. Trong trường hợp mặt lát hình vuông chúng ta có một đối tượng trong không gian hai chiều, được xác định chỉ bởi hai trục x và y. Một dạng modular cũng được xác định bởi hai trục, nhưng cả hai trục này đều là phức, tức là mỗi trục lại gồm phần thực và phần ảo, nghĩa là thực tế lại trở thành hai trục. Do vậy, trục phức đầu tiên lại phải được biểu diễn bằng hai trục: trục x_r (thực) và x_i (ảo), còn trục phức thứ hai được biểu diễn tương tự bằng trục y_r (thực) và y_i (ảo). Nói một cách chính xác, các dạng modular sống trong nửa mặt phẳng trên của không gian phức đó. Tuy nhiên điều quan trọng nhất cần phải hiểu, đây là một không gian bốn chiều (x_r, x_i, y_r, y_i).

Không gian bốn chiều này được gọi là không gian hyperbolic. Thực sự, vũ trụ hyperbolic này rất khó hiểu đối với con người, những sinh vật bắt buộc phải sống trong không gian ba chiều quen thuộc; nhưng không gian bốn chiều là một khái niệm hợp thức về mặt toán học, và chính cái chiều dôi ra của nó đã làm cho các dạng modular trở nên có mức độ đối xứng cao ghê gớm như vậy. Họa sĩ

Mauritz Escher là người rất đam mê các ý tưởng toán học và ông đã định chuyển tải khái niệm không gian hyperbolic trong một số bức tranh và bản khắc của ông. Bức tranh trên hình 21 là bức *Giới hạn vòng tròn IV* của Escher, nó thể hiện thế giới hyperbolic trên trang giấy hai chiều. Trong không gian hyperbolic thực sự, những con dơi và các thiên thần đều có cùng kích thước, và sự lặp đi lặp lại là dấu hiệu của mức độ đối xứng cao. Mặc dù có thể nhận thấy một số nét của sự đối xứng này trên trang giấy hai chiều, nhưng càng ra gần mép bức tranh sự méo thể hiện càng nhiều.

Các dạng modular sống trong không gian hyperbolic với những kích thước và hình dạng rất khác nhau, nhưng tất cả đều được xây dựng từ cùng những yếu tố cơ bản. Điều làm cho các dạng modular trở nên khác nhau là ở số những yếu tố cơ bản mà nó chứa. Các yếu tố tạo nên các dạng modular được đánh số từ 1 đến vô cùng (M_1, M_2, M_3, ...); chẳng hạn, một dạng modular cụ thể có thể chứa một yếu tố một ($M_1 = 1$), ba yếu tố hai ($M_2 = 3$) và hai yếu tố ba ($M_3 =2$), v.v.. Cách mô tả cấu trúc của một dạng modular như thế có thể được tổng kết trong dãy -M, một danh sách liệt kê các yếu tố và số lượng đòi hỏi của mỗi yếu tố đó:

Dãy -M: $M_1 = 1$
$M_2 = 3$
$M_3 = 2$

Cũng như dãy -E là ADN đối với các phương trình eliptic, dãy -M là ADN đối với các dạng modular. Số lượng mỗi yếu tố được liệt kê trong dãy -M là cực kỳ quan trọng. Tùy thuộc vào việc bạn thay đổi số lượng, chẳng hạn của yếu tố thứ nhất, bạn có thể tạo ra

Năm 1955 Goro Shimura và Yukata Taniyama
tham dự Hội nghị toán học quốc tế ở Tokyo.

một dạng modular hoàn toàn khác nhưng có cùng đối xứng; hoặc bạn có thể phá hủy hoàn toàn đối xứng và tạo ra một đối tượng mới không phải dạng modular. Nếu số lượng của mỗi yếu tố được chọn một cách tùy ý, thì kết quả rất có thể sẽ là một đối tượng có ít hoặc không có sự đối xứng nào.

Các dạng modular đứng độc lập với một mức độ rất cao trong toán học. Đặc biệt, chúng dường như không có một quan hệ gì với các phương trình eliptic mà Wiles đã nghiên cứu hồi ở Cambridge. Dạng modular phức tạp hơn rất nhiều, nó được nghiên cứu rộng rãi vì tính đối xứng của nó và cũng mới chỉ được phát hiện vào thế kỷ XIX. Trong khi đó các phương trình eliptic có từ thời cổ Hy Lạp và chẳng có liên quan gì tới đối xứng hết. Các dạng modular và các phương trình eliptic sống ở các vùng hoàn toàn khác nhau của vũ trụ toán học, và chưa một ai tin rằng giữa hai đối tượng đó lại có một mối liên hệ nào, dù là xa xôi nhất. Tuy nhiên, Taniyama và Shimura đã làm cho cộng đồng toán học phải choáng váng bởi giả thuyết rằng các phương trình eliptic và các dạng modular thực sự chỉ là một. Theo hai nhà toán học độc lập này thì họ có thể thống nhất các thế giới modular và eliptic.

Điều mơ ước

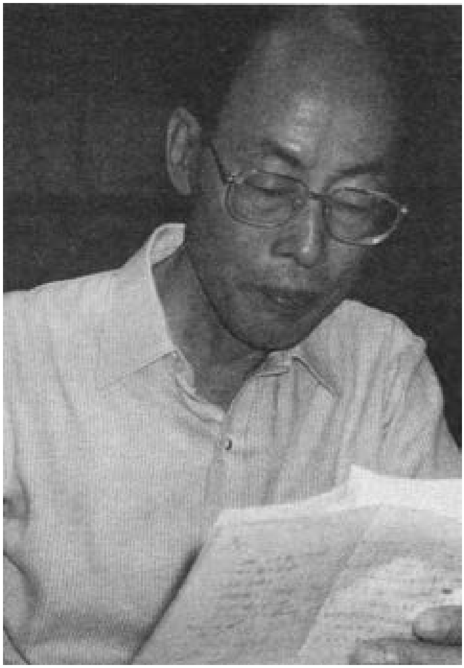
Tháng 9 năm 1955, một hội nghị toán học quốc tế được tổ chức ở Tokyo. Đây là cơ hội duy nhất để nhiều nhà nghiên cứu trẻ tuổi của Nhật Bản cho phần còn lại của thế giới biết họ đã học hỏi được những gì. Họ phát cho mọi người một tập hợp gồm 36 bài toán có liên quan đến công việc của họ, kèm theo một lời giới thiệu khá khiêm tốn:

Một số vấn đề chưa được giải quyết trong toán học: do chưa được chuẩn bị một cách chu đáo, nên rất có thể một số trong các bài toán này là tầm thường hoặc đã được giải rồi. Xin các vị đại biểu tham gia hội nghị cho lời bình luận về bất cứ bài toán nào trong số đó.

Có bốn vấn đề được Taniyama nêu ra, và những vấn đề này đều gợi ý về mối quan hệ kỳ lạ giữa các dạng modular và các phương trình eliptic. Và những câu hỏi ngây thơ này cuối cùng đã dẫn tới một cuộc cách mạng trong lý thuyết số. Taniyama đã xem xét một số số hạng đầu tiên trong dãy -M của một dạng modular cụ thể nào đó. Ông nhận ra hình mẫu của nó và thấy rằng nó đồng nhất với danh sách những con số trong dãy -E của một phương trình eliptic đã quen thuộc. Ông tiến hành tính thêm một số số hạng nữa trong mỗi dãy thì thấy dãy -M của dạng modular và dãy -E của phương trình eliptic vẫn ăn khớp với nhau một cách hoàn hảo.

Đây là một phát hiện gây sững sờ bởi vì không có một nguyên nhân rõ ràng nào để cho dạng modular đó lại có quan hệ với một một phương trình eliptic thông qua sự đồng nhất của dãy -M và dãy -E tương ứng của chúng. **ADN toán học tạo bởi hai thực thể này là hoàn toàn như nhau.** Đây là một phát minh sâu sắc về hai phương diện. Thứ nhất, nó gợi ý rằng ở rất sâu phía dưới có tồn tại một mối quan hệ cơ bản giữa dạng modular và phương trình eliptic, những đối tượng ở hai phía khác nhau của toán học. Thứ hai, điều này có nghĩa là các nhà toán học đã biết dãy -M đối với dạng modular sẽ không cần phải tính dãy -E đối với các phương trình eliptic tương ứng, bởi vì nó y hệt như dãy -M.

Mối liên hệ giữa hai đối tượng bề ngoài hoàn toàn khác nhau là vô cùng quan trọng về mặt sáng tạo đối với toán học cũng như bất cứ một bộ môn nào khác. Mối quan hệ này gợi ý về một chân lý còn nằm sâu bên dưới, một chân lý làm phong phú rất nhiều cho cả hai đối tượng. Ví dụ, ban đầu các nhà khoa học đã nghiên cứu điện và từ như hai hiện tượng hoàn toàn tách rời nhau. Sau đó, tới thế kỷ XIX, các nhà lý thuyết cũng như thực nghiệm đều nhận thấy rằng điện và từ thực chất có mối liên hệ khăng khít với nhau. Điều này giúp ta hiểu sâu sắc hơn cả hai, cả điện lẫn từ. Các dòng điện sinh ra từ trường, và các nam châm có thể tạo ra dòng điện cảm ứng trong các vòng dây dẫn đi qua gần nó. Điều này đã dẫn tới việc phát minh ra máy phát điện và động cơ điện, và cuối cùng là phát minh



Goro Shimura vẫn còn giữ được bức thư cuối cùng mà ông đã nhận được
từ Yukata Taniyama, người bạn và cũng là đồng nghiệp của ông.

ra rằng bản thân ánh sáng chẳng qua cũng chỉ là các điện trường và từ trường dao động một cách điều hòa.

Taniyama đã xem xét một số dạng modular khác và trong mỗi trường hợp các dãy -M dường như đều tương ứng một cách tuyệt vời với dãy -E của các phương trình eliptic. Và rồi ông đã bắt đầu băn khoăn tự hỏi: liệu mỗi một dạng modular có thực sự tương ứng với một phương trình eliptic hay không. Phải chăng mỗi dạng modular có cùng một ADN như một phương trình eliptic hay nói cách khác, mỗi dạng modular được ngụy trang dưới dạng một phương trình eliptic? Những câu hỏi mà ông đưa ra hội nghị là có liên quan tới giả thuyết đó.

Ý tưởng cho rằng mỗi phương trình eliptic đều có quan hệ với một dạng modular là điều lạ thường tới mức những người nhìn qua các câu hỏi của Taniyama đều coi nó không gì khác như một nhận xét lạ mà thôi. Mặc dù tin là Taniyama đã chứng minh được một số các phương trình eliptic có quan hệ với một dạng modular cụ thể, nhưng họ tuyên bố rằng đó chẳng qua chỉ là sự trùng hợp mà thôi. Theo sự hoài nghi chung thì khẳng định của Taniyama về một mối quan hệ phổ quát và tổng quát hơn là không có cơ sở. Giả thuyết này dựa vào trực giác nhiều hơn là vào một bằng chứng thực tế nào.

Đồng minh duy nhất của Taniyama là Shimura, người tin vào hiệu năng và chiều sâu ý tưởng của bạn mình. Sau hội nghị ông đã cùng Taniyama nuôi ý định sẽ phát triển giả thuyết đó tới mức phần còn lại của thế giới phải chú ý tới những công trình của họ. Shimura muốn tìm nhiều bằng chứng hơn nữa hậu thuẫn cho mối quan hệ giữa thế giới modular và thế giới eliptic. Sự cộng tác phải tạm thời dừng lại vào năm 1957 vì Shimura được mời tới làm việc tại Viện Nghiên cứu Khoa học cao cấp ở Princeton. Sau hai năm làm giáo sư thỉnh giảng ở Hoa Kỳ, Shimura đã định trở về làm việc cùng với Taniyama, nhưng điều đó không bao giờ còn xảy ra nữa. Ngày 17 tháng 11 năm 1958, Yutaka Taniyama đã tự sát.

Cái chết của một thiên tài

Shimura vẫn còn giữ được tấm bưu thiếp mà Taniyama đã gửi cho ông khi hai người liên lạc với nhau vì quyển tạp chí của thư viện. Shimura cũng còn giữ được bức thư cuối cùng mà Taniyama viết cho ông hồi ông còn làm việc ở Princeton, nhưng trong đó không hề có ám chỉ gì, dù là xa xôi nhất, về điều sẽ xảy ra chỉ hai tháng sau. Cho tới ngày nay Shimura vẫn không sao hiểu được điều gì nằm phía sau vụ tự sát của Taniyama. "Tôi rất khó hiểu. Từ khó hiểu có lẽ là từ mô tả tốt nhất tâm trạng của tôi. Tất nhiên là tôi rất buồn, nhưng nó bất ngờ quá. Tôi vừa mới nhận được thư của anh ấy vào tháng 9, thế mà đầu tháng 11 anh ấy đã mất rồi, tôi không sao có thể hiểu được điều đó. Tất nhiên, sau này tôi có nghe được đủ thứ chuyện và tôi cố gắng quen dần với cái chết của anh. Một số người thì nói rằng anh ấy đánh mất sự tự tin vào chính mình, nhưng không phải về mặt toán học".

Điều làm cho bạn bè của Taniyama đặc biệt bối rối là ông vừa mới yêu Misako Suzuki và dự định sẽ cưới cô vào năm sau. Trong một bài tưởng nhớ Taniyama đăng trên tờ *Bulletin of the London Mathematical Society*, Goro Shimura có nhớ lại việc hứa hôn của Taniyama với Misako và những tuần cuối cùng của ông trước khi tự sát:

> Khi được báo tin về sự hứa hôn của họ, tôi hơi ngạc nhiên, vì tôi lờ mờ nghĩ rằng cô ấy không phải là típ người thích hợp với Taniyama; nhưng tôi không hề cảm thấy lo lắng. Sau đó có người nói với tôi rằng nào là họ đã ký hợp đồng thuê căn hộ, tất nhiên là tốt hơn, để làm nơi ở mới cho hai người; nào là họ đã cùng nhau mua sắm một số dụng cụ làm bếp và cũng đã chuẩn bị cho đám cưới. Mọi chuyện xem ra rất nhiều hứa hẹn đối với họ cũng như đối với bạn bè. Thế rồi sau đó tai họa đã giáng xuống họ.

Vào buổi sáng thứ hai, ngày 17 tháng 11 năm 1958, người quản lý khu chung cư phát hiện ra Taniyama đã chết trong phòng với một bức thư để lại trên bàn làm việc. Bức thư được viết trên ba trang giấy xé từ cuốn vở loại ông vẫn hay dùng trong công việc học thuật hàng ngày; đoạn đầu của nó như thế này: “Cho đến tận ngày hôm qua, tôi vẫn chưa hề có ý định tự sát. Nhưng chắc nhiều người cũng đã nhận thấy rằng trong thời gian gần đây tôi rất mệt mỏi cả về thể chất lẫn tinh thần. Còn về nguyên nhân tự sát của tôi thì chính bản thân tôi cũng không hiểu, nhưng nó không phải là do một sự cố hay một sự việc cụ thể nào. Có thể nói đơn giản là như thế này: tôi đã bị ám ảnh với ý nghĩ rằng tôi đã mất niềm tin vào tương lai của mình. Có thể việc tự sát của tôi sẽ gây phiền phức hoặc đau đớn cho ai đó. Tôi chân thành hy vọng rằng việc này sẽ không phủ bóng đen lên tương lai của người ấy. Dẫu thế nào, tôi cũng không thể phủ nhận rằng đây là một sự phản bội, nhưng hãy tha thứ cho nó như là hành động cuối cùng theo cách riêng của tôi, vì suốt đời tôi đã làm theo cách riêng của mình”.

Sau đó ông mô tả, hết sức khúc chiết, ý muốn để tài sản của ông được sử dụng như thế nào, những cuốn sách nào là mượn của thư viện, cuốn nào mượn của bạn bè, v.v. Đặc biệt ông nói: ”Tôi muốn để lại các đĩa nhạc và chiếc máy quay đĩa cho Misako Suzuki với điều kiện cô ấy không quá đau buồn về những thứ tôi để lại cho cô ấy.” Ông cũng đã giải thích cặn kẽ giáo trình giải tích và đại số tuyến tính mà ông đang dạy cho sinh viên đã đến chương nào mục nào, và ông kết thúc bức thư bằng lời xin lỗi các đồng nghiệp về những phiền phức mà hành động này của ông đã gây ra cho họ.

Vậy là một trong số những bộ óc tiên phong và xuất sắc nhất của thời đại đã kết thúc cuộc đời theo ý chí riêng của mình. Ông vừa tròn tuổi ba mươi mốt chỉ 5 ngày trước đó.

Ít tuần sau vụ tự sát của Taniyama, bi kịch lại giáng xuống lần thứ hai. Vợ chưa cưới của ông, cô Misako Suzuki, cũng đã tự kết liễu cuộc đời mình. Cô cũng để lại bức thư nói rằng: ”Chúng tôi đã hứa với nhau, dù bất kể đi đâu, chúng tôi cũng không bao giờ tách xa nhau. Giờ đây anh ấy đã ra đi, vậy tôi cũng phải đi để đến với anh ấy.”

Triết lý cái thiện

Trong sự nghiệp ngắn ngủi của mình, Taniyama đã đóng góp nhiều ý tưởng rất triệt để cho toán học. Những vấn đề mà ông đưa ra trong hội nghị ở Tokyo chứa đựng một phát hiện vĩ đại nhất của cuộc đời ông; nhưng vì nó vượt trước thời đại của mình, nên khi còn sống, ông đã không bao giờ được nhìn thấy ảnh hưởng to lớn của nó đối với lý thuyết số. Và thật đáng buồn là sự sáng tạo trí tuệ của ông cũng như vai trò dẫn dắt của ông trong cộng đồng các nhà khoa học trẻ Nhật Bản thời đó lại ít được ai nhớ tới. Shimura còn nhớ như in ảnh hưởng của Taniyama: “Ông luôn luôn ân cần với các đồng nghiệp của mình, đặc biệt là đối với lớp trẻ, ông quan tâm chăm sóc họ hết sức chu đáo. Ông là chỗ dựa tinh thần của đa số những ai đã có quan hệ với ông về mặt toán học, tất nhiên trong số đó có cả tôi. Rất có thể là ông chưa bao giờ ý thức được vai trò đó của mình. Nhưng ngay bây giờ đây tôi vẫn cảm thấy sự nhân hậu cao cả của ông còn mạnh mẽ hơn cả khi ông đang còn sống. Thế mà khi ông cần tới một chỗ dựa tinh thần đến mức tuyệt vọng thì lại chẳng ai có thể cho ông một chút nương tựa. Ngẫm nghĩ về điều đó, trong lòng tôi lại tràn ngập một nỗi đau chua chát nhất”.

Sau cái chết của Taniyama, Shimura tập trung mọi nỗ lực nhằm tìm hiểu mối quan hệ chính xác giữa các phương trình eliptic và các dạng modular. Cùng với năm tháng, ông vật lộn để thu thập ngày càng nhiều bằng chứng hơn và một số suy luận logic nhằm hỗ trợ cho lý thuyết. Dần dần, ông càng ngày càng tin rằng mỗi phương trình eliptic cần phải liên hệ với một dạng modular. Các nhà toán học khác thì vẫn còn ngờ vực, và Shimura vẫn còn nhớ cuộc trò chuyện với một đồng nghiệp nổi tiếng. Vị giáo sư này hỏi: "Tôi có nghe nói anh đưa ra ý kiến cho rằng một số phương trình eliptic có liên quan với các dạng modular."

"Không phải thế, ông hiểu nhầm rồi", Shimura đáp, "không phải là một số phương trình eliptic, mà là mọi phương trình eliptic!"

Shimura không thể chứng minh được rằng điều đó là đúng, nhưng cứ mỗi lần ông kiểm tra giả thuyết đó, thì nó lại đúng; và trong mọi trường hợp, dường như nó ăn khớp với triết lý toán học bao la của ông. "Tôi có triết lý của mình về cái thiện. Toán học cũng phải chứa cái thiện. Chẳng hạn trong trường hợp phương trình eliptic, người ta cần phải gọi phương trình này là thiện nếu như nó được tham số hóa bằng một dạng modular. Tôi hy vọng tất cả các phương trình eliptic đều là thiện cả. Đó là một triết lý khá thô thiển, nhưng ta luôn có thể lấy nó làm điểm xuất phát. Sau đó, dĩ nhiên, tôi cần phải phát triển những lập luận về mặt kỹ thuật cho giả thuyết đó. Nhưng có thể nói rằng giả thuyết này được rút ra chính từ triết lý về cái thiện. Đa số các nhà toán học làm toán đều xuất phát từ một quan điểm thẩm mỹ nào đó và triết lý về cái thiện nảy sinh từ quan điểm thẩm mỹ của tôi".

Cuối cùng rồi sự tích lũy những bằng chứng của Shimura cũng đã làm cho lý thuyết về các phương trình eliptic và các dạng modular ngày càng trở nên được chấp nhận rộng rãi hơn. Ông vẫn chưa thể chứng minh được với phần còn lại của thế giới rằng nó quả thật là đúng, nhưng ít nhất thì giờ đây nó cũng không còn đơn thuần chỉ là mơ ước nữa. Đã có đủ bằng chứng để nó xứng đáng mang cái tên là một giả thuyết. Ban đầu giả thuyết này được gọi là giả thuyết Taniyama - Shimura để thừa nhận người đã khởi xướng ra nó và đồng nghiệp của ông, người đã tiến hành phát triển nó một cách đầy đủ.

Sau này, André Weil, một trong số những cha đỡ đầu của lý thuyết số thế kỷ XX, đã chấp nhận giả thuyết đó và phổ biến nó ở phương Tây. Weil đã nghiên cứu ý tưởng của Taniyama và Shimura, thậm chí còn tìm được những bằng chứng vững chắc hơn cho nó. Kết quả là giả thuyết này thường được gọi là giả thuyết Taniyama - Shimura - Weil, hay đôi khi là giả thuyết Taniyama - Weil hay có lúc là giả thuyết Weil. Thực tế đã có rất nhiều tranh cãi về tên gọi chính thức của giả thuyết này. Đối với những ai quan tâm tới giải tích tổ hợp, thì có tới 15 hoán vị khả dĩ cho ba cái tên có liên quan nói ở trên, và rất có thể là mỗi một tổ hợp đó trong nhiều năm đều đã từng xuất hiện trên báo chí. Tuy nhiên, chúng tôi sẽ gọi giả thuyết này theo tên gốc của nó là giả thuyết Taniyama - Shimura.

Khi giả thuyết Taniyama - Shimura được bàn tán sôi nổi ở phương Tây, thì chính giáo sư John Coates, người hướng dẫn của Andrew Wiles hồi còn là sinh viên, cũng đang là một sinh viên. "Tôi bắt đầu bước vào nghiên cứu năm 1966, khi mà giả thuyết Taniyama - Shimura được lan truyền rộng rãi khắp thế giới. Tất cả mọi người đều kinh ngạc và bắt đầu nhìn nhận một cách nghiêm túc vấn đề *liệu mọi phương trình eliptic có thể đều là modular hay không.* Đây là một thời kỳ đặc biệt sôi động; tất nhiên, vấn đề duy nhất là ở chỗ rất khó có thể làm được một bước tiến bộ nào. Tôi nghĩ phải thành thật mà nói rằng mặc dù ý tưởng đó là rất đẹp, rất quyến rũ, nhưng thực sự rất khó chứng minh, mà đó mới là cái chúng tôi quan tâm với tư cách là nhà toán học".

Vào cuối những năm 60, cả một đội quân các nhà toán học tiến hành kiểm tra một cách hệ thống giả thuyết Taniyama - Shimura. Xuất phát từ một phương trình eliptic và dãy -E của nó, họ bắt tay tìm kiếm một dạng modular có dãy -M đồng nhất. Trong từng trường hợp cụ thể, phương trình eliptic thực sự đều có một dạng modular gắn liền với nó. Mặc dù đây là một bằng chứng tốt, có lợi cho giả thuyết Taniyama - Shimura, nhưng điều đó không có nghĩa là nó đã được chứng minh. Các nhà toán học ngờ rằng nó là đúng, nhưng chừng nào còn chưa có ai chứng minh được nó một cách chặt chẽ về mặt logic thì nó vẫn đơn thuần chỉ là một giả thuyết mà thôi.

Barry Mazur, một giáo sư thuộc Đại học Harvard, là người đã chứng kiến từ đầu sự phát triển của giả thuyết Taniyama - Shimura. "Đây là một giả thuyết tuyệt vời, nó cho rằng mỗi một phương trình eliptic đều gắn liền với một dạng modular, nhưng ban đầu người ta đã không đếm xỉa đến nó, vì nó đã vượt trước thời đại của mình. Khi lần đầu tiên được đề xuất, giả thuyết này không được người ta để ý tới vì nó quá lạ lùng. Một mặt, bạn có thế giới eliptic; và mặt khác, bạn có thế giới modular. Cả hai lĩnh vực này của toán học đều đã được nghiên cứu rất mạnh mẽ, nhưng tách rời nhau. Những nhà toán học nghiên cứu các phương trình eliptic lại không mấy am hiểu các dạng modular và ngược lại. Thế rồi giả thuyết Taniyama - Shimura ra đời, đó là một giả thuyết lớn cho rằng có một cầu nối giữa hai thế giới hoàn toàn khác nhau. Mà các nhà toán học lại rất thích xây những chiếc cầu nối như vậy".

Ý nghĩa của những chiếc cầu nối toán học rất to lớn. Chúng cho phép các cộng đồng những nhà toán học vốn sống trên những hòn đảo cách biệt nhau nay có thể trao đổi những ý tưởng với nhau và có thể khảo sát những sáng tạo của nhau. Toán học gồm những hòn đảo tri thức nằm rải rác trên đại dương bao la của những điều chưa biết. Ví dụ như có hòn đảo cho các nhà hình học, những người chuyên nghiên cứu về dạng và hình; rồi sau đó có hòn đảo cho các nhà xác suất, những người chuyên nghiên cứu rủi ro và cơ may. Đại loại có hàng chục hòn đảo như thế, mỗi hòn đảo lại có một ngôn ngữ riêng, đơn nhất, không thể hiểu được đối với cư dân thuộc các hòn đảo khác. Ngôn ngữ hình học hoàn toàn khác với ngôn ngữ xác suất, và cái thổ ngữ của giải tích cũng là vô nghĩa đối với những người chỉ nói ngôn ngữ thống kê.

Tiềm năng to lớn của giả thuyết Taniyama - Shimura là ở chỗ nó kết nối hai hòn đảo và cho phép cư dân trên hai hòn đảo đó lần đầu tiên trò chuyện được với nhau. Barry Mazur nghĩ về giả thuyết Taniyama - Shimura như một chiếc máy dịch tương tự như phiến đá Rosetta trên đó chứa cả chữ Ai Cập cổ, chữ Hy Lạp cổ và chữ tượng hình. Vì người ta đã hiểu được chữ Ai Cập và Hy Lạp cổ, nên các nhà khảo cổ lần đầu tiên giải mã được các chữ tượng hình. "Điều đó cũng tựa như bạn đã biết một ngôn ngữ và phiến đá Rosetta này cho bạn khả năng hiểu được một cách sâu rộng một ngôn ngữ khác, Mazur nói. Nhưng giả thuyết Taniyama - Shimura còn là phiến đá Rosetta có một quyền năng thần kỳ nữa. Nó có một đặc điểm rất thú vị là những trực giác đơn giản trong thế giới modular có thể được dịch thành những chân lý sâu xa trong thế giới eliptic và ngược lại. Hơn thế nữa, những bài toán rất sâu sắc trong thế giới eliptic đôi khi lại có thể giải được sau khi dùng phiến đá Rosetta dịch nó sang thế giới modular, vì trong thế giới modular chúng ta đã có đủ hiểu biết và công cụ để xử lý bài toán được dịch sang. Còn nếu chúng ta cứ giam mình trong thế giới eliptic, chúng ta sẽ bế tắc."

Nếu giả thuyết Taniyama - Shimura là đúng, nó sẽ tạo điều kiện cho các nhà toán học giải quyết được nhiều bài toán eliptic còn tồn đọng nhiều thế kỷ nay chưa giải quyết được, bằng cách tiếp cận chúng qua thế giới modular. Và người ta hy vọng rằng hai thế giới eliptic và modular có thể sẽ được thống nhất. Giả thuyết này cũng nhóm lên một tia hy vọng rằng giữa các lĩnh vực toán học khác cũng có thể tồn tại những mối liên hệ như vậy.

Trong những năm 60, Robert Langlands, lúc đó đang làm việc tại Viện nghiên cứu cao cấp ở Princeton, đã bị ám ảnh bởi tiềm năng của giả thuyết Taniyama - Shimura. Mặc dù giả thuyết này chưa được chứng minh, nhưng Langlands đã tin rằng nó chính là một yếu tố của một sơ đồ thống nhất lớn hơn nhiều. Ông cũng tin rằng có tồn tại những mối liên hệ giữa các lĩnh vực toán học chủ yếu khác và bắt đầu cuộc tìm kiếm sự thống nhất đó. Chỉ trong ít năm, những mối liên hệ này đã bắt đầu ló dạng. Tất cả những giả thuyết khác đóng vai trò thống nhất đó đều yếu và mang màu sắc tư biện nhiều hơn so với giả thuyết Taniyama - Shimura, nhưng chúng đã tạo nên một mạng lưới khá phức tạp của những mối liên hệ vẫn còn là giả thuyết giữa các lĩnh vực khác nhau của toán học. Giấc mơ của Langlands là được nhìn thấy từng giả thuyết đó sẽ lần lượt được chứng minh để dẫn tới một sự thống nhất lớn trong toán học.

Langlands đã thảo luận kế hoạch của ông cho tương lai và cố gắng thuyết phục các nhà toán học khác tham gia vào chương trình

Langlands, một nỗ lực phối hợp để chứng minh một loạt những giả thuyết của ông. Dường như chưa có một con đường rõ ràng để chứng minh những mối liên hệ còn mang màu sắc tư biện như vậy, nhưng nếu như giấc mơ đó trở thành hiện thực thì phần thưởng do nó mang lại thật vô cùng to lớn. Khi đó bất kỳ một bài toán không thể giải được thuộc bất cứ một lĩnh vực toán học nào, đều có thể được biến đổi thành một bài toán tương tự trong một lĩnh vực khác, trong đó toàn bộ kho những kỹ thuật mới có thể được dùng để giải quyết nó. Nếu lời giải vẫn chưa thể tìm được, bài toán lại có thể được biến đổi và chuyển tải vào một lĩnh vực khác nữa của toán học cho tới khi nó được giải quyết thì thôi. Một ngày nào đó, theo chương trình của Langlands, các nhà toán học có thể giải được những bài toán hóc búa nhất bằng cách dịch chuyển nó từ vùng này sang vùng khác của thế giới toán học.

Chương trình này cũng có những hệ quả quan trọng đối với các khoa học ứng dụng và kỹ thuật. Bất kể đó là việc mô hình hóa tương tác của các hạt quark hay là việc phát minh ra cách tổ chức một mạng viễn thông hiệu quả nhất, thường chìa khóa giải quyết vấn đề vẫn là những tính toán toán học. Trong một số lĩnh vực khoa học hoặc công nghệ, độ phức tạp của những tính toán là lớn tới mức sự tiến bộ trong lĩnh vực đó bị cản trở một cách nghiêm trọng. Chỉ cần các nhà toán học chứng minh được các giả thuyết kết nối của chương trình Langlands, thì có thể có những con đường tắt để giải quyết những bài toán trong thế giới thực tiễn cũng như trong thế giới trừu tượng.

Vào những năm 1970, chương trình Langlands đã trở thành bản thiết kế cho tương lai của toán học, nhưng con đường dẫn tới thiên đường đó của những người giải toán đã bị chặn bởi một thực tế đơn giản là: chưa ai có một ý tưởng hiện thực nào để chứng minh bất cứ giả thuyết nào của chương trình Langlands. Giả thuyết mạnh nhất trong chương trình vẫn còn là giả thuyết Taniyama - Shimura, nhưng ngay cả nó cũng dường như đang nằm ngoài tầm với. Một chứng minh của giả thuyết Taniyama - Shimura sẽ là bước đầu tiên trong chương trình Langlands, và như vậy nó trở thành một trong số những giải thưởng lớn nhất của lý thuyết số hiện đại.

Mặc dù địa vị của nó vẫn chỉ là một giả thuyết chưa được chứng minh, nhưng giả thuyết Taniyama - Shimura đã được nhắc tới trong hàng trăm bài báo khoa học bàn về những điều gì sẽ xảy ra nếu như nó được chứng minh. Những bài báo này thường bắt đầu với dòng chữ báo trước rất rõ ràng "Giả sử rằng giả thuyết Taniyama - Shimura là đúng...", và sau đó họ tiếp tục trình bày lời giải của một bài toán vẫn chưa giải được nào đó. Tất nhiên, bản thân những kết quả đó cũng lại chỉ là giả thuyết mà thôi, bởi vì chúng dựa trên giả thuyết Taniyama - Shimura là đúng. Những kết quả mang tính giả thuyết mới này, đến lượt mình, lại được đưa vào những kết quả khác cho tới khi tồn tại quá nhiều kết quả toán học dựa trên sự đúng đắn của giả thuyết Taniyama - Shimura. Một giả thuyết này thôi đã là nền tảng cho cả một tòa lâu đài mới của toán học, nhưng chừng nào nó chưa được chứng minh thì toàn bộ tòa nhà đó vẫn có nguy cơ bị sụp đổ.

Vào thời đó, Andrew Wiles còn đang là nghiên cứu sinh của Đại học Cambridge và ông vẫn còn nhớ rõ nỗi lo lắng đè nặng lên cộng đồng các nhà toán học trong những năm 1970: "Chúng tôi ngày càng xây dựng nhiều giả thuyết cứ trải dần mãi vào tương lai, nhưng tất cả chúng sẽ trở nên lố bịch nếu như giả thuyết Taniyama - Shimura không đúng. Vì vậy, chúng tôi cần phải chứng minh được giả thuyết Taniyama - Shimura để chứng tỏ rằng toàn bộ thiết kế mà chúng tôi hoạch định một cách đầy hy vọng cho tương lai là hoàn toàn đúng đắn".

Các nhà toán học đã xây dựng nên một ngôi nhà mong manh từ các quân bài. Họ mơ ước rằng, một ngày nào đó, một ai đó sẽ xây cho tòa lâu đài của họ một nền móng vững chắc cần thiết. Nhưng họ cũng đã phải sống với cơn ác mộng rằng, sẽ có một ngày, một ai đó có thể chứng minh được rằng giả thuyết Taniyama - Shimura thực tế là sai, và điều này làm cho thành quả nghiên cứu của hơn hai thập kỷ sẽ sụp đổ tan tành.

Một mắt xích còn thiếu

Mùa thu năm 1984, một nhóm chọn lọc các nhà lý thuyết số tổ chức một hội nghị tại Oberwolfach, một thị trấn ở giữa Khu Rừng Đen của CHLB Đức. Họ tụ họp về đây để bàn luận về những đột phá mới trong việc nghiên cứu các phương trình eliptic và lẽ tự nhiên một số báo cáo cũng có đề cập tới những tiến bộ nhỏ nhoi đã đạt được trong quá trình tiến tới chứng minh giả thuyết Taniyama - Shimura. Một trong số những báo cáo đó là của Gerhard Frey, một nhà toán học tới từ Saarbucken. Mặc dù Frey không đưa ra một ý tưởng mới nào giúp chứng minh giả thuyết đó, nhưng ông đã nêu một khẳng định rất đáng chú ý. Khẳng định này nói rằng nếu ai đó chứng minh được giả thuyết Taniyama - Shimura, thì người đó cũng ngay lập tức chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat.

Khi Frey bước lên diễn đàn, ông viết ngay trên bảng phương trình Fermat:

$$x^n + y^n = z^n \text{ trong đó n lớn hơn 2.}$$

Định lý cuối cùng của Fermat khẳng định rằng phương trình đó không có nghiệm là những số nguyên, nhưng Frey đã tiến hành khảo sát xem điều gì sẽ xảy ra nếu như phương trình Fermat là sai, tức là ít nhất có một nghiệm. Frey cũng không có một ý niệm gì về cái nghiệm giả định đó, và ông ký hiệu những số chưa biết ấy là A, B và C:

$$A^N + B^N = C^N$$

Sau đó Frey tiến hành "sắp xếp" lại phương trình. Đây là một quá trình biến đổi hết sức chặt chẽ về mặt toán học, nó làm thay đổi vẻ bề ngoài của phương trình, nhưng thực chất vẫn giữ được sự nguyên vẹn của nó. Bằng cách thực hiện những biến đổi rất phức tạp đối với phương trình gốc của Fermat kết hợp với nghiệm giả định, Frey đã đi tới phương trình:

$$y^2 = x^3 + (A^N - B^N)\, x^2 - A^N . B^N$$

Dường như phương trình trên rất khác với phương trình gốc, nhưng nó là hệ quả trực tiếp của nghiệm giả định. Điều này có nghĩa là, NẾU - lại là chữ "nếu" to tướng - phương trình Fermat có nghiệm và Định lý cuối cùng của Fermat là sai, thì phương trình trên cũng phải tồn tại. Ban đầu cử tọa không mấy quan tâm tới phương trình biến đổi của Frey, nhưng khi ông chỉ ra rằng phương trình mới này thực tế cũng là một phương trình eliptic, mặc dù nhìn khá phức tạp và lạ lẫm. Các phương trình eliptic có dạng tổng quát là:

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

Nhưng nếu ta đặt

$$a = A^N - B^N,\ b = 0,\ c = -A^N . B^N$$

ta sẽ dễ dàng nhận ra bản chất eliptic của phương trình Frey.

Bằng cách biến phương trình Fermat thành một phương trình eliptic, Frey đã kết nối được Định lý cuối cùng của Fermat với giả thuyết Taniyama - Shimura. Sau đó Frey chỉ cho cử tọa của ông thấy rằng phương trình eliptic do ông biến đổi từ nghiệm của phương trình Fermat thực sự là rất kỳ quặc. Sự thực, Frey khẳng định rằng phương trình eliptic của ông kỳ quặc đến mức sự tồn tại của nó đã làm tan nát giả thuyết Taniyama - Shimura.

Cần nhớ rằng phương trình eliptic chỉ là một phương trình "ma". Sự tồn tại của nó là có điều kiện, tức là với giả thiết rằng Định lý cuối cùng của Fermat là sai. Tuy nhiên, nếu phương trình eliptic của Frey thực sự tồn tại, thì nó lại kỳ quặc tới mức dường như không thể liên quan đến một dạng modular nào. Nhưng giả thuyết Taniyama - Shimura lại khẳng định rằng mọi phương trình eliptic đều phải liên hệ với một dạng modular nào đó. Do đó, sự tồn tại của phương trình Frey hóa ra là sự thách thức đối với giả thuyết Taniyama - Shimura.

Nói một cách khác, lập luận của Frey là như sau:

1. Nếu (và chỉ nếu) Định lý cuối cùng của Fermat là sai thì khi đó tồn tại phương trình eliptic của Frey.
2. Phương trình eliptic của Frey kỳ quặc tới mức nó không bao giờ có thể là modular.
3. Giả thuyết Taniyama - Shimura khẳng định rằng mọi phương trình eliptic đều phải là modular.

4. Do đó giả thuyết Taniyama - Shimura phải là sai!

Hay Frey thực hiện lập luận của mình theo chiều ngược lại:

1. Giả thuyết Taniyama - Shimura có thể được chứng minh là đúng, khi đó mọi phương trình eliptic đều phải là modular.
2. Nếu mọi phương trình eliptic đều phải là modular thì phương trình eliptic của Frey là không tồn tại.
3. Nếu phương trình eliptic của Frey không tồn tại thì khi đó phương trình Fermat không thể có nghiệm được.
4. Do đó Định lý cuối cùng của Fermat được chứng minh!

Như vậy Gerhard Frey đã đi tới kết luận đầy kịch tính nói rằng sự đúng đắn của Định lý cuối cùng của Fermat là hệ quả trực tiếp của giả thuyết Taniyama - Shimura nếu nó được chứng minh. Frey đương nhiên khẳng định rằng: nếu các nhà toán học chứng minh được giả thuyết Taniyama - Shimura thì họ sẽ chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat. Vậy là lần đầu tiên sau một thế kỷ, bài toán hóc búa nhất của thế giới xem ra đã bị nao núng. Theo Frey, việc chứng minh giả thuyết Taniyama - Shimura là trở ngại duy nhất trên con đường tiến tới chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat.

Mặc dù cử tọa rất có ấn tượng đối với phát hiện xuất sắc của Frey nhưng họ cũng đã nhận thấy một sai lầm sơ đẳng trong logic của ông. Sai lầm dường như không nghiêm trọng lắm, nhưng nó lại làm cho công trình của Frey trở nên không hoàn chỉnh. Ai là người sửa được sai sót này đầu tiên thì người đó sẽ có công kết nối được Fermat với Taniyama - Shimura.

Cử tọa của Frey lao ra khỏi phòng họp và đi tới phòng photocopy. Thường thì tầm quan trọng của một báo cáo có thể được đo lường bằng độ dài của dòng người xếp hàng đợi nhận được bản photocoppy của báo cáo đó. Một khi đã có trong tay phác thảo đầy đủ những ý tưởng của Frey, họ sẽ trở về viện nghiên cứu của mình và cố gắng bổ sung chỗ còn khiếm khuyết.

Lập luận của Frey phụ thuộc vào một thực tế: phương trình eliptic của ông được rút ra từ phương trình Fermat là kỳ quặc tới mức nó không thể là modular. Sở dĩ công trình của ông chưa hoàn chỉnh là bởi vì ông chưa chứng minh được rằng phương trình eliptic của ông đủ kỳ quặc. Chỉ khi nào có ai đó chứng minh được tính kỳ quặc tuyệt đối của phương trình Frey, rồi chứng minh được giả thuyết Taniyama - Shimura, thì khi đó họ mới suy ra chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat.

Ban đầu các nhà toán học tin rằng việc chứng minh tính kỳ quặc của phương trình Frey là một quá trình khá thông thường. Thoạt nhìn, sai lầm của Frey dường như là khá sơ đẳng, và mọi người có mặt ở Oberwolfach đều cho rằng đây chẳng qua cũng chỉ là một cuộc đua để xem ai làm đại số nhanh nhất mà thôi. Người ta hy vọng rằng chỉ trong vài ba ngày sẽ có người gửi e-mail mô tả họ đã xác lập được tính kỳ quặc thực sự của phương trình Frey như thế nào.

Một tuần đã trôi qua mà vẫn chẳng thấy một e-mail nào. Rồi một tháng cũng đã trôi qua, điều được xem là *sự táo bạo điên rồ toán học* bây giờ chuyển thành một cuộc chạy marathon. Dường như Fermat vẫn còn đang chọc tức, hành hạ hậu thế của mình. Frey đã phác ra một chiến lược rất hấp dẫn để chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat, nhưng ngay cả một bước sơ đẳng nhất là chứng minh rằng phương trình eliptic giả định của Frey không phải là modular cũng đã làm cho các nhà toán học trên khắp thế giới phải bối rối.

Để chứng minh rằng một phương trình eliptic không phải là modular, các nhà toán học phải tìm các bất biến tương tự như những bất biến được mô tả trong Chương 4. Bất biến nút chứng tỏ rằng một nút không thể được biến thành một nút khác, và bất biến trong trò chơi của Loyd chứng tỏ rằng câu đố 14-15 không thể biến đổi thành trật tự đúng được. Nếu các nhà lý thuyết số phát hiện được một bất biến thích hợp để mô tả phương trình eliptic của Frey, thì họ có thể chứng minh rằng bất kể họ có làm gì đi nữa cũng không bao giờ biến được nó thành dạng modular.

Một trong số những người lao tâm khổ tứ để chứng minh và hoàn tất việc kết nối giữa giả thuyết Taniyama - Shimura và Định lý cuối cùng của Fermat là Ken Ribet, giáo sư trường Đại học California ở Berkeley. Từ khi được nghe bản báo cáo của Frey ở Oberwolfach, Ribet đã bị ám ảnh với ý định phải chứng minh phương trình eliptic của Frey là quá ư kỳ quặc tới mức nó không thể là modular. Sau 18 tháng nỗ lực, cũng như nhiều người khác, ông vẫn chẳng đi đến đâu cả. Sau đó, vào mùa hè năm 1986, một đồng nghiệp của Ribet là giáo sư Barry Mazur tới Berkeley để tham dự một Hội nghị toán học quốc tế. Hai người bạn gặp nhau bên ly cà phê, cùng nhau chia sẻ những câu chuyện vui buồn và phàn nàn về tình trạng của toán học hiện thời.

Chuyện phiếm qua lại, cuối cùng họ cũng bàn đến các tin tức mới nhất về những cố gắng chứng minh tính kỳ quặc của phương trình Frey, và Ribet trình bày chiến lược dự định mà ông đang tiến hành. Cách tiếp cận của ông đã lờ mờ tỏ ra có nhiều hứa hẹn nhưng ông mới chỉ chứng minh được một phần rất nhỏ của nó. "Tôi ngồi xuống cạnh Barry và kể cho ông nghe về cái mà tôi đang làm. Tôi nói rằng tôi đã chứng minh được một trường hợp rất đặc biệt, nhưng chưa biết tổng quát hóa nó như thế nào để nhận được chứng minh hoàn chỉnh".

Giáo sư Mazur ngồi nhấm nháp ly cà phê và lắng nghe Ribet trình bày những ý tưởng của mình. Sau đó Mazur ngừng uống và chầm chầm nhìn Ribet một cách ngạc nhiên: "Lẽ nào anh không thấy sao? Thì chính anh đã làm được rồi đó! Tất cả công việc mà anh còn phải làm bây giờ chỉ là thêm một không điểm gamma của cấu trúc (M) trong chứng minh của anh là xong. Nó sẽ cho anh mọi thứ mà anh cần."

Ribet hết nhìn Mazur rồi nhìn lại ly cà phê của ông với vẻ kinh ngạc. Đó là thời điểm quan trọng nhất trong sự nghiệp của Ribet và ông rất thích kể lại một cách chi tiết: "Tất nhiên, lúc đó tôi đã nói rằng anh hoàn toàn đúng, thế mà tại sao tôi lại không nhìn ra nhỉ? Tôi hết sức kinh ngạc bởi vì tôi chưa bao giờ nảy ra trong đầu ý định thêm vào một không điểm gamma nữa của cấu trúc (M), một điều xem ra quá ư là đơn giản".

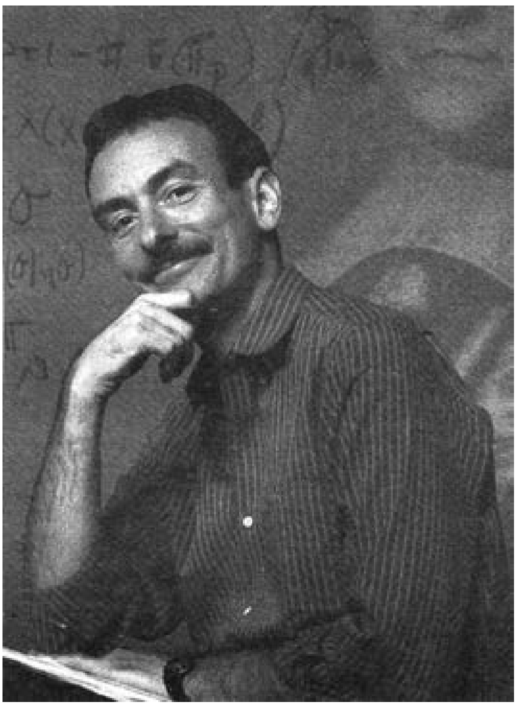
Cũng cần lưu ý rằng, mặc dù việc thêm vào một không điểm gamma của cấu trúc (M) nghe khá đơn giản đối với Ribet, nhưng đây là một bước logic rất phức tạp mà chỉ một số ít các nhà toán học trên thế giới mới có thể hình dung được bên ly cà phê.

"Đó là một mắt xích rất quan trọng mà tôi còn thiếu, mặc dù nó sờ sờ ở ngay trước mắt tôi. Tôi lâng lâng như đi trên mây trở về căn hộ của mình, lòng vẫn băn khoăn tự hỏi: Lạy Chúa, liệu điều này có thực đúng như thế không? Tôi hoàn toàn như mê ngồi xuống bàn và bắt đầu tính toán. Sau một hai giờ gì đấy tôi đã viết tất cả ra giấy và xác nhận được rằng tôi đã biết tất cả những bước then chốt và tất cả đều ăn khớp với nhau. Tôi đã kiểm tra lại toàn bộ chứng minh và nhận thấy rằng mọi chuyện đều ổn cả. Lúc đó có hàng ngàn các nhà toán học đang tham dự Hội nghị, tôi đi ra và nói bâng quơ với một số ít người: tôi đã chứng minh được rằng giả thuyết Taniyama - Shimura sẽ kéo theo Định lý cuối cùng của Fermat. Tin này loang nhanh như một đám cháy rừng và chẳng bao lâu nhiều người đã biết; họ chạy tới hỏi tôi: Liệu có thật là anh đã chứng minh được phương trình eliptic của Frey không phải là modular không? Tôi đã phải nghĩ trong một phút và hoàn toàn bất ngờ trả lời: Đúng, tôi đã chứng minh được."

Như vậy Định lý cuối cùng của Fermat giờ đây đã gắn liền không thể tách rời với giả thuyết Taniyama - Shimura. Nếu ai đó chứng minh được rằng mọi phương trình eliptic đều là modular thì từ đó sẽ suy ra ngay phương trình Fermat là không có nghiệm nguyên và Định lý cuối cùng của Fermat ngay lập tức được chứng minh.

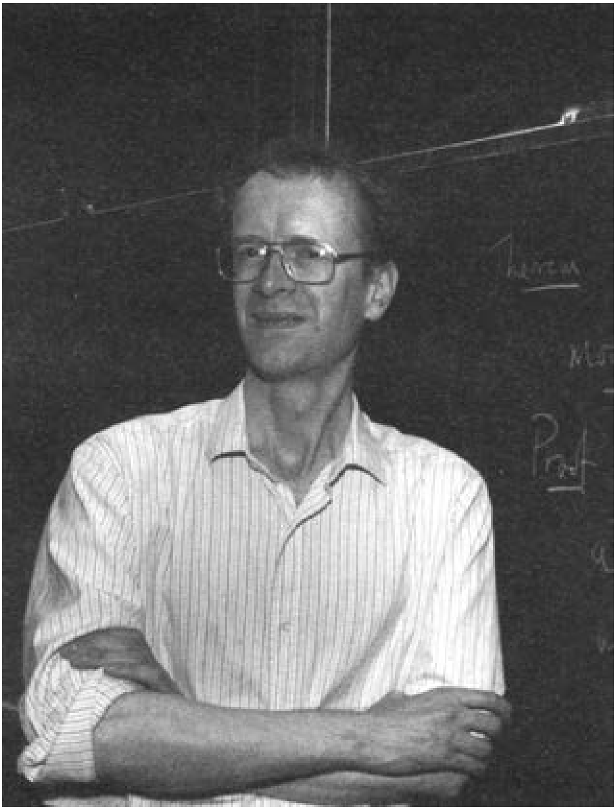
Trong hơn ba thế kỷ, Định lý cuối cùng của Fermat chỉ là một bài toán biệt lập, một câu đố lạ lùng không thể giải được ở bên rìa của toán học. Nhưng giờ đây Ken Ribet, được Gerhard Frey truyền cho cảm hứng, đã đưa nó trở lại vị trí trung tâm. Bài toán quan trọng nhất từ thế kỷ XVII giờ đây lại gắn kết với một bài toán có ý nghĩa nhất của thế kỷ XX. Một câu đố có tầm quan trọng to lớn cả về mặt lịch sử lẫn tình cảm được gắn kết với một giả thuyết có khả năng tạo ra một cuộc cách mạng trong toán học hiện đại.

Frey đã xác định một cách rõ ràng nhiệm vụ đang ở phía trước. Các nhà toán học sẽ tự động chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat nếu như họ chứng minh được giả thuyết Taniyama - Shimura. Ban đầu người ta tràn trề hy vọng với triển vọng mới mẻ đó, nhưng thực tiễn của tình hình đã khiến họ thất vọng. Trong suốt ba mươi năm các nhà toán học đã tìm mọi cách chứng minh giả thuyết Taniyama - Shimura, nhưng họ đều đã thất bại. Vậy thì bây giờ lý gì mà họ có thể thành công? Những người hoài nghi tin rằng cái hy vọng mỏng manh chứng minh được giả thuyết Taniyama - Shimura bây giờ cũng đã tan biến. Logic của họ là bất kỳ cái gì có thể dẫn tới lời giải của bài toán Fermat đều không thể làm được.



Ken Ribert

Ngay cả Ken Ribet, người đã có được một đột phá quan trọng, cũng đã rất bi quan: "Tôi là một trong số rất nhiều người tin rằng giả thuyết Taniyama - Shimura là không thể chứng minh được. Bản thân tôi cũng không bận tâm thử chứng minh nó. Thậm chí nghĩ tới chuyện đó cũng không. Có lẽ, Andrew Wiles là một trong số rất ít người trên Trái đất dám mơ rằng mình có đủ khôn ngoan để chứng minh được giả thuyết đó."



Năm 1986, Andrew Wiles nhận thấy rằng có thể chứng minh
Định lý cuối cùng của Fermat thông qua giả thuyết Taniyama - Shimura.

VI.
NHỮNG TÍNH TOÁN BÍ MẬT

> Một chuyên gia giải toán được Trời phú cho hai phẩm chất khó có thể tương thích với nhau, đó là trí tưởng tượng không bao giờ nằm yên và sự gan lì đầy kiên nhẫn.
>
> HOWARD W. EVES

"Vào một buổi tối cuối hè năm 1986, tôi đang nhấm nháp ly trà đá ở nhà một người bạn. Tình cờ trong lúc chuyện trò anh ấy nói với tôi rằng Ken Ribet đã chứng minh được mối liên hệ giữa giả thuyết Taniyama - Shimura và Định lý cuối cùng của Fermat. Tôi như bị điện giật. Tôi biết rằng từ thời điểm này dòng đời của tôi sẽ thay đổi, bởi vì để chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat tất cả những gì tôi cần làm là phải chứng minh được giả thuyết Taniyama - Shimura. Những điều này có nghĩa là ước mơ thời thơ ấu của tôi giờ đây đã là một điều hết sức nghiêm túc mà tôi cần phải thực sự làm việc. Tôi chỉ biết rằng tôi sẽ không bao giờ để cho nó bị tuột mất. Và giờ đây tôi cần phải đi về nhà và bắt tay làm việc với giả thuyết Taniyama - Shimura."

Hơn hai chục năm đã trôi qua kể từ ngày Andrew Wiles phát hiện ra cuốn sách trong thư viện thành phố, cuốn sách đã khích lệ ông chấp nhận thách thức của Fermat, nhưng đây là lần đầu tiên ông nhìn thấy con đường để đạt được ước mơ thời thơ ấu của mình. Wiles nhớ lại thái độ của ông đối với giả thuyết Taniyama - Shimura đã thay đổi như thế nào sau một đêm: “Tôi nhớ một nhà toán học đã viết về giả thuyết này và ngạo mạn coi nó như một bài tập dành cho những ai quan tâm. Hay lắm, tôi nghĩ, giờ đây tôi sẽ là người quan tâm!”

Từ khi hoàn thành luận án tiến sĩ với giáo sư John Coates ở Đại học Cambridge, Wiles đã vượt Đại Tây dương sang làm việc tại Đại học Princeton (Hoa Kỳ), nơi mà giờ đây ông đã trở thành giáo sư. Nhờ sự hướng dẫn của Coates, có lẽ Wiles là người biết nhiều về các phương trình eliptic hơn bất cứ ai khác trên thế giới nhưng ông cũng ý thức rất rõ rằng ngay cả với vốn kiến thức sâu rộng cũng như những kỹ năng toán học của ông, nhiệm vụ đang đặt ra trước mắt cũng hết sức to lớn.

Phần lớn những nhà toán học khác, kể cả John Coates, đều tin rằng việc tìm cách chứng minh chỉ là vô ích: “Bản thân tôi cũng rất hoài nghi rằng mối liên hệ đẹp đẽ giữa Định lý cuối cùng của Fermat và giả thuyết Taniyama - Shimura lại thực sự dẫn tới một điều gì đó, bởi vì tôi cũng phải thú nhận rằng tôi không nghĩ có thể chứng minh được giả thuyết Taniyama - Shimura. Mặc dù bài toán này đúng là rất đẹp, nhưng dường như thực sự không thể chứng minh được. Tôi cũng phải thú nhận rằng tôi đã nghĩ là mình sẽ không thể sống đủ lâu để chứng kiến nó được chứng minh”.

Wiles đã ý thức được rằng ông có rất ít cơ may để thành công, nhưng ngay cả nếu cuối cùng ông có thất bại trong việc chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat thì ông vẫn cảm thấy rằng những nỗ lực của ông cũng không phải vô ích: “Tất nhiên, giả thuyết Taniyama - Shimura đã để mở nhiều năm. Chưa ai có một ý niệm gì về cách tiếp cận nó nhưng ít nhất thì nó cũng thuộc dòng chính của toán học. Bởi vậy tôi cứ thử chứng minh những kết quả mà ngay cả khi không nhận được chứng minh tổng thể, thì những kết quả ấy cũng quý giá về mặt toán học. Tôi không hề cảm thấy mình tiêu phí thời gian. Và như vậy là bản tình ca của Fermat vốn đã ám ảnh tôi suốt cả cuộc đời nay lại được kết hợp với một bài toán có thể chấp nhận được về mặt nghề nghiệp".

Ẩn cư trên gác xép

Vào lúc bước sang thế kỷ mới, nhà logic vĩ đại người Đức David Hilbert khi được hỏi tại sao lại chưa bao giờ bắt tay chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat, ông đã trả lời: "Trước khi bắt đầu tôi phải dành ra ba năm học tập một cách miệt mài, mà tôi thì lại không có nhiều thời gian để tiêu phí cho một việc có nhiều khả năng thất bại như vậy". Wiles ý thức một cách rõ ràng rằng để có một mảy may hy vọng tìm ra một chứng minh thì trước hết phải đắm mình hoàn toàn vào trong bài toán đó nhưng không giống như Hilbert, ông đã chuẩn bị để chấp nhận mạo hiểm. Ông đọc tất cả những tạp chí số mới nhất rồi sau đó luyện tập kỹ lưỡng những kỹ thuật tân tiến nhất cho tới khi chúng trở thành bản tính thứ hai của ông. Việc thu thập những vũ khí cần thiết cho trận chiến đấu phía trước đã đòi hỏi Wiles phải bỏ ra 18 tháng để làm quen với mỗi kết quả toán học đã từng được áp dụng hoặc đã từng được rút ra từ các phương trình eliptic hoặc dạng modular. Sự đầu tư vẫn chưa thấm tháp gì, ông vẫn tự nhủ mình như vậy, bởi thế ông luôn chờ đợi một ý định nghiêm túc nào đó để chứng minh Định lý rất có thể sẽ đòi hỏi phải bỏ ra 10 năm tập trung hoàn toàn trí óc cho nó.

Wiles đã bỏ mọi công việc không có liên quan trực tiếp với việc chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat và ngừng tới dự các hội nghị và hội thảo được tổ chức triền miên. Vì vẫn còn có những trách nhiệm tại Khoa Toán của Đại học Princeton, nên Wiles vẫn tiếp tục tham dự các seminar, đọc bài giảng cho sinh viên và hướng dẫn nghiên cứu sinh. Bất cứ khi nào có thể là ông lại tránh tới khoa, lấy cớ đang làm việc ở nhà để có thể vùi mình vào căn phòng làm việc trên căn gác áp mái của mình. Tại đây ông triển khai và mở rộng hiệu năng của những kỹ thuật đã được xác lập với hy vọng phát triển một chiến lược cho cuộc công phá của ông đối với giả thuyết Taniyama - Shimura.

"Tôi thường leo lên phòng làm việc của tôi và bắt đầu tìm kiếm những hình mẫu. Tôi cố gắng làm những tính toán nhằm giải thích một khía cạnh toán học này hay khác, và thử lắp ghép nó vào sự hiểu biết rộng lớn hơn trước đó của một bộ phận toán học có khả năng làm sáng tỏ vấn đề cụ thể mà tôi đang suy ngẫm. Đôi khi tôi phải tham khảo thêm một cuốn sách để xem họ đã làm điều đó như thế nào. Đôi khi đó lại là một vấn đề làm thay đổi chút ít mọi chuyện và tôi phải làm thêm một số tính toán nữa. Và cũng có lúc tôi lại nhận ra rằng tất cả những điều đã làm trước đây chẳng dùng được vào việc gì. Khi đó tôi lại phải tìm ra một điều gì đấy hoàn toàn mới - nhưng cái cách thức mà nó đã được nảy sinh như thế nào là chuyện hoàn toàn bí ẩn.

Về cơ bản đó chỉ là vấn đề tư duy. Thường thì bạn hay viết ra một điều gì đó để làm sáng tỏ những ý nghĩ của mình, nhưng không nhất thiết phải như vậy. Đặc biệt khi bạn đã lâm vào ngõ cụt thực sự, nghĩa là khi bạn có một bài toán thực sự mà bạn muốn vượt qua, thì khi đó lối tư duy toán học thông thường sẽ không có ích lợi gì cho bạn nữa. Để nảy ra được một ý tưởng mới cần phải có một thời gian dài cực kỳ tập trung cho bài toán, không một chút lơ là nào. Bạn phải thực sự chỉ tập trung nghiền ngẫm về bài toán, chứ không được suy nghĩ về một điều gì khác. Rồi bạn dừng lại. Sau đó bạn sẽ có một thời kỳ thư giãn, trong đó tiềm thức đóng vai trò chủ đạo và chính trong thời kỳ này những ý tưởng mới sẽ xuất hiện".

Từ thời điểm bắt tay vào chứng minh, Wiles đã có một quyết định quan trọng là sẽ làm việc đơn độc và bí mật hoàn toàn. Toán học hiện đại đã làm nảy sinh một nền văn hóa hợp tác và cộng tác, vì vậy quyết định của Wiles đã quay ngược trở lại những thời đại trước. Điều đó chẳng khác gì ông đã bắt chước chính Fermat, một trong số những ẩn sĩ toán học nổi tiếng nhất. Wiles giải thích rằng một phần nguyên nhân khiến ông quyết định làm việc một cách bí mật là do ông không muốn phân tán tư tưởng: "Tôi nhận thấy rằng bất cứ điều gì có liên quan tới Định lý cuối cùng của Fermat đều gây ra rất nhiều sự chú ý. Chừng nào đầu óc của bạn còn phân tán do có quá nhiều người quan tâm thì bạn không thể nào tập trung suy nghĩ được".

Một động cơ khác khiến Wiles quyết định làm việc bí mật có lẽ là sự khao khát vinh quang của ông. Ông rất sợ xảy ra tình huống khi ông đã hoàn tất phần đại thể của chứng minh nhưng còn thiếu một yếu tố tính toán cuối cùng. Tại điểm đó, nếu lộ ra tin về sự đột phá của ông, thì sẽ không gì có thể chặn được một nhà toán học đối thủ nào đó, dựa trên công trình của Wiles, sẽ hoàn tất được chứng minh và ẵm mất toi giải thưởng.

Trong những năm tiếp sau, Wiles sẽ phải có một loạt những phát minh kỳ diệu, nhưng sẽ không cái nào được đưa ra thảo luận hoặc công bố trước khi chứng minh được hoàn tất. Ngay cả những đồng nghiệp gần gũi của Wiles cũng không biết về các nghiên cứu của ông. John Coates vẫn còn nhớ trong những lần trao đổi, Wiles không hề hé lộ một manh mối gì về những điều mình đang làm: "Tôi nhớ có nói với anh ấy trong nhiều dịp rằng mối liên hệ giữa giả thuyết Taniyama - Shimura và Định lý cuối cùng của Fermat là rất đẹp, nhưng chứng minh giả thuyết đó hiện vẫn là vô vọng. Và tôi thấy rằng anh ấy chỉ cười".

Ken Ribet, người đã chứng minh được mối liên hệ giữa Fermat và Taniyama - Shimura, cũng hoàn toàn không hề biết những hoạt động bí mật của Wiles. "Đó có lẽ là trường hợp duy nhất mà tôi được biết, trong đó một người làm việc lâu như vậy mà không tiết lộ gì về những điều mà mình đang làm, cũng chẳng nói gì về những tiến bộ mà mình đã đạt được. Theo hiểu biết của bản thân tôi, thì đây là điều chưa hề có tiền lệ. Trong cộng đồng toán học của chúng tôi, mọi người luôn chia sẻ những ý tưởng của mình. Các nhà toán học cùng nhau tới dự các hội nghị, gặp nhau trong các buổi seminar, gửi e-mail cho nhau, nói chuyện điện thoại với nhau, hỏi ý kiến của nhau..., nói một cách ngắn gọn là họ luôn thông tin cho nhau. Khi bạn trò chuyện với những người khác, bạn sẽ nhận được sự khích lệ, họ sẽ nói với bạn rằng điều mà bạn đang làm là rất quan trọng, họ còn cho bạn nhiều ý tưởng. Đó cũng tựa như một nguồn dinh dưỡng và nếu bạn tách mình ra khỏi nó, thì dù bạn có đang làm một điều gì chăng nữa cũng được xem là rất kỳ quặc về mặt tâm lý".

Để không gây nghi ngờ, Wiles đã nghĩ ra một kế hoạch rất khôn ngoan nhằm đánh lạc hướng các đồng nghiệp. Trong những năm đầu thập kỷ 80, phần lớn những nghiên cứu của ông là về một loại phương trình eliptic đặc biệt mà ông đang định công bố một cách tổng thể thì những phát minh của Ribet và Frey đã làm cho ông thay đổi ý định. Ông quyết định sẽ chỉ cho công bố từng đoạn một, cứ sáu tháng một lần. Cái năng suất đều đều đó khiến cho các đồng nghiệp của ông tin rằng ông vẫn đang tiếp tục những nghiên cứu quen thuộc của mình. Chừng nào còn duy trì được kế hoạch đó thì ông còn có thể làm việc cho niềm đam mê thực sự mà không phải tiết lộ gì về những đột phá của mình.

Người duy nhất biết về bí mật của Wiles là vợ ông, bà Nada. Họ cưới nhau gần như ngay sau khi Wiles bắt tay vào tìm kiếm chứng minh, và vì việc tính toán có những tiến bộ nên ông đã thổ lộ với bà và chỉ với mình bà mà thôi. Trong những năm tháng sau đó, gia đình là sự giải trí duy nhất của Wiles. "Vợ tôi là người duy nhất biết việc tôi đang làm liên quan đến Fermat. Tôi nói cho cô ấy biết trong tuần trăng mật của chúng tôi, chỉ ít ngày sau đám cưới. Vợ tôi cũng có nghe nói về Định lý cuối cùng của Fermat, nhưng đó là vào thời mà cô ấy không có ý niệm gì về ý nghĩa lãng mạn của nó đối với các nhà toán học, cũng như không hề biết rằng trong nhiều năm nó đã từng là chiếc gai trong da thịt chúng tôi".

Quyết đấu với cái vô hạn

Để chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat, Wiles cần phải chứng minh giả thuyết Taniyama - Shimura: *mọi phương trình* *eliptic đều có tương quan với một dạng modular*. Ngay cả trước khi tìm ra mối liên hệ với Định lý cuối cùng của Fermat, các nhà toán học đã từng cố gắng một cách tuyệt vọng để chứng minh giả thuyết này, nhưng mọi cố gắng của họ đều đã kết thúc thất bại. Wiles cũng đã ý thức hết sức rõ ràng về khó khăn to lớn trong việc tìm kiếm chứng minh đó. "Xét cho cùng thì cái mà người ta ngây thơ muốn thử làm và cái mà người ta chắc hẳn đã thử làm là đếm các phương trình eliptic và đếm các dạng modular, sau đó chứng tỏ rằng cả hai có số lượng như nhau. Nhưng chưa có ai tìm ra được một cách đơn giản nào để làm việc đó. Vấn đề đầu tiên đặt ra là cả hai loại đều có số lượng vô hạn, mà bạn thì không thể đếm một số vô hạn được, bởi vì ta không có một cách đơn giản nào để làm điều đó".

Để tìm giải pháp, Wiles đã dùng cách thông thường mà ông vẫn quen dùng để giải quyết những vấn đề khó khăn. "Thi thoảng tôi ngồi viết ra những dòng chữ nguệch ngoạc hoặc những hình vẽ linh tinh. Đó không phải là những hình vẽ nghiêm chỉnh mà là những hình vẽ của tiềm thức. Tôi không bao giờ dùng máy tính cả". Trong trường hợp này, cũng như trong nhiều bài toán của lý thuyết số, máy tính chẳng giúp ích được gì. Giả thuyết Taniyama - Shimura được áp dụng cho một số vô hạn các phương trình eliptic, mặc dù máy tính có thể kiểm tra một trường hợp riêng lẻ nào đó trong một ít giây, nhưng nó không thể kiểm tra tất cả mọi trường hợp được. Thay vì vậy cái đòi hỏi phải làm là một lập luận logic chặt chẽ từng bước một, có khả năng cho lý do và giải thích được tại sao mỗi phương trình eliptic đều phải là modular. Để tìm ra chứng minh, Wiles chỉ biết trông cậy vào mẩu giấy, chiếc bút chì và bộ óc của mình. “Hầu như trong suốt thời gian này tôi đều mang ý nghĩ đó trong đầu. Mỗi buổi sáng thức dậy, ý nghĩ đầu tiên là nó. Tôi nghĩ về nó suốt ngày và khi đi ngủ cũng chỉ nghĩ về nó. Không có một giây phút nào sao lãng, quanh đi quẩn lại tôi chỉ có một ý nghĩ về nó trong đầu.”

Sau một năm nghiền ngẫm, Wiles quyết định dùng chiến lược tổng quát là dùng phép quy nạp làm cơ sở cho chứng minh của mình. Phép quy nạp là một cách chứng minh rất có hiệu quả vì nó cho phép nhà toán học chứng minh một mệnh đề là đúng với mọi trường hợp mà chỉ cần chứng minh nó đúng cho một trường hợp mà thôi. Ví dụ, hãy tưởng tượng một nhà toán học muốn chứng minh một mệnh đề là đúng đối với mọi số tự nhiên cho tới vô cùng. Bước thứ nhất cần phải làm là chứng minh mệnh đề đó đúng với số 1, một công việc thường là khá dễ dàng. Bước tiếp sau là cần phải chứng minh rằng nếu mệnh đề đã đúng với số 1 thì nó phải đúng đối với số 2, và nếu đã đúng với số 2 thì nó phải đúng với số 3, và nếu đã đúng với số 3 thì nó phải đúng với số 4, và cứ như vậy mãi. Tổng quát hơn, nhà toán học cần phải chứng tỏ rằng nếu mệnh đề là đúng đối với số n thì nó phải đúng đối với số n + 1 tiếp theo.

Chứng minh bằng quy nạp về căn bản là một quá trình gồm hai bước:

(1) Chứng minh mệnh đề đúng với trường hợp đầu tiên.

(2) Chứng minh rằng nếu mệnh đề đúng đối với một trường hợp bất kỳ thì nó sẽ đúng đối với trường hợp tiếp theo.

Một cách khác để hình dung về phép chứng minh bằng quy nạp là hãy tưởng tượng một số vô hạn các trường hợp như là một dãy vô hạn các quân bài đôminô. Việc chứng minh cho mọi trường hợp tựa như là tìm cách để làm đổ từng quân đôminô một. Nếu ta tự làm đổ lần lượt từng quân đôminô một thì sẽ tốn một lượng vô hạn thời gian cùng sức lực, nhưng phép chứng minh bằng quy nạp cho phép các nhà toán học làm đổ tất cả các quân bài đôminô mà chỉ cần làm đổ quân đầu tiên. Nếu các quân đôminô được xếp một cách khéo léo thì khi làm đổ quân đôminô đầu tiên sẽ làm đổ quân đôminô thứ hai, rồi dẫn đến làm đổ quân đôminô thứ ba và cứ như thế cho đến vô hạn. Như vậy chứng minh bằng quy nạp gợi cho ta nhớ tới hiệu ứng đôminô. Dạng làm đổ các quân đôminô toán học này cho phép có thể chứng minh một số vô hạn trường hợp bằng cách chỉ phải chứng minh cho trường hợp đầu tiên. Phụ lục 10 sẽ cho bạn thấy người ta đã sử dụng phép chứng minh bằng quy nạp như thế nào để chứng minh một mệnh đề toán học tương đối đơn giản đối với tất cả các số tự nhiên.

Thách thức đối với Wiles là phải xây dựng được lập luận quy nạp chứng tỏ được rằng mỗi phương trình eliptic trong số vô hạn các phương trình đó phải tương ứng với một dạng modular (cũng có số lượng vô hạn). Bằng cách nào đó ông phải phá vỡ được chứng minh thành một số vô hạn các trường hợp riêng rẽ và sau đó chứng minh cho trường hợp đầu tiên. Tiếp theo, sau khi đã chứng minh được trường hợp đầu tiên, ông cần phải chứng minh rằng tất cả các trường hợp khác cũng sẽ đổ như dãy các quân đôminô. Rốt cuộc, ông cũng đã phát hiện ra bước đầu tiên trong phép chứng minh bằng quy nạp của mình được ẩn giấu trong công trình của một thiên tài đầy bi kịch của nước Pháp thế kỷ XIX.

Evariste Galois

Evariste Galois sinh tại Bourg-la-Reine, một làng nhỏ ở ngay phía Nam Paris, vào ngày 25 tháng 10 năm 1811, tức là chỉ 22 năm sau cuộc Cách mạng Pháp. Napoleon Bonaparte lúc đó còn đang ở đỉnh cao của quyền lực, nhưng một năm sau đã bị thất bại thảm hại trên chiến trường Nga. Vào năm 1814 ông đã bị đưa đi đày và Vua Louis XVIII lên ngôi. Năm 1815, Napoleon trốn thoát khỏi đảo Elba, trở về nước giành lại quyền lực, nhưng trong một trăm ngày ông đã bị đánh bại ở Waterloo và một lần nữa buộc phải từ bỏ ngai vàng cho Louis XVIII. Galois cũng giống như Sophia Germain, đều lớn lên trong thời kỳ đầy những biến động dữ dội, nhưng trong khi

Germain thường giam mình lánh xa những chỗ náo động của cuộc Cách mạng Pháp để tập trung cho toán học thì Galois lại thường xuyên có mặt tại trung tâm những cuộc tranh luận chính trị, và điều này không chỉ làm cho ông sao lãng một sự nghiệp học thuật xuất sắc mà còn đưa đến cái chết quá sớm của ông.

Ngoài tình hình bất ổn chung tác động đến cuộc sống riêng của mỗi người, sự quan tâm về chính trị của Galois còn được cha ông, Nicolas - Gabriel Galois, khuyến khích. Khi Evariste mới 4 tuổi cha ông được bầu làm thị trưởng của Bourg-la-Reine. Đó là thời kỳ mà Napoleon đắc thắng trở lại cầm quyền, một thời kỳ mà những giá trị tự do mạnh mẽ của Nicolas phù hợp với tâm trạng của dân tộc. Vốn là một người có văn hóa và hào hiệp, trong những năm đầu làm thị trưởng ông đã dành được sự kính trọng của cả cộng đồng, nhờ thế mà khi Louis XVIII trở lại ngai vàng, ông vẫn giữ nguyên cương vị đã được bầu. Ngoài chính trị ra, mối quan tâm chủ yếu của ông dường như là soạn những bài độc tấu dí dỏm mà ông thường đọc trong những cuộc họp tại tòa thị chính và được các nhân viên dưới quyền của ông hết sức thích thú. Nhiều năm sau, chính tài năng châm biếm rất có duyên ấy đã dẫn tới sự suy sụp của ông.

Năm 12 tuổi, Evariste Galois vào học tại trường trung học Louis-le-Grand, một trường rất có uy tín nhưng kỷ luật cũng rất khắc nghiệt. Ban đầu chưa được học toán, thành tích học tập của ông cũng đáng nể, nhưng chưa thật xuất sắc. Tuy nhiên, một sự kiện xảy ra ngay trong học kỳ đầu tiên đã có ảnh hưởng đến cả cuộc đời sau này của ông. Trường Louis-le-Grand thực ra trước kia là trường của dòng tu Jesuit và có tin đồn nói rằng nó sắp được trả về cho các thầy tu cai quản. Thời kỳ này diễn ra cuộc đấu tranh triền miên giữa những người theo phái cộng hòa và những người theo phái quân chủ nhằm làm chao đảo cán cân quyền lực giữa Louis XVIII và các đại biểu của nhân dân, và sự tăng ảnh hưởng của các thầy tu được xem như là dấu hiệu xa rời nhân dân và nghiêng dần về phía Đức Vua. Học sinh của trường, những người chủ yếu có cảm tình với phái cộng hòa, đã lập kế hoạch nổi loạn; nhưng hiệu trưởng của trường, ông Berthod, đã phát hiện ra và ngay lập tức đuổi học 12 học sinh cầm đầu âm mưu nổi loạn đó. Ngày hôm sau, khi Berthod yêu cầu học sinh các lớp còn lại phải bày tỏ lòng trung thành, họ đã từ chối không uống để chúc mừng Vua Louis XVIII, ngay lập tức 100 học sinh nữa bị đuổi học. Galois lúc đó còn quá nhỏ, nên không tham gia vào cuộc nổi loạn thất bại đó và vì vậy vẫn được tiếp tục học ở trường. Tuy nhiên, việc nhìn thấy bạn bè của mình bị sỉ nhục theo cách đó chỉ làm bùng lên những khuynh hướng cộng hòa đã có sẵn ở trong ông.

Chỉ đến tuổi 16 - Galois mới ghi danh theo học lớp toán đầu tiên, dưới con mắt của các thầy giáo thì chính lớp toán này đã biến Galois từ một học sinh rất có ý thức thành một học sinh vô kỷ luật. Những báo cáo của nhà trường cho thấy rằng ông bỏ bê tất cả những môn khác, chỉ tập trung vào niềm đam mê mới mà ông vừa phát hiện ra:

> Học sinh này chỉ học những lĩnh vực cao cấp nhất của toán học. Sự điên rồ toán học đã chiếm lĩnh hoàn toàn cậu bé này. Theo tôi, tốt nhất là bố mẹ cậu bé nên cho phép nó không phải học gì khác ngoài môn toán. Nếu không, chỉ làm phí thời gian của nó ở đây và nó sẽ chẳng làm được điều gì khác ngoài việc tra tấn các thầy giáo và làm khổ mình vì những hình phạt.

Sự khao khát về toán học của Galois chẳng bao lâu đã vượt ra ngoài khả năng của các thầy giáo nên ông học trực tiếp từ những cuốn sách mới nhất do các bậc thầy của thời đại đó viết ra. Ông dễ dàng hấp thu những khái niệm phức tạp nhất, mới 17 tuổi ông đã có công trình công bố trên tạp chí Annales de Gergone. Con đường phía trước dường như rộng mở đối với cậu bé thần đồng này, nhưng oái oăm thay, chính sự xuất sắc kỳ lạ của Galois lại là trở ngại lớn nhất cho sự tiến bộ của ông. Mặc dù kiến thức về toán của ông thừa để vượt qua các kỳ thi ở trường Louis-le-Grand, nhưng các lời giải của Galois thường là mới mẻ và tinh xảo tới mức các vị giám khảo không đánh giá hết được giá trị của nó. Tình hình còn tồi tệ hơn nữa vì Galois thường thực hiện quá nhiều những tính toán trong đầu, nên ông không bận tâm tới chuyện phải trình bày rõ ràng những lập luận của mình trên giấy, làm cho các vị giám khảo thậm chí còn lúng túng và thất vọng.

Ngoài ra, tính khí nóng nảy và hấp tấp của thiên tài trẻ tuổi này đã làm cho ông không được lòng các thầy giáo cũng như bất kỳ ai đã từng có quan hệ với ông. Khi Galois nộp đơn thi vào trường Đại học Bách khoa Paris, một trường có uy tín nhất của nước Pháp thời bấy giờ, những câu trả lời ngắn ngủn, thiếu giải thích thật rõ ràng trong kỳ thi vấn đáp đã khiến ông không được nhận vào trường. Galois khao khát một cách tuyệt vọng vào được trường Bách khoa không chỉ bởi vì danh tiếng của nó mà còn bởi vì trường này cũng nổi tiếng là một trung tâm hoạt động của những người cộng hòa. Một năm sau, ông nộp đơn thi lại, nhưng lần này cũng vẫn những suy luận nhảy cóc của ông trong kỳ thi vấn đáp đã làm cho vị giám khảo tên là Dinet phải bối rối. Khi cảm thấy mình chắc chắn bị rớt lần thứ hai và tuyệt vọng vì tài năng xuất sắc của mình không được thừa nhận, Galois đã mất bình tĩnh, ông cầm chiếc giẻ lau bảng ném thẳng vào mặt Dinet. Và Galois không bao giờ quay trở lại những căn phòng đầy tôn kính của trường Bách khoa nữa.

Không hề chán nản vì bị đánh trượt, Galois vẫn tự tin vào tài năng toán học của mình và ông vẫn tiếp tục tiến hành những nghiên cứu riêng. Galois quan tâm chủ yếu đến việc tìm nghiệm của các phương trình, chẳng hạn như các phương trình bậc hai. Các phương trình này có dạng:

$ax^2 + bx + c = 0$, trong đó a, b, c có giá trị tùy ý.

Bài toán đặt ra là tìm những giá trị của x để phương trình bậc hai trên được nghiệm đúng. Không muốn dùng phương pháp mò mẫm thử và sai, các nhà toán học muốn có ngay một công thức tính nghiệm, và thật may mắn thay, có tồn tại một công thức như thế:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Chỉ cần thay các giá trị của a, b, c vào công thức trên là ta có thể tính được ngay các giá trị đúng của x. Ví dụ, ta có thể dùng công thức trên để giải phương trình:

$2x^2 - 6x + 4 = 0$, trong đó a = 2, b = - 6 và c = 4.

Bằng cách đặt các giá trị của a, b, c vào công thức trên ta sẽ tính được x = 1 hoặc x = 2.

Có các phương trình phức tạp hơn, đó là các đa thức. Một loại đa thức phức tạp là phương trình bậc ba:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Sự phức tạp là do có thêm số hạng chứa x^3. Bằng cách cộng thêm số hạng chứa x^4, ta nhận được phương trình đa thức bậc tiếp theo, thường được gọi là phương trình bậc bốn:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Vào thế kỷ XIX, các nhà toán học cũng đã tìm được công thức để tính nghiệm của các phương trình bậc ba và bậc bốn, nhưng lại chưa biết phương pháp để tìm nghiệm của phương trình bậc năm:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

Galois bị ám ảnh bởi việc tìm kiếm công thức để giải phương trình bậc năm, một thách thức lớn của thời kỳ đó, và ở tuổi 17 ông đã có đủ trình độ để gửi hai bài báo nghiên cứu cho Viện Hàm lâm Khoa học Pháp. Người được chỉ định phản biện cho hai bài báo này là Augustin-Louis Cauchy, người mà nhiều năm sau đã đua tranh với Lamé về một chứng minh cuối cùng là sai của Định lý cuối cùng của Fermat. Cauchy đánh giá rất cao về công trình của chàng thanh niên này và xem nó đáng được tham gia cuộc thi giành Giải thưởng lớn về toán học của Viện Hàn lâm. Để qua được vòng loại, hai bài báo của Galois phải được viết và trình dưới dạng một tiểu luận, vì vậy Cauchy gửi trả lại cho Galois và chờ ông nộp lại.

Vượt qua được sự phê phán của các thầy giáo và sự đánh trượt của trường Bách khoa, thiên tài Galois dường như đã sắp sửa được công nhận; nhưng rồi ba năm tiếp sau, một loạt những bi kịch cá nhân và nghề nghiệp đã làm tiêu tan những khát vọng của ông. Vào tháng 7 năm 1829, một linh mục mới thuộc dòng Jesuit đã tới làng Bourg-la-Reine, nơi mà cha Galois vẫn đang làm thị trưởng. Vị linh mục này bực tức trước cảm tình của những người cộng hòa đối với ngài thị trưởng, y bèn mở một chiến dịch nhằm làm cho cha Galois bị mất chức bằng cách tung đủ thứ tin đồn làm mất uy tín của ông. Đặc biệt, gã linh mục đầy mưu mô này đã lợi dụng sự nổi tiếng của Nicolas-Gabriel Galois trong việc sáng tác những bài thơ châm biếm dí dỏm. Y đã viết một loạt những bài thơ thô tục chế nhạo các thành viên của cộng đồng và tất cả đều ký tên ngài thị trưởng. Cha của Galois không thể chịu nổi sự xấu hổ và ngượng ngùng do gã linh mục gây ra nên đã quyết định tự sát.

Evariste Galois trở về dự đám tang của cha, đã tận mắt chứng kiến sự chia rẽ trong làng do gã linh mục gây ra. Khi quan tài đang hạ huyệt, thì một cuộc ẩu đả đã xảy ra giữa gã linh mục đang làm lễ và những người ủng hộ ngài thị trưởng, những người đã nhận ra rằng có một âm mưu làm hại ông. Gã linh mục bị một vết thương dài ở đầu, cuộc ẩu đả đã biến thành một cuộc bạo loạn, và chiếc quan tài đã bị thả bừa xuống huyệt. Chứng kiến cảnh hệ thống nhà thờ của Pháp đã hạ nhục và hủy hoại cha mình chỉ làm củng cố thêm sự ủng hộ nhiệt thành của Galois đối với sự nghiệp của những người cộng hòa.

Trở lại Paris, Galois đã viết gộp hai bài báo của mình thành một tiểu luận và đã hoàn thành trước thời hạn của cuộc thi khá lâu. Ông đã gửi ngay tiểu luận này cho Joseph Fourier, thư ký của Viện Hàn lâm, và được ông này chuyển nó cho ban giám khảo. Tiểu luận của Galois không đưa ra được nghiệm của phương trình bậc năm, nhưng lại đưa ra một ý tưởng xuất sắc mà nhiều nhà toán học, kể cả Cauchy, đã xem rằng nó đáng được nhận giải thưởng. Nhưng điều choáng váng đối với Galois và các bạn của ông là không những ông không nhận được giải thưởng, mà thậm chí còn không được tham gia một cách chính thức. Fourier đã qua đời một ít tuần trước khi xét giải, và mặc dù chồng các tiểu luận tham gia cuộc thi đã được chuyển cho Hội đồng, nhưng trong đó lại không có tiểu luận của Galois. Bản tiểu luận này đã không bao giờ được tìm thấy nữa và sự bất công này đã được một nhà báo Pháp ghi lại:

> Năm ngoái, trước ngày 1 tháng 3, ông Galois có gửi cho thư ký Viện hàn lâm một tiểu luận về nghiệm của các phương trình số. Tiểu luận này lẽ ra đã tham gia cuộc thi giành Giải thưởng lớn về toán học. Nó xứng đáng được giải, vì đã giải quyết được một số khó khăn mà nhà toán học Lagrange đã không làm được. Ông Cauchy đã có những đánh giá rất cao về tác giả của tiểu luận này. Nhưng điều gì đã xảy ra? Bản tiểu luận bị mất và giải thưởng cũng đã được trao mà không có sự tham gia của nhà bác học trẻ tuổi.
>
> LE GLOBE, 1831

Galois cảm thấy rằng bản tiểu luận của ông đã bị Viện Hàn lâm vốn có thiên kiến về chính trị, đã cố tình làm cho thất lạc. Một năm sau niềm tin này càng được củng cố khi Viện Hàm lâm lại từ chối một bản thảo tiếp theo của ông với khẳng định rằng "những lập luận của ông không đủ rõ ràng cũng như chưa được phát triển một cách đầy đủ để cho phép chúng tôi có thể đánh giá được sự chặt chẽ của nó". Galois chắc chắn rằng đã có một âm mưu loại ông ra khỏi cộng đồng toán học, và vì vậy ông đã bỏ bê việc nghiên cứu để dành thời gian và sức lực chủ yếu cho cuộc đấu tranh vì sự nghiệp của phái cộng hòa. Vào thời gian đó Galois đã là sinh viên của trường Sư Phạm, một trường có uy tín chỉ kém trường Bách khoa đôi chút. Ở trường Sư Phạm, Galois nổi tiếng là một sinh viên hay gây rối còn vang dội hơn cả sự nổi tiếng về toán học của ông. Điều này đã đạt tới đỉnh điểm trong cuộc cách mạng tháng 7 năm 1830, khi mà Charles X chạy trốn khỏi nước Pháp và các phe cánh chính trị tranh giành nhau quyền kiểm soát các đường phố ở Paris. Ông Guigniault, hiệu trưởng trường Sư Phạm, vốn là một nhà quân chủ, đã ý thức được rằng đa số sinh viên trong trường đều là những nhà cộng hòa cấp tiến vì thế đã ra lệnh nhốt họ trong phòng ngủ và khóa tất cả các cổng trường. Vậy là Galois bị ngăn chặn không được tranh đấu cùng với các chiến hữu của mình, sự vỡ mộng cộng với cơn tức giận đạt tới đỉnh điểm khi mà phái cộng hòa cuối cùng đã thất bại. Ngay khi có cơ hội xuất hiện, Galois đã cho công bố một bài chỉ trích sâu cay viên hiệu trưởng nhà trường và kết tội y là một tên hèn nhát. Không có gì đáng ngạc nhiên là Guigniault đã ngay lập tức đuổi học cậu sinh viên bướng bỉnh. Thế là sự nghiệp toán học chính thức của Galois đã chấm dứt.

Ngày 4 tháng 12, thiên tài chuyên gây rối này lại có ý định trở thành người nổi loạn chuyên nghiệp nên đã gia nhập đơn vị Pháo binh của Vệ quốc quân, một bộ phận theo phái cộng hòa trong giới quân sự, còn được biết tới như là "những người bạn dân". Trước khi kết thúc tháng cuối cùng trong năm, vua mới Louis-Phillipe đã giải tán lực lượng Pháo binh của Vệ quốc quân để tránh sự bạo loạn tiếp tục xảy ra, khiến cho Galois không còn chốn nương thân. Tài năng trẻ tuổi xuất sắc nhất của nước Pháp này đã bị chặn đường ở khắp nơi, và một số đồng nghiệp toán học trước kia của ông ngày càng lo ngại cho hoàn cảnh khốn cùng của ông. Sophia Germain, người mà vào thời đó là "nữ chính khách" đứng tuổi của nền toán học Pháp, đã bày tỏ sự lo lắng của mình với bá tước Libri-Carrucci, một người bạn của gia đình:

> Quả thật là có sự bất hạnh liên quan với tất cả những gì có dính líu đến toán học. Cái chết của Fourier đã là đòn kết thúc giáng xuống anh chàng sinh viên Galois này, người mà mặc dù tính tình rất bướng bỉnh, nhưng đã tỏ ra là có tài năng thực sự. Cậu ấy đã bị đuổi khỏi trường Sư Phạm, và hiện trong túi không có một xu, mẹ cậu ấy rất nghèo, vì vậy cậu ấy hiện vẫn đang tiếp tục thói quen hay xúc phạm của mình. Người ta nói rằng cậu ấy sắp điên đến nơi. Tôi sợ rằng điều đó sẽ là sự thật.

Chừng nào mà những đam mê chính trị của Galois còn tiếp tục thì số phận của ông tiếp tục tồi tệ hơn. Nhà văn vĩ đại người Pháp, Alexandre Dumas đã để lại một bằng chứng về điều này. Một hôm tình cờ ông có mặt ở nhà hàng Vendanges des Bourgogne, khi người ta tổ chức một bữa tiệc chúc mừng 19 người theo phái cộng hòa bị buộc tội hoạt động bí mật đã được xử trắng án:

> Bất chợt, giữa câu chuyện riêng của tôi với một người ngồi bên trái tôi, cái tên Louis - Phillipe và tiếp sau là năm sáu tiếng huýt sáo đã lọt vào tai tôi. Tôi quay người lại. Một trong số những cảnh tượng huyên náo nhất đang diễn ra cách chỗ tôi khoảng 15 đến 20 chỗ ngồi. Thật khó có thể tìm được ở khắp kinh thành Paris hai trăm người có tinh thần thù địch với chính phủ hơn những người tụ tập ở đây vào lúc 5 giờ chiều, trong một gian phòng dài, nền đất, bên trên một ngôi vườn như thế này.
>
> Một người trẻ tuổi nâng ly và giữ một con dao nhíp đã bật lưỡi trong cùng một tay cố gắng để mọi người nghe mình nói, đó là Evariste Galois, một trong số những người cộng hòa nhiệt thành nhất. Tiếng ồn ào như chợ vỡ khiến cho chính nguyên nhân của sự ồn ào đó cũng trở nên không sao hiểu nổi. Tất cả những gì tôi có thể cảm nhận được là có một sự đe dọa và cái tên Louis-Phillipe đã được nhắc tới: ý định này được thể hiện rõ bằng con dao đã được bật lưỡi.

> Điều này đã vượt ra ngoài khuôn khổ những quan điểm cộng hòa của riêng tôi. Tôi đành nhượng bộ áp lực của người láng giềng ngồi bên trái tôi, một trong số những anh hề của nhà vua, người không muốn liên lụy, chúng tôi bèn nhảy qua cửa sổ ra ngoài vườn. Tôi về nhà lòng vẫn gợn chút lo lắng. Hẳn rồi câu chuyện này sẽ có những hậu quả của nó. Thực vậy, hai hay ba ngày sau Galois đã bị bắt.

Sau khi bị giam ở nhà tù Sainte-Pélagie khoảng một tháng, Galois bị buộc tội đe dọa tính mạng nhà vua và đã được đem ra xét xử. Mặc dù từ những hành động của ông, chuyện ông phạm tội là điều ít ai có thể nghi ngờ, nhưng bản chất bốc đồng của một bữa tiệc đã làm cho không ai dám thực sự khẳng định là mình có nghe thấy Galois đưa ra lời đe dọa trực tiếp hay không. Một vị quan tòa có cảm tình và cũng vì tuổi của kẻ nổi loạn còn quá trẻ - ông vẫn đang ở tuổi hai mươi, đã khiến ông được trắng án. Nhưng một tháng sau ông lại bị bắt.

Trong lễ kỷ niệm ngày phá ngục Bastille, 14 tháng 7 năm 1931, Galois đi khắp Paris với bộ quân phục pháo binh của Vệ quốc quân đã bị giải tán. Mặc dù chẳng qua đây chỉ là một hành động khiêu khích, nhưng ông đã bị kết án 6 tháng tù giam và lại được giải về Sainte-Pélagie. Trong những tháng sau, chàng thanh niên vốn ghét rượu đã bị những kẻ thô tục xung quanh lôi kéo. Nhà thực vật học và cũng là một người cộng hòa nhiệt thành, Francois Raspail, người bị bắt giam vì tội từ chối không nhận huân chương Bắc đẩu bội tinh do vua Louis-Phillipe trao, đã viết về lần uống rượu đầu tiên của Galois như sau:

> Cậu ta cầm lấy chiếc ly nhỏ hệt như Socrates dũng cảm cầm lấy cây độc cầm; cậu ta tợp một ngụm, không khỏi không chớp mắt

> và nhăn mặt. Ly thứ hai xem chừng ít khó khăn hơn ly thứ nhất, và sau đó là ly thứ ba. Người mới tập uống đã loạng choạng mất thăng bằng. Chiến thắng rồi! Hoan hô thần Lưu linh ở các nhà tù! Người đã đầu độc một linh hồn trong trắng vốn rất ghét rượu chè.

Một tuần sau, một gã bắn tỉa từ một căn phòng áp mái đối diện đã nhằm bắn vào phòng giam và làm bị thương người nằm bên cạnh Galois. Ông đinh ninh rằng thực ra viên đạn đó là nhằm vào mình và đã có một âm mưu từ phía chính phủ nhằm ám sát ông. Nỗi sợ bị truy hại vì lý do chính trị đã khiến ông hoảng sợ, cộng với sự tách biệt với bạn bè và gia đình, cùng với những ý tưởng toán học bị từ chối đã dẫn ông đến trạng thái suy sụp hoàn toàn. Trong một cơn mê sảng do say, Galois đã định dùng dao tự sát, nhưng Raspail và những người khác đã giữ chặt được ông và tước lấy dao. Raspail vẫn còn nhớ rõ những lời tâm sự của Galois ngay trước khi định tự sát:

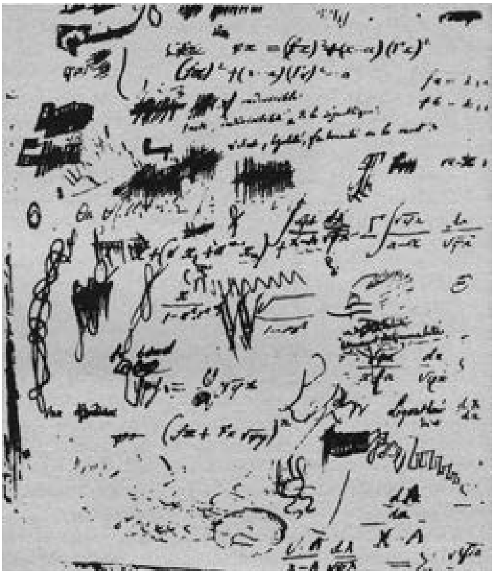
> "Cậu có biết mình đang thiếu điều gì không? Mình chỉ tâm sự với một mình cậu thôi đấy nhé: đó là một người mà mình có thể yêu và chỉ yêu trong tâm tưởng mà thôi. Mình đã mất đi người cha mà không ai có thể thay thế được, cậu có nghe mình không đấy...?"

Tháng 3 năm 1832, một tháng trước khi hết hạn tù của Galois, một nạn dịch tả bùng phát ở Paris và các tù nhân ở Sainte-Pélagie đều được thả. Điều gì đã xảy ra đối với Galois trong ít tuần tiếp theo hiện vẫn còn là đề tài của những cuộc tranh cãi hết sức gay gắt, nhưng có điều chắc chắn là những sự kiện trong thời gian này chủ yếu là hệ quả của một thiên tình sử với một người đàn bà bí ẩn có tên là Stéphanie-Félicie Poterine du Motel, con gái của một bác sĩ đáng kính ở Paris. Mặc dù không có manh mối gì về chuyện mối tình đó đã bắt đầu như thế nào, nhưng những chi tiết về sự kết thúc bi thảm của nó đã được ghi chép lại khá đầy đủ.

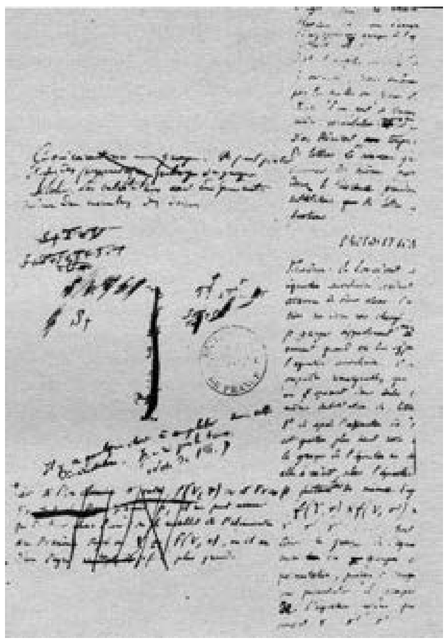
Stéphanie vốn đã hứa hôn với một người đàn ông tên là Pesheux d'Herbinville, người đã phát hiện ra vợ chưa cưới của mình không chung tình. Herbinville nổi giận, và vốn là một xạ thủ cừ khôi vào loại nhất nhì nước Pháp, ông ta đã không hề đắn đo, ngay lập tức thách Galois đấu súng vào một buổi bình minh. Galois thừa biết tiếng tăm của kẻ thách đấu. Trong buổi tối trước hôm ra đấu trường, Galois biết rõ rằng đây là cơ hội cuối cùng để ông giãi bày những ý nghĩ của mình trên trang giấy, ông đã viết thư cho bạn bè giải thích hoàn cảnh của mình:

> "Tôi đề nghị những người yêu nước, các bạn bè của tôi, đừng nên trách móc tôi vì đã chết không phải cho Tổ quốc. Tôi chết vì là nạn nhân của một mụ đàn bà bỉ ổi và hai cú lừa của nó. Tôi đã kết liễu cuộc đời mình trong một trò vu cáo khốn nạn. Trời ơi! Tại sao tôi phải chết vì một thứ vớ vẩn và ghê tởm thế này? Cầu Trời chứng giám cho là tôi phải chấp nhận sự khiêu khích chẳng qua chỉ là do sự thúc ép, một sự khiêu khích mà tôi đã cố gắng lảng tránh bằng mọi cách."

Mặc dù tận tâm với sự nghiệp của phái cộng hòa và mối tình lãng mạn kia, Galois vẫn luôn duy trì niềm đam mê của mình đối với toán học và một trong những mối lo sợ lớn nhất của ông là những công trình nghiên cứu đã bị Viện Hàn lâm từ chối có thể sẽ bị thất lạc vĩnh viễn. Trong một cố gắng tuyệt vọng để giành được sự công nhận, ông đã làm việc suốt đêm định mệnh đó để viết ra



Hình 22(a). Đêm trước ngày đấu súng, Galois đã cố gắng viết ra tất cả những ý tưởng toán học của mình. Tuy nhiên, trong đó cũng có nhiều luận giải khác nữa. Trên trang này, ở phần giữa phía dưới bên trái, có thể nhận ra mấy chữ "một mụ đàn bà" (Une femme) với chữ thứ hai đã bị gạch xóa, có lẽ ám chỉ người đàn bà là trung tâm của cuộc đấu súng này.



Hình 22(b). Mặc dù Galois đã cố gắng một cách tuyệt vọng ghi lại tất cả mọi điều trước giờ khắc định mệnh kia, nhưng ông đã không thể hoàn tất được nhiệm vụ đó. Có thể nhận ra mấy từ "Tôi không có thời gian" (je n'ai pas le temps) ở cuối dòng thứ hai trong phần dưới bên trái của trang.

các định lý mà ông tin là đã giải thích một cách đầy đủ câu đố về các phương trình bậc năm. Hình 22 cho thấy một số trang cuối cùng được viết bởi Galois. Đó chủ yếu là sự truyền đạt những ý tưởng mà ông đã gửi cho Cauchy và Fourier, nhưng xen kẽ trong những tính toán đại số phức tạp đó đôi khi là những chữ thảng thốt "Stéphanie" hay "một mụ đàn bà" và tiếng kêu tuyệt vọng - "Tôi không có thời gian, tôi không có thời gian!" Vào lúc tàn đêm, khi những tính toán của ông hoàn tất, ông đã viết một bức thư giải thích cho người bạn của mình tên là Auguste Chevalier yêu cầu nếu ông chết hãy chuyển những trang viết này cho những nhà toán học vĩ đại nhất châu Âu.

Bạn thân mến,

Tôi đã có một số phát minh mới trong giải tích. Phát minh đầu tiên có liên quan tới lý thuyết các phương trình bậc năm và những phát minh khác có liên quan tới các hàm tích phân.

Trong lý thuyết các phương trình, tôi đã nghiên cứu những điều kiện khả giải bằng căn thức; điều này đã cho phép tôi đào sâu lý thuyết này và mô tả tất cả những phép biến đổi khả dĩ trên một phương trình ngay cả khi nó không giải được bằng căn thức. Tất cả những điều đó đều tìm thấy ở đây trong ba tiểu luận...

Trong đời tôi, tôi thường mạnh dạn đưa ra những mệnh đề mà tôi chưa thật tin chắc lắm. Nhưng tất cả những gì tôi viết ra ở đây đều hết sức rõ ràng trong đầu tôi hơn một năm nay, vì lợi ích của mình, tôi không muốn để lại một mối nghi ngờ nào cho rằng tôi phát biểu các định lý mà lại không có một chứng minh hoàn chỉnh.

Hãy yêu cầu một cách công khai các ông Jacobi hoặc Gauss cho ý kiến của họ, không phải chuyện đúng hay sai, mà là về tầm quan *trọng của các định lý đó. Sau hết, tôi hy vọng một số người sẽ tìm thấy trong mớ lộn xộn này những điều hữu ích cho mình.*

E. Galois

Sáng hôm sau, ngày 30 tháng 5 năm 1832, trên một cánh đồng vắng vẻ, Galois và Herbinville súng trong tay, đứng đối diện và cách nhau 25 bước. Herbinville tới cùng với người làm chứng còn Galois chỉ có một mình. Ông không hề cho ai biết về cuộc đấu súng này: người báo tin mà ông nhờ nói với Alfred, anh trai của mình, chỉ được thông báo tin tức về cuộc đấu súng sau khi nó đã xảy ra, còn những bức thư mà ông gửi cho bạn bè thì phải vài ba ngày sau mới tới.

Hai khẩu súng đã được nâng lên và phát hỏa. Herbinville vẫn đứng trơ đó, nhưng Galois thì đã bị bắn trúng bụng. Ông nằm vật trên đất không ai giúp đỡ. Không có bác sĩ phẫu thuật kịp thời, còn kẻ chiến thắng thì bình thản bỏ đi, để lại đối thủ bị thương của mình nằm chờ chết. Vài giờ sau, Alfred lao tới hiện trường và đưa em mình tới bệnh viện Cochin. Nhưng đã quá muộn, màng bụng của ông đã bị viêm. Ngày hôm sau Galois qua đời.

Đám tang của Galois cũng bi hài gần như đám tang của cha ông. Cảnh sát tin rằng đây sẽ là tiêu điểm của một cuộc biểu tình chính trị, nên đêm trước đã cho bắt ngay ba mươi người bạn của ông. Tuy nhiên, hai ngàn người cộng hòa đã tập hợp để phục vụ đám tang và những cuộc đánh lộn không tránh khỏi đã nổ ra giữa các đồng nghiệp của Galois và những viên chức nhà nước tới để kiểm soát tình hình.

Những người đưa tang nổi giận vì niềm tin ngày một vững chắc rằng cái gã Herbinville chẳng phải là vị hôn phu hôn phiếc gì mà chỉ là nhân viên của cơ quan mật vụ và Stéphanie cũng chẳng là người yêu mà chỉ là một mụ đàn bà trong trò mỹ nhân kế mà thôi. Những sự kiện như vụ bắn lén Galois khi ông bị giam ở nhà tù Sainte-Pélagie đã khiến người ta nghĩ tới một âm mưu ám sát người gây rối trẻ tuổi này, và do đó những người bạn của ông rút ra kết luận rằng ông đã bị lừa vào câu chuyện tình này, một phần trong một âm mưu chính trị nhằm thủ tiêu ông. Các nhà lịch sử vẫn còn chưa nhất trí về chuyện cuộc đấu súng này là kết quả của một bi kịch tình yêu hay có động cơ chính trị, nhưng dẫu thế nào thì một trong số những nhà toán học vĩ đại nhất thế giới đã bị giết ở tuổi 20, khi mới nghiên cứu toán học chỉ vẻn vẹn được 5 năm.

Trước khi cho công bố các giấy tờ của Galois, anh ông và Auguste Chevalier đã viết lại để làm sáng tỏ hơn và giải thích thêm. Thói quen giải thích lướt qua và không đầy đủ những ý tưởng của mình chắc chắn sẽ còn trầm trọng thêm bởi một thực tế là ông chỉ có một đêm để tổng kết lại nhiều năm nghiên cứu của mình. Mặc dù họ đã làm đúng bổn phận là gửi các bản thảo của Galois cho Carl Gauss, Carl Jacobi và nhiều người khác, nhưng hơn mười năm sau công trình của Galois vẫn không được công nhận, cho tới khi bản thảo rơi vào tay Joseph Liouville vào năm 1846. Liouville đã nhận ra ngay chớp sáng thiên tài trong các tính toán của Galois và đã bỏ ra nhiều tháng để cố gắng giải thích hết ý nghĩa của nó. Cuối cùng, ông đã biên soạn lại và cho công bố trên tạp chí *Toán học Thuần túy và Ứng dụng* rất có uy tín của ông. Các nhà toán học đã hưởng ứng nhanh chóng và nhiệt thành bởi vì Galois đã thực sự xây dựng được một sự hiểu biết đầy đủ về việc giải các phương trình bậc 5.

Trước hết, Galois đã phân tất cả các phương trình này thành hai loại: giải được và không giải được (bằng căn thức!). Sau đó đối với loại phương trình giải được, ông đã chỉ ra phương cách để tìm nghiệm của chúng. Hơn thế nữa, ông còn xét cả những phương trình bậc cao hơn, có chứa x^6, x^7 v.v. và cũng đã nhận dạng được những phương trình nào là khả giải. Có thể nói đây là một trong số những tuyệt phẩm toán học của thế kỷ XIX được một trong số những nhân vật bi kịch nhất của nó sáng tạo ra.

Trong phần giới thiệu cho bài báo đó, Liouville đã nói rõ tại sao nhà toán học trẻ tuổi này đã bị các bậc đàn anh của mình từ chối và những nỗ lực của chính ông đã phục hồi lại cho Galois như thế nào:

> Một khát khao cô đọng thái quá chính là nguyên nhân của sự khiếm khuyết này, sự khiếm khuyết mà người ta cố hết sức để tránh khi phải bàn tới những vấn đề trừu tượng và bí ẩn của Đại số thuần túy. Thực tế, sự rõ ràng là cái còn cần thiết hơn nữa khi người ta muốn dẫn dắt người đọc đi ra xa những con đường đã trơn lì để đi vào những vùng đất còn hoang sơ hơn. Như Descartes đã nói: "Khi những vấn đề siêu việt được đưa ra bàn thảo thì nó cần phải rõ ràng một cách siêu việt...". Galois không để ý đến quy tắc này, và vì thế chúng ta có thể hiểu được tại sao những nhà toán học nổi tiếng đã xem mình có phận sự, bằng sự nghiêm khắc của những lời khuyên sáng suốt của mình, cố gắng đưa Galois thiên tài nhưng còn thiếu kinh nghiệm, trở về con đường đúng đắn. Tác giả mà họ phê bình gắt gao vẫn ở trước họ kia, đầy nhiệt huyết và năng động; lời khuyên của họ có thể sẽ rất có lợi cho anh ta.
>
> Nhưng bây giờ mọi chuyện đã thay đổi. Galois không còn nữa! Chúng ta không chạy theo sự phê phán vô ích làm gì nữa; hãy gạt những khiếm khuyết sang một bên và xem xét những phẩm giá...

> Sự nhiệt tình của tôi đã được ban thưởng, và tôi đã cảm thấy vô cùng sung sướng sau khi đã lấp đầy được một số khe hở nhỏ. Tôi đã nhận thấy sự đúng đắn hoàn toàn của phương pháp mà Galois đã sử dụng để chứng minh, đặc biệt là định lý tuyệt đẹp này.

Lật đổ quân đôminô đầu tiên

Trung tâm những tính toán của Galois là khái niệm *lý thuyết nhóm*, một ý tưởng mà ông đã phát triển thành một công cụ mạnh mẽ có khả năng phá vỡ những bài toán mà trước kia không giải được. Về mặt toán học, nhóm là một tập hợp các phần tử có thể tổ hợp với nhau bằng cách dùng một phép toán nào đó, chẳng hạn như phép cộng hoặc phép nhân và thỏa mãn một số điều kiện nhất định. Một tính chất quan trọng trong định nghĩa của nhóm là: khi hai phần tử của nhóm tổ hợp với nhau thông qua phép toán thì kết quả cũng phải là một phần tử khác của nhóm. Nhóm được gọi là đóng đối với phép toán đó.

Ví dụ, các số nguyên tạo thành một nhóm với phép toán là phép "cộng" thông thường. Sự tổ hợp một số nguyên với một số nguyên khác thông qua phép cộng sẽ dẫn tới một số nguyên thứ ba, ví dụ:

$$4 + 12 = 16$$

Tất cả các kết quả khả dĩ đối với phép cộng đều thuộc tập hợp các số nguyên, do đó các nhà toán học nói rằng *"tập hợp các số nguyên là đóng đối với phép cộng"* hay *"tập hợp các số nguyên tạo thành một nhóm đối với phép cộng"*. Trái lại, tập hợp các số nguyên không tạo thành một nhóm đối với phép chia, vì khi chia một số nguyên cho một số nguyên khác, không nhất thiết cho kết quả là một số nguyên, ví dụ:

$$4 \div 12 = \frac{1}{3}$$

Phân số 1/3 không là một số nguyên và ở ngoài tập hợp ban đầu. Tuy nhiên, khi xem xét một nhóm lớn hơn bao gồm cả các phân số, ví dụ như tập hợp các số hữu tỷ chẳng hạn, thì tính đóng của tập hợp đó đối với phép chia sẽ được phục hồi lại. Nói thế nhưng ta vẫn còn phải thận trọng bởi vì phép chia cho số 0 cho kết quả là vô cùng, điều thường dẫn tới những cơn ác mộng đối với các nhà toán học. Vì lý do đó cần phải phát biểu một cách chính xác hơn như sau: “các số hữu tỷ (trừ số 0) là *đóng* đối với phép chia”. Trong nhiều phương diện, *tính đóng* cũng tương tự như khái niệm đầy đủ mà ta đã mô tả trong các chương trước.

Các số nguyên và phân số tạo thành những nhóm lớn vô hạn, và người ta có thể nghĩ rằng nhóm càng lớn thì nó tạo ra những kết quả toán học càng lý thú. Tuy nhiên, Galois lại có một triết lý “ít lại hóa nhiều”, và ông đã chứng minh được rằng những nhóm nhỏ nhưng được xây dựng một cách công phu vẫn có thể bộc lộ sự giàu có đặc biệt riêng của nó. Thay vì dùng những nhóm vô hạn, Galois đã bắt đầu với một phương trình cụ thể và xây dựng một nhóm từ một số các nghiệm của phương trình đó. Chính nhóm tạo bởi các nghiệm của phương trình bậc 5 này đã cho phép Galois rút ra những kết quả của ông về các phương trình đó. Một thế kỷ rưỡi sau, Wiles đã dùng công trình của Galois làm nền tảng cho chứng minh giả thuyết Taniyama - Shimura của ông.

Để chứng minh giả thuyết Taniyama - Shimura, các nhà toán học cần phải chứng tỏ được rằng mỗi một phương trình eliptic trong tập hợp vô hạn của chúng phải kết đôi với một dạng modular. Ban đầu họ có ý định chứng minh rằng toàn bộ ADN của một phương trình eliptic (tức dãy -E) ăn khớp với toàn bộ ADN của một dạng modular (tức dãy -M), rồi sau đó họ lại chuyển sang một phương trình eliptic tiếp theo. Mặc dù đây là một cách tiếp cận hợp lý, nhưng không ai tìm được cách để lặp lại quá trình đó đối với một số vô hạn các phương trình eliptic và các dạng modular.

Wiles đã công phá bài toán đó theo một cách hoàn toàn khác. Thay vì cố gắng lập sự tương ứng của tất cả các phần tử của một dãy -E với một dãy -M, rồi sau đó chuyển sang những dãy -E và dãy -M tiếp theo, ông lại cố gắng lập sự tương ứng một phần tử của tất cả dãy -E và tất cả các dãy -M rồi sau đó chuyển sang phần tử tiếp theo. Nói một cách khác, mỗi dãy -E có một danh sách gồm một số vô hạn các phần tử, tựa như các gene riêng rẽ tạo nên ADN, và Wiles muốn chứng minh rằng gene thứ nhất trong từng dãy -E đều ăn khớp với gene thứ nhất trong từng dãy -M. Rồi sau đó ông sẽ tiến tới chứng minh rằng gene thứ hai trong từng dãy -E đều ăn khớp với gene thứ hai trong từng dãy -M, và cứ tiếp tục như vậy.

Trong cách tiếp cận truyền thống, người ta có một bài toán vô hạn, trong đó cho dù bạn có chứng minh được toàn bộ một dãy -E ăn khớp với toàn bộ một dãy -M đi nữa, thì vẫn còn vô số dãy -E và dãy -M khác cần được khớp với nhau. Cách tiếp cận của Wiles cũng vẫn còn phải giải quyết vấn đề vô hạn bởi vì ngay cả khi ông chứng minh được rằng gene đầu tiên của từng dãy -E là đồng nhất với gene đầu tiên của từng dãy -M đi nữa thì vẫn còn vô số các gene khác cần phải đối chiếu. Tuy nhiên, cách tiếp cận của Wiles có một ưu điểm hơn hẳn cách tiếp cận truyền thống.

Trong cách tiếp cận cũ, một khi bạn đã chứng minh được rằng toàn bộ một dãy -E đồng nhất với toàn bộ một dãy -M, bạn sẽ phải tự hỏi: mình phải thử đối chiếu cặp dãy -E và dãy -M nào tiếp theo đây? Tập hợp vô hạn các dãy -E và dãy -M không có một thứ tự tự nhiên nào và do đó cặp dãy -E và dãy -M nào sẽ được xét tiếp theo là sự lựa chọn khá tùy tiện. Điều quan trọng trong cách tiếp cận của Wiles là các gene trong dãy -E và dãy -M lại có một thứ tự tự nhiên, do đó sau khi đã chứng minh được rằng tất cả các gene đầu tiên đều ăn khớp với nhau (E_1=M_1), thì bước tiếp theo hiển nhiên sẽ là chứng minh sự ăn khớp của tất cả các gene thứ hai (E_2 = M_2) và cứ như thế mãi.

Thứ tự tự nhiên đó chính là cái mà Wiles cần để phát triển một chứng minh bằng quy nạp. Ban đầu, Wiles cần phải chứng minh được rằng phần tử đầu tiên của từng dãy -E cần phải kết đôi với phần tử đầu tiên của từng dãy -M. Sau đó ông cần phải chứng minh rằng nếu các phần tử đầu tiên đã được kết đôi thì các phần tử thứ hai cũng sẽ như thế, và nếu như các phần tử thứ hai đã được kết đôi thì các phần tử thứ ba cũng sẽ như thế, và cứ tiếp tục như vậy mãi. Điều này có nghĩa là ông cần phải lật đổ quân đôminô đầu tiên, và sau đó ông phải chứng minh được rằng bất kỳ một quân đôminô nào đổ cũng sẽ làm cho quân sau nó đổ theo.

Bước đầu tiên, Wiles đã đạt được khi ông nhận thấy sức mạnh của các nhóm Galois. Một số các nghiệm của mỗi phương trình eliptic có thể được dùng để tạo nên một nhóm. Sau nhiều tháng phân tích Wiles đã chứng minh được rằng nhóm này dẫn tới một kết luận không thể phủ nhận được: đó là phần tử đầu tiên của mỗi dãy -E đều thực sự kết đôi với phần tử đầu tiên của mỗi dãy -M.

Như vậy, nhờ Galois, Wiles đã lật đổ được quân đôminô đầu tiên. Bước tiếp theo của phép chứng minh quy nạp đòi hỏi ông phải chứng minh được rằng: nếu một phần tử tùy ý của các dãy -E đều ăn khớp với phần tử tương ứng trong các dãy -M, thì điều đó cũng đúng đối với phần tử tiếp theo.

Đạt được điều đó thôi đã mất đứt hai năm trời, trong khi đó không có một manh mối nào cho biết việc mở rộng chứng minh sẽ đòi hỏi phải kéo dài bao lâu. Wiles đã ý thức rất rõ nhiệm vụ ở phía trước: "Chắc bạn muốn hỏi làm thế nào tôi có thể dành một lượng thời gian không hạn định cho một bài toán mà có thể không giải được. Câu trả lời là tôi rất thích làm việc về bài toán đó và tôi đã bị nó ám ảnh. Tôi cũng rất thích đem trí thông minh của mình đối mặt với nó. Hơn nữa, tôi cũng biết rằng những vấn đề toán học mà tôi đang suy nghĩ cho dù chưa đủ sức mạnh để chứng minh giả thuyết Taniyama - Shimura, cả định lý Fermat nữa, nhưng cũng có thể chứng minh được một điều gì đó... Có thể là tôi sẽ không bao giờ giải được bài toán Fermat, nhưng ít ra tôi cũng không tiêu phí thời gian một cách vô ích".

"Định lý Fermat đã được chứng minh?"

Mặc dù đây mới chỉ là bước đầu tiên trên con đường tiến tới chứng minh giả thuyết Taniyama - Shimura, nhưng chiến lược Galois của Wiles đã là một đột phá toán học xuất sắc, xứng đáng được công bố. Nhưng do sự biệt lập tự áp đặt cho mình, ông không thể thông báo kết quả cho phần còn lại của thế giới, đồng thời ông cũng không có một thông tin gì về chuyện còn có ai đó có thể làm được những đột phá có ý nghĩa như thế hay không.

Wiles nhớ lại thái độ đầy tính triết học của ông đối với những đối thủ tiềm tàng của mình: "Đúng là không ai muốn sau khi đã bỏ ra hàng năm để thử giải quyết một vấn đề nhưng bỗng nhiên họ lại phát hiện ra rằng công trình của mình vừa được tuyên bố chỉ ít tuần trước. Nhưng bởi vì tôi đang thử giải một bài toán được xem là không thể giải được, nên tôi thực sự không lo ngại nhiều lắm về sự cạnh tranh. Tôi không nghĩ rằng bản thân tôi hay một ai khác đã có một ý tưởng về việc giải bài toán này như thế nào."

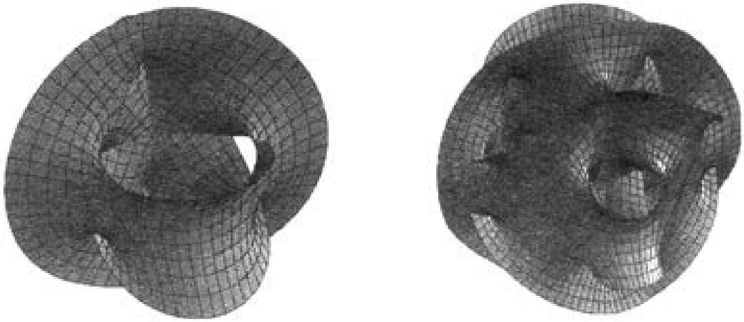
Ngày 8 tháng 3 năm 1988, Wiles đã choáng váng khi đọc thấy những hàng tít lớn trên trang nhất các báo thông báo rằng Định lý cuối cùng của Fermat đã được chứng minh. Tờ Washington Post và tờ New York Times đã tuyên bố rằng một người Nhật tên là Yoichi Miyaoka, 38 tuổi, thuộc trường Đại học Metropolitan Tokyo đã tìm được lời giải cho bài toán hóc búa nhất thế giới. Vào thời điểm đó Miyaoka còn chưa công bố chứng minh của mình, mà mới chỉ mô tả những đường nét chính của nó trong một seminar toán học tại Viện Max Planck ở Bonne. Don Zagier, người đã có mặt trong seminar, tóm tắt sự lạc quan của mọi người ở đó như sau: "Chứng minh của Miyaoka đã gây ấn tượng mạnh, nhiều người cảm thấy rằng có rất nhiều cơ may là nó sẽ đúng. Chứng minh của Miyaoka còn chưa hoàn tất, nhưng cho đến thời điểm này thì có vẻ rất tốt."

Tại Bonne, Miyaoka đã mô tả cách thức mà ông đã tiếp cận bài toán từ một góc độ hoàn toàn mới - hình học vi phân như thế nào. Trong hàng chục năm, các nhà hình học vi phân đã phát triển được những hiểu biết rất phong phú về các hình dạng toán học và đặc biệt là tính chất các bề mặt của chúng. Sau đó, vào những năm 1970, một nhóm các nhà toán học Nga, đứng đầu là giáo sư S. Arakelov, có ý định rút ra những điểm song song giữa các bài toán trong hình học vi phân và những bài toán trong lý thuyết số. Đó là một khía cạnh trong chương trình Langlands, và người ta hy vọng rằng những bài toán còn chưa giải được trong lý thuyết số có thể sẽ được giải bằng cách xem xét những vấn đề tương ứng trong hình học vi phân, được gọi là *triết lý song song*.

Những nhà hình học vi phân có tham vọng giải quyết những bài toán trong lý thuyết số giờ đây được gọi là các nhà hình học đại số số học, và năm 1983 họ đã tuyên bố chiến công đầu tiên của họ, khi Gerd Faltings thuộc Viện nghiên cứu cao cấp ở Princeton đã có một đóng góp quan trọng cho sự tìm hiểu Định lý cuối cùng của Fermat. Cần nhớ rằng Fermat đã khẳng định phương trình:

$x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên với $n > 2$.

Faltings tin rằng ông có thể đạt được những tiến bộ trên con đường đi tới chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat bằng cách nghiên cứu những hình dạng hình học tương ứng với các giá trị khác nhau của n. Những hình dạng tương ứng với mỗi một phương trình là rất khác nhau, nhưng có một điểm chung là tất cả chúng đều có những lỗ hổng. Những hình dạng này là 4 chiều, khá giống với các dạng modular, và hình ảnh 2 chiều của hai trong số đó được minh họa trên hình 23. Tất cả các hình dạng đều giống những chiếc xăm xe đạp nhiều chiều với số lỗ thường nhiều hơn 1. Giá trị của n trong phương trình càng lớn thì số lỗ có trong hình dạng tương ứng càng nhiều.



Hình 23. Những mặt này được tạo ra trên máy tính nhờ phần mềm Mathematica. Chúng là những biểu diễn hình học của phương trình $x^n + y^n$, trong đó n = 3 đối với hình bên trái và n =5 đối với hình bên phải, x và y được xem như những số phức.

Faltings đã có thể chứng minh được rằng do những hình dạng này luôn có hơn một lỗ nên phương trình Fermat tương ứng với nó có thể chỉ có một số hữu hạn các nghiệm nguyên. Mà một số hữu hạn các nghiệm thì có thể là 0, như Fermat đã khẳng định, nhưng cũng có thể là 1 triệu hoặc 1 tỷ. Như vậy, mặc dù chưa chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat, nhưng ít nhất thì Faltings cũng đã loại bỏ được khả năng có vô số nghiệm.

Năm năm sau, Miyaoka tuyên bố rằng ông đã tiến thêm được một bước nữa. Vừa bước vào tuổi hai mươi, Miyaoka đã phát minh ra một giả thuyết liên quan đến bất đẳng thức Miyaoka. Nghĩa là việc chứng minh được giả thuyết hình học của riêng ông cũng tức là sẽ chứng minh được số nghiệm của phương trình Fermat không chỉ hữu hạn mà còn bằng 0. Cách tiếp cận của Miyaoka tương tự với cách của Wiles ở chỗ cả hai đều cố gắng chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat bằng cách kết nối nó với một giả thuyết cơ bản trong một lĩnh vực toán học khác. Trong trường hợp của Miyaoka, đó là hình học vi phân; còn đối với Wiles, việc chứng minh thông qua các phương trình eliptic và các dạng modular. Thật không may đối với Wiles, trong khi ông còn đang vật lộn để chứng minh giả thuyết Taniyama - Shimura thì Miyaoka đã công bố một chứng minh đầy đủ liên quan đến chính giả thuyết của ông ta, nghĩa là Định lý cuối cùng của Fermat đã được chứng minh.

Hai tuần sau công bố của Miyaoka ở Bonne, Miyaoka đã tung ra 5 trang tính toán đại số trình bày chi tiết chứng minh của ông, sự săm soi bắt đầu. Các nhà lý thuyết số và các nhà hình học vi phân trên khắp thế giới đã kiểm tra từng dòng một, dò tìm từng khe hở logic nhỏ nhặt nhất hoặc là một manh mối đơn giản nhất về một giả thiết sai lầm nào đó. Chỉ trong ít ngày, một số nhà toán học đã tìm ra mâu thuẫn trong chứng minh. Công trình của Miyaoka đã dẫn tới một kết luận trong lý thuyết số nhưng khi được dịch sang hình học vi phân thì nó lại mâu thuẫn với một kết quả đã được chứng minh từ nhiều năm trước. Mặc dù điều này không làm hỏng toàn bộ chứng minh của Miyaoka, nhưng nó đã xung đột với triết lý song song giữa lý thuyết số và hình học vi phân.

Hai tuần nữa lại trôi qua và Faltings, người đã lát đường cho Miyaoka, thông báo rằng ông đã tìm ra nguyên nhân chính xác của việc tưởng như tan vỡ của triết lý song song - đó là một khe hở trong logic. Nhà toán học Nhật Bản vốn thiên về hình học, nên ông không tuyệt đối chính xác khi dịch những ý tưởng của mình sang một lĩnh vực khác ít quen thuộc hơn, đó là lý thuyết số. Một đội quân những nhà lý thuyết số đã lao vào định giúp Miyaoka sửa lại sai sót của mình, nhưng những nỗ lực của họ đều dẫn đến thất bại.

Hai tháng sau công bố ban đầu, mọi người có cảm giác là chứng minh gốc của Miyaoka đã thất bại.

Cũng như một số chứng minh khác đã thất bại trong quá khứ, chứng minh của Miyaoka đã cho nhiều kết quả toán học mới và lý thú. Một số đoạn riêng rẽ trong chứng minh của ông vẫn được công nhận và được xem là những ứng dụng của hình học vi phân trong lý thuyết số; và nhiều năm sau, dựa trên những kết quả đó, các nhà toán học đã chứng minh được những định lý khác, nhưng không phải là Định lý cuối cùng của Fermat.

Sự xôn xao quanh Fermat cuối cùng cũng lắng xuống và báo chí cũng đã kịp thời cải chính rằng câu đố tồn tại đã hơn ba trăm năm vẫn còn đó chưa giải quyết được. Chắc chắn dòng chữ sau được viết nguệch ngoạc trên tường của ga tàu điện ngầm ở Phố thứ 8 của New York đã được cảm hứng bởi sự kiện này:

> $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm
> Tôi đã tìm ra một chứng minh thực sự tuyệt vời cho điều đó, nhưng không thể viết ra đây vì tàu của tôi đã tới.

Lâu đài tăm tối

Wiles lặng lẽ thở phào nhẹ nhõm, điều mà trên thế giới không ai biết được. Định lý cuối cùng của Fermat rốt cuộc vẫn chưa bị chinh phục và ông vẫn có thể tiếp tục cuộc hành trình để chứng minh nó thông qua giả thuyết Taniyama - Shimura. "Đa số thời gian tôi ngồi viết bên bàn, nhưng đôi khi tôi đã có thể quy giản bài toán về một điều gì đó rất cụ thể - có một manh mối, một điều gì đó khiến tôi thấy rất lạ, một điều gì đó tưởng như nằm ngay phía dưới trang giấy mà tôi không sao có thể tóm được nó. Khi có một điều đặc biệt luẩn quẩn trong đầu, chẳng cần đến giấy bút hoặc bàn làm việc, tôi thường đi dạo xung quanh hồ. Đi dạo như thế tôi thấy mình có thể tập trung cao độ trí tuệ cho một khía cạnh hết sức cụ thể nào đó của bài toán. Tôi bao giờ cũng mang theo giấy và bút bên mình, và như vậy, nếu có nảy ra một ý tưởng tôi có thể ngồi xuống ghế đá và ghi chép ngay lại".

Sau ba năm nỗ lực không ngơi nghỉ, Wiles đã có được một loạt các đột phá. Ông đã áp dụng các nhóm Galois cho các phương trình eliptic, ông đã phá vỡ các phương trình này thành vô số mảnh, và sau đó đã chứng minh được rằng mảnh đầu tiên của mọi phương trình eliptic đều phải là modular. Vậy là ông đã lật đổ được quân đôminô đầu tiên, và giờ đây ông phải khám phá ra những kỹ thuật có thể dẫn tới sự sụp đổ của tất cả các quân khác. Sau này nhìn lại thì đây dường như là con đường tự nhiên dẫn tới chứng minh, nhưng để dấn bước trên con đường đó đòi hỏi phải có một quyết tâm sắt đá để vượt qua những thời kỳ mất tự tin vào chính bản thân mình. Wiles đã mô tả những trải nghiệm trong cuộc đời làm toán của mình như là sự khám phá một lâu đài xa lạ chìm trong bóng tối. "Bạn bước vào phòng đầu tiên của lâu đài, một căn phòng tối như hũ nút. Bạn dò dẫm từng bước, vấp vào đủ thứ đồ đạc trong phòng, nhưng rồi dần dần bạn cũng biết được từng đồ vật nằm ở đâu. Cuối cùng, sau sáu tháng hoặc hơn thế, bạn mới tìm ra công tắc đèn, bạn bật lên và bất chợt mọi thứ đều được chiếu sáng. Bây giờ thì bạn biết chính xác bạn đang ở đâu. Sau đó bạn sẽ chuyển sang căn phòng tiếp theo và cũng mất khoảng năm, sáu tháng mò mẫm trong bóng tối như thế. *Như vậy, mỗi một đột phá, đôi khi xảy ra* *tức thời, nhưng đôi khi cũng phải mất một hay hai ngày, nhưng thực ra chúng đều là sự tích tụ và không thể tồn tại nếu không có những tháng dài mò mẫm trong bóng tối trước đó".*

Năm 1990, Wiles có cảm giác như mình đang ở trong một căn phòng tăm tối nhất. Ông đã khám phá nó được gần hai năm, nhưng không có cách nào chứng minh được rằng nếu một mẩu của phương trình eliptic là modular thì mẩu tiếp theo cũng phải là modular. Ông đã thử dùng mọi công cụ và kỹ thuật đã được công bố trên sách báo, nhưng thấy rằng tất cả chúng đều chưa đủ. "Tôi thực sự tin rằng tôi đã đi đúng hướng, nhưng điều đó không có nghĩa là tôi nhất thiết sẽ đạt được mục đích. Rất có thể những phương pháp cần thiết để giải bài toán này còn là điều bí ẩn đối với toán học hiện tại. Có thể một trăm năm nữa những phương pháp mà tôi cần để hoàn chỉnh chứng minh cũng còn chưa được phát minh ra. Vì vậy, ngay cả khi tôi đã đi đúng hướng, tôi vẫn có thể rơi vào cảnh sống nhầm thế kỷ".

Không hề chán nản, Wiles kiên trì thêm một năm nữa. Ông bắt đầu làm việc theo hướng của lý thuyết Iwasawa. Lý thuyết này là một phương pháp phân tích các phương trình eliptic mà ông đã học được từ hồi còn là nghiên cứu sinh dưới sự hướng dẫn của John Coates. Mặc dù phương pháp hiện nay còn chưa đủ hiệu năng, nhưng ông hy vọng rằng có thể cải tiến và làm cho nó có đủ sức mạnh để tạo ra hiệu ứng đôminô.

Kể từ khi làm được cú đột phá đầu tiên nhờ các nhóm Galois, Wiles ngày càng cảm thấy vỡ mộng. Bất cứ khi nào áp lực trở nên quá lớn, ông lại quay trở về với gia đình. Từ ngày bắt đầu làm việc về Định lý cuối cùng của Fermat, tức là từ năm 1986, ông đã hai lần làm cha. "Cách duy nhất để tôi có thể nghỉ ngơi là ở bên cạnh các con tôi. Bọn trẻ chẳng quan tâm gì tới Fermat, chúng chỉ muốn nghe kể chuyện và chúng không muốn để cho bạn làm bất cứ điều gì khác".

Phương pháp Kolyvagin-Flach

Vào mùa hè năm 1991, Wiles cảm thấy thất bại trong việc cải tiến lý thuyết Iwasawa. Ông cần phải chứng minh mọi quân đôminô, nếu nó đã tự đổ thì sẽ làm đổ quân đôminô tiếp theo - điều này có nghĩa là nếu một phần tử trong các dãy -E của các phương trình eliptic ăn khớp với một phần tử trong các dãy -M của các dạng modular, thì phần tử tiếp sau cũng sẽ phải như thế. Ông đã tin chắc rằng điều đó là đúng đối với mọi phương trình eliptic và mọi dạng modular. Lý thuyết Iwasawa không mang lại cho ông sự đảm bảo mà ông tìm kiếm. Ông đã tiến hành một cuộc săn tìm rộng khắp trên các trang sách báo nhưng vẫn không tìm được một kỹ thuật thay thế ngõ hầu có thể giúp ông thực hiện một cú đột phá mà ông cần. Sau khi đã thực sự làm việc biệt lập ở Princeton trong suốt 5 năm ròng, giờ đây ông quyết định quay trở lại cuộc sống xã hội để có thể nắm bắt được những thông tin mới nhất về toán học. Biết đâu ở nơi nào đó đã có người tìm ra một kỹ thuật mới mà vì một nguyên nhân này hay khác còn chưa cho công bố. Wiles cũng đã tới Boston để dự một cuộc hội nghị lớn về các phương trình eliptic, nơi mà ông chắc rằng sẽ được gặp những gương mặt nổi tiếng trong lĩnh vực này.

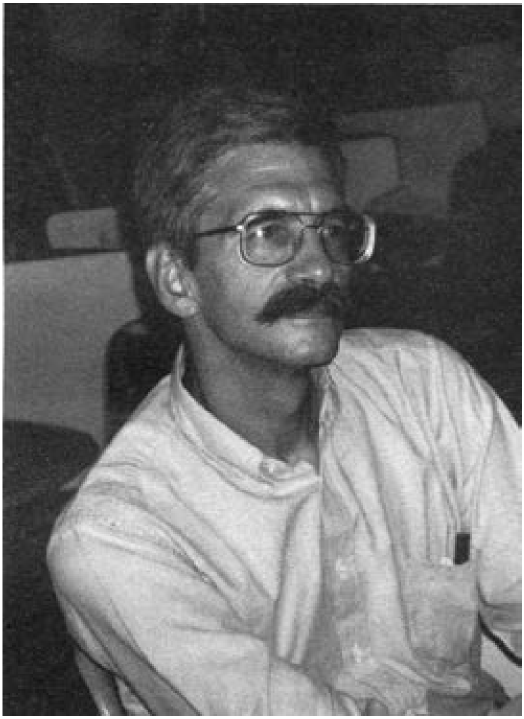
Wiles đã được các đồng nghiệp trên khắp thế giới chào đón nồng nhiệt. Họ rất vui mừng được gặp lại ông sau một thời gian dài ông vắng mặt trong hầu hết các hội nghị. Họ vẫn không hề biết gì về những vấn đề mà ông đang nghiên cứu và Wiles cũng rất thận trọng không để lộ ra một chút manh mối nào. Họ không một chút nghi ngờ gì về động cơ sâu kín của Wiles khi ông hỏi họ về những thông tin mới nhất có liên quan đến các phương trình eliptic. Ban đầu những câu trả lời không mang lại cho ông điều gì đáng quan tâm, nhưng cuộc gặp gỡ với người thầy cũ của mình là giáo sư John Coates đã có kết quả hơn: "Coates có nhắc với tôi rằng một nghiên cứu sinh của ông là Matheus Flach đang viết một bài báo rất hay trong đó có phân tích về các phương trình eliptic. Flach dựa trên một phương pháp mới do Kolyvagin đề xuất và có vẻ như phương pháp của anh ta đã "dọn đường" sẵn cho vấn đề của tôi. Dường như đó chính là cái mà tôi đang cần, mặc dù tôi biết rằng sẽ còn phải phát triển thêm nữa phương pháp Kolyvagin-Flach đó. Tôi đã vứt bỏ hoàn toàn cách tiếp cận cũ của tôi và dành nhiều ngày đêm để mở rộng phương pháp Kolyvagin-Flach."

Theo lý thuyết thì phương pháp mới này có thể mở rộng những suy luận của Wiles từ mảnh đầu tiên của phương trình eliptic cho đến tất cả các mảnh của phương trình đó và về tiềm năng nó có thể thực hiện cho mọi phương trình eliptic. Giáo sư Kolyvagin đã tạo ra được một phương pháp toán học cực kỳ mạnh, và Matheus Flach đã cải tiến để làm cho nó còn mạnh hơn nữa. Cả hai người đều không hay biết rằng Wiles có ý định gộp công trình của họ vào một chứng minh quan trọng nhất của thế giới.

Wiles trở lại Princeton và dành hẳn vài tháng để làm quen với kỹ thuật mà ông mới vừa phát hiện, rồi sau đó bắt tay vào một nhiệm vụ khổng lồ là áp dụng và thực hiện nó. Chẳng bao lâu sau, đối với một phương trình eliptic cụ thể, ông đã thực hiện được phép chứng minh quy nạp của mình, cụ thể là ông đã lật đổ được tất cả các quân đôminô. Thật không may, phương pháp Kolyvagin-Flach đúng đối với một phương trình eliptic cụ thể nhưng lại không đúng đối với các phương trình eliptic khác. Cuối cùng Wiles đã nhận thấy rằng các phương trình eliptic có thể phân loại thành những họ khác nhau. Một khi đã được sửa đổi để đúng với một phương trình eliptic, phương pháp này cũng sẽ đúng dối với các phương trình khác trong cùng một họ. Thách thức đặt ra ở đây là phải cải tiến thế nào để cho nó luôn đúng đối với tất cả các họ. Mặc dù có một số họ là khó *chinh phục* hơn các họ khác, nhưng Wiles tin rằng ông sẽ tìm được cách *chinh phục* từng họ một.

Sau sáu năm nỗ lực, Wiles tin rằng mình đã nhìn thấy đích. Tuần nào ông cũng tiến bộ hơn. Ông đã chứng minh được rằng những họ đường cong eliptic mới và lớn hơn đều phải là modular, và việc ông chinh phục được những phương trình eliptic còn lại chỉ là vấn đề thời gian. Trong giai đoạn chứng minh cuối cùng này, Wiles bắt đầu nhận ra rằng toàn bộ chứng minh của ông dựa trên việc khai thác một kỹ thuật mà ông mới chỉ biết ít tuần trước đó. Vì vậy ông bắt đầu băn khoăn tự hỏi liệu mình dùng phương pháp Kolyvagin-Flach đã hoàn toàn chặt chẽ hay chưa.

"Trong năm đó tôi đã làm việc cực kỳ căng thẳng cố để làm cho phương pháp Kolyvagin-Flach vận hành được, nhưng phương pháp này lại liên quan đến cả một bộ máy rất tinh xảo mà tôi chưa thực sự thông thạo lắm. Có rất nhiều vấn đề đại số rất khó, đòi hỏi tôi phải học thêm nhiều kiến thức toán học mới. Sau đó, vào khoảng đầu tháng Giêng năm 1993, tôi quyết định phải tiết lộ với



Nick Katz

một ai đó là chuyên gia của những kỹ thuật hình học mà tôi đang sử dụng. Tôi muốn chọn một cách cẩn thận người mà tôi sẽ tiết lộ bởi vì người đó phải giữ bí mật mọi chuyện. Và tôi đã chọn sẽ nói với Nick Katz".

Giáo sư Katz cũng làm việc ở Khoa toán trường Đại học Princeton và quen biết Wiles đã vài năm. Mặc dù ở ngay cạnh nhau nhưng Katz hoàn toàn không biết những gì đang diễn ra ở ngay cuối hành lang. Ông vẫn còn nhớ kỹ từng chi tiết của thời điểm mà Wiles hé mở với ông về bí mật của mình: "Một hôm, Andrew tới gặp tôi ở phòng uống trà và hỏi tôi có thể về phòng làm việc của anh ấy được không, vì có điều gì đó muốn nói với tôi. Tôi hoàn toàn không hiểu là có chuyện gì. Tới phòng, Andrew khép chặt cửa lại. Anh nói rằng anh nghĩ là mình sẽ chứng minh được giả thuyết Taniyama - Shimura. Tôi sững sờ vì xem đó là chuyện viễn tưởng.

Andrew giải thích rằng phần lớn chứng minh của anh đều dựa trên sự mở rộng các công trình của Flach và Kolyvagin, nhưng nó quá phức tạp về mặt kỹ thuật. Anh cảm thấy chưa thật vững tin lắm vào phần kỹ thuật quá cao cấp này của chứng minh và muốn cùng ai đó kiểm tra lại một cách thật kỹ lưỡng, anh muốn chắc chắn rằng tất cả đều phải đúng. Anh nghĩ tôi chính là người có thể giúp anh thực hiện việc kiểm tra đó, nhưng tôi nghĩ còn có một lý do khác để anh đề nghị đích danh tôi. Anh ấy tin chắc rằng tôi là người biết giữ mồm giữ miệng và sẽ không nói cho bất cứ ai biết về chứng minh đó".

Vậy là sau sáu năm làm việc độc lập hoàn toàn, Wiles đã đành phải tiết lộ bí mật của mình. Bây giờ công việc của Katz là phải đào bới trong cả núi những tính toán đồ sộ dựa trên phương pháp Kolyvagin-Flach. Thực sự tất cả những điều mà Wiles đã làm được đều có tính cách mạng và Katz đã phải suy nghĩ rất lâu để tìm cách kiểm tra tốt nhất: "Cái mà Andrew cần phải giải thích là rất lớn và dài, do vậy không thể thông qua những cuộc nói chuyện không chính thức trong phòng làm việc của anh ấy được. Đối với một cái gì đó lớn lao như vậy cần phải có một chuyên đề giảng dạy chính thức, có lịch làm việc hẳn hoi mỗi tuần, nếu không mọi chuyện sẽ không thể thành công được. Điều này giải thích tại sao chúng tôi đã quyết định lập một lớp chuyên đề".

Như vậy là họ đã quyết định rằng chiến lược tốt nhất là thông báo mở một lớp chuyên đề cho các nghiên cứu sinh trong Khoa. Wiles sẽ giảng và Katz ngồi nghe chung với sinh viên. Lớp chuyên đề thực chất sẽ đề cập tới phần chứng minh cần phải kiểm tra, nhưng các sinh viên tới nghe sẽ không biết gì về chuyện đó. Cách ngụy trang như thế buộc Wiles phải giải thích tất cả từng bước một mà không gây một chút nghi ngờ nào trong Khoa. Nếu có ai đó quan tâm thì nó hoàn toàn giống như những lớp chuyên đề khác dành cho các lớp nghiên cứu sinh.

"Thế là Wiles cho thông báo về lớp chuyên đề có tên là Những tính toán về các đường cong eliptic", - Katz mỉm cười nhớ lại, - "một cái tên rất chung chung, hiểu thế nào cũng được. Anh không hề nhắc tới Fermat và cũng chẳng nhắc tới Taniyama - Shimura, mà lao ngay vào làm những tính toán mang tính chất rất kỹ thuật. Hoàn toàn không ai có thể đoán được ra anh thực sự đang làm cái gì. Mà một khi bạn đã không biết toán học ở đây dùng để làm gì, thì sẽ không thể theo dõi được. Thực ra, ngay cả khi biết nó dùng để làm gì thì việc theo dõi cũng đã không dễ dàng rồi. Dầu sao thì các nghiên cứu sinh cũng lần lượt bỏ học dần và ít tuần sau tôi là người duy nhất còn lại".

Katz ngồi trong giảng đường và lắng nghe chăm chú từng bước trong các tính toán của Wiles. Kết thúc, ông đã xác nhận rằng phương pháp Kolyvagin-Flach dường như đã *vận hành tốt.* Đến khi đó không một ai trong Khoa biết được điều gì đang diễn ra. Cũng không một ai ngờ rằng Wiles đã sắp sửa ẵm cái giải thưởng quan trọng nhất của toán học. Vậy là kế hoạch của họ đã thành công.

Sau khi kết thúc lớp chuyên đề, Wiles tập trung tất cả sức lực để hoàn tất chứng minh. Ông đã áp dụng thành công phương pháp của Kolyvagin-Flach cho hết họ này đến họ khác của các phương trình eliptic và ở giai đoạn này chỉ còn một họ duy nhất không chịu đầu hàng trước kỹ thuật đó. Wiles mô tả ông đã nỗ lực hoàn tất yếu tố cuối cùng của chứng minh như thế nào: "Một buổi sáng vào cuối tháng 5, Nada đã đi ra ngoài cùng với bọn trẻ, tôi ngồi một mình bên bàn làm việc và suy nghĩ về họ còn lại cuối cùng của các phương trình eliptic. Tôi tình cờ nhìn bài báo của Barry Mazur và có một câu thu hút ngay sự chú ý của tôi. Nó nhắc tới một cấu trúc của thế kỷ XIX, và tôi bất ngờ nhận ra rằng tôi có thể dùng nó để làm cho phương pháp Kolyvagin-Flach có hiệu lực đối với cả họ phương trình eliptic cuối cùng này. Tôi làm việc luôn tới chiều, quên khuấy cả ăn trưa, và tới khoảng 3 hay 4 giờ chiều, tôi đã thực sự tin rằng mình đã giải quyết được vấn đề cuối cùng còn lại. Tới giờ uống trà buổi chiều, tôi mới từ trên gác đi xuống và Nada rất ngạc nhiên thấy tôi xuống muộn như vậy. Khi đó tôi nói với nàng: 'Anh đã chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat'."

Bản báo cáo của thế kỷ

Sau bảy năm nỗ lực một cách đơn độc, Wiles đã hoàn thành việc chứng minh giả thuyết Taniyama - Shimura. Và như một hệ quả, sau ba mươi năm mơ ước ông cũng đã chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat. Và giờ đây đã đến lúc phải thông báo với phần còn lại của thế giới.

“Vậy là vào tháng 5 năm 1993, tôi tin chắc rằng mình đã có trọn vẹn Định lý cuối cùng của Fermat trong tay”, Wiles nhớ lại. “Tôi vẫn còn muốn kiểm tra lại chứng minh thêm một chút nữa, nhưng lại có hội nghị sắp tổ chức vào cuối tháng 6 ở Cambridge, và tôi nghĩ rằng đây sẽ là nơi tuyệt vời để công bố chứng minh của mình, vì đó là thành phố quê hương tôi và tôi cũng đã từng làm nghiên cứu sinh ở đây”.

Hội nghị được tổ chức ở Viện Isaac Newton. Lần này Viện có ý định tổ chức một hội thảo về lý thuyết số với một cái tên rất chung chung “Các hàm -L và số học”. Một trong số những người tổ chức hội nghị này chính là giáo sư John Coates, người hướng dẫn luận án tiến sĩ của Wiles. “Chúng tôi mời về đây những người trên khắp thế giới có làm việc về những vấn đề này và, tất nhiên, Andrew cũng thuộc số những người mà chúng tôi đã mời. Chúng tôi dự định một tuần tập trung liên tục cho các báo cáo, ban đầu do có nhiều yêu cầu được đọc báo cáo, chúng tôi chỉ dành được cho Andrew hai “suất”. Nhưng sau đó tôi thấy rằng anh ấy phải cần tới ba, nên tôi đã thu xếp nhường lại suất của tôi cho báo cáo thứ ba của anh. Tôi biết rằng Andrew có một kết quả lớn cần được thông báo, nhưng chính tôi cũng không biết thực sự là cái gì”.

Khi Wiles tới Cambridge, thì còn những hai tuần rưỡi nữa ông mới phải báo cáo, vì vậy ông muốn tận dụng hết cơ hội: “Tôi quyết định sẽ kiểm tra lại chứng minh một lần nữa cùng với một hoặc hai chuyên gia, đặc biệt là phần dựa trên phương pháp Kolyvagin-Flach. Người đầu tiên tôi đã đề nghị là Barry Mazur. Tôi nghĩ là tôi đã nói với anh ấy thế này: “Tôi có mang theo đây bản thảo chứng minh một định lý”. Anh ấy nhìn vẻ rất bối rối, tôi bèn nói ngay: "Đây, anh hãy cứ ngó thử xem". Tôi nghĩ anh ấy cần có thời gian để trấn tĩnh. Anh ấy vẫn còn chưa hết ngạc nhiên. Dù sao tôi cũng nói cho anh ấy biết rằng tôi cũng đã có ý định trình bày về chứng minh đó trước hội nghị và tôi rất muốn anh ấy kiểm tra lại công trình của tôi".

Những gương mặt xuất sắc nhất trong lĩnh vực lý thuyết số đã lần lượt có mặt ở Viện Newton, kể cả Ken Ribet, là người mà những tính toán của ông vào năm 1986 đã khích lệ Wiles dấn thân vào cuộc lưu đày cô đơn trong suốt bảy năm. "Tôi tới hội nghị này chủ yếu vì các hàm -L và các đường cong eliptic. Mọi chuyện dường như chẳng có gì khác thường cho tới khi người ta bắt đầu nói với tôi rằng họ có nghe thấy những tin đồn rất lạ lùng về một loạt báo cáo sẽ được Wiles trình bày tại hội nghị. Tin đồn là anh ấy đã chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat, nhưng tôi cho rằng đó là chuyện hoàn toàn vớ vẩn. Tôi nghĩ rằng không thể có chuyện như vậy được. Có nhiều trường hợp tin đồn lan truyền trong giới toán học, đặc biệt là qua thư điện tử, nhưng kinh nghiệm cho thấy bạn không nên đặt quá nhiều kỳ vọng vào đó. Nhưng lần này tin đồn rất dai dẳng và Andrew từ chối trả lời mọi câu hỏi về chuyện này, đã thế anh ấy xử sự lại rất chi là lạ lùng. John Coates nói với Wiles: "Andrew, cậu đã chứng minh được điều gì đó, phải không? Tôi có phải mời báo chí không đấy?" Andrew chỉ hiền lành lắc đầu cứ như là mồm anh ấy đã bị gắn xi. Đúng là anh ấy đang chuẩn bị cho một vở diễn lớn."

"Sau đó, vào một buổi chiều, Andrew tới gặp tôi và bắt đầu hỏi tôi những gì mà tôi đã làm vào năm 1986 và một chút lịch sử về những ý tưởng của Frey. Tôi nghĩ bụng, điều này thật khó tin, nhưng chắc là anh ta đã chứng minh được giả thuyết Taniyama - Shimura và Định lý cuối cùng của Fermat, nếu không anh ta chắc chẳng hỏi mình những điều ấy làm gì. Tôi không trực tiếp hỏi xem có đúng như vậy không, vì tôi thấy Andrew xử sự rất lạnh lùng và tôi biết, có hỏi cũng sẽ chẳng nhận được câu trả lời thẳng thắn. Vì vậy tôi chỉ nói nhẹ nhàng: 'Thôi được, nếu cậu có cơ hội nói về công trình đó thì chuyện là như thế này'. Tôi đột ngột nhìn Andrew có vẻ như tôi đã biết được điều gì đó, nhưng quả thực tôi chẳng biết mô tê gì. Tôi cũng chỉ đoán vậy thôi".

Phản ứng của Wiles đối với các tin đồn và áp lực ngày càng tăng lại rất đơn giản: "Mọi người hỏi tôi về những báo cáo của tôi, rằng sự thực tôi sẽ nói về cái gì. Tôi tỉnh bơ nói cứ đến nghe rồi sẽ thấy."

Trở lại năm 1920, David Hilbert, lúc đó 58 tuổi, đã có một bài giảng trước công chúng về Định lý cuối cùng của Fermat ở Gottingen. Khi được hỏi liệu bài toán này có giải được không, ông đáp rằng ông sẽ không còn sống để chứng kiến điều đó, nhưng có lẽ những người trẻ tuổi hơn ngồi ở đây sẽ có thể được chứng kiến lời giải đó. Sự ước lượng của Hilbert về thời gian chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat là khá chính xác. Bản báo cáo của Wiles vẫn còn hợp thức về thời gian đối với giải thưởng Wolfskehl. Trong di chúc của mình Paul Wolfskehl đã quy định thời hạn cuối cùng của giải là ngày 13 tháng 9 năm 2007.

Tiêu đề loạt báo cáo của Wiles là "Các dạng modular, các đường cong eliptic và các biểu diễn Galois". Lại một lần nữa, cũng như lớp chuyên đề cho nghiên cứu sinh một năm trước đây, mà chủ yếu là cho Nick Katz, cũng có tên rất chung chung, khiến người ta không thể đoán ra mục đích tối hậu của nó là gì. Báo cáo đầu tiên của Wiles nhìn bề ngoài khá nhạt nhẽo, nhưng nó đặt cơ sở cho sự công phá giả thuyết Taniyama - Shimura sẽ được trình bày trong báo cáo thứ hai và thứ ba. Đa số cử tọa của ông đều coi thường tin đồn và không nắm được mục tiêu của bản báo cáo, nên ít chú ý tới các chi tiết. Nhưng người hiểu biết thì cố tìm kiếm những manh mối, dù là nhỏ bé nhất, để xác minh những tin đồn đại.

Ngay sau khi báo cáo của Wiles kết thúc, tin đồn lại bắt đầu dậy lên với một sinh lực mới, và thư điện tử được tung đi khắp thế giới. Giáo sư Karl Rubin, nguyên là học trò của Wiles đã báo về cho các đồng nghiệp của mình ở Mỹ:

> Date: Thứ hai, 21/6/1993 13:33:6
> Subject: Wiles
>
> Chào! Hôm nay Andrew đã đọc báo cáo đầu tiên. Ông không thông báo gì về chứng minh giả thuyết Taniyama - Shimura, nhưng ông đang tiến theo hướng đó và ông còn hai báo cáo nữa. Ông vẫn còn đang rất bí mật về kết quả cuối cùng.
> Phỏng đoán của tôi là ông sẽ chứng minh rằng nếu E là một đường cong eliptic trên Q và biểu diễn Galois trên các điểm bậc 3 trên E thỏa mãn một số giả thiết nào đó, thì E sẽ là modular. Từ những điều ông nói thì dường như ông sẽ không chứng minh toàn bộ giả thuyết đó. Điều mà tôi không biết là liệu nó có áp dụng cho đường cong Frey, và do đó có nói gì về Fermat hay không. Tôi sẽ liên lạc thường xuyên với các bạn.
>
> Karl Rubin
> Đại học Quốc gia Ohio

Ngày hôm sau, càng có nhiều người nghe được tin đồn, nên cử tọa của buổi báo cáo thứ hai đông lên đáng kể. Wiles chọc tức họ bằng những tính toán trung gian cho thấy rõ ràng là ông đang cố gắng công phá giả thuyết Taniyama - Shimura, nhưng cử tọa vẫn còn băn khoăn tự hỏi rằng liệu ông đã làm đủ để chứng minh nó, và do đó chinh phục được Định lý cuối cùng của Fermat hay chưa. Lại một cơn mưa thư điện tử phóng lên các vệ tinh:

> Date: Thứ ba, 22/6/1993 13:10:39
> Subject: Wiles
>
> Không có nhiều tin tức thực sự trong buổi báo cáo hôm nay. Andrew phát biểu một định lý tổng quát về các biểu diễn Galois nâng theo những đường lối như tôi đã viết hôm qua. Nó dường như không áp dụng cho các đường cong eliptic nhưng điểm mấu chốt ngày mai sẽ rõ.
> Tôi thực sự không biết tại sao Andrew lại làm điều đó theo cách ấy. Rõ ràng là ông biết rõ điều mà ông sẽ định nói ngày mai. Đây là một công trình thực sự nặng ký mà ông ấy đã làm trong nhiều năm, và dường như ông rất tự tin. Tôi sẽ cho các bạn biết tất cả những gì xảy ra ngày mai.
>
> Karl Rubin
> Đại học quốc gia Ohio

"Ngày 23 tháng 6 năm 1993, Andrew bắt đầu bản báo cáo thứ ba và cũng là cuối cùng", John Coates nhớ lại. "Điều thú vị là tất cả những người đã có đóng góp cho những ý tưởng nằm sau chứng minh này đều có mặt trong phòng hội nghị: Mazur, Ribet, Kolyvagin, và nhiều, nhiều người khác nữa".

Vào thời điểm đó, tin đồn đã thôi thúc tới mức toàn thể cộng đồng các nhà toán học ở Cambridge đều đến dự buổi báo cáo cuối cùng của Wiles. Những người may mắn thì len được vào trong hội trường, còn những người khác phải đứng ngoài hành lang, kiễng chân nhìn vào qua cửa sổ. Ken Ribet đã quyết định không được để lỡ thông báo toán học quan trọng nhất của thế kỷ này: “Tôi tới tương đối sớm và ngồi ngay hàng ghế trước với Barry Mazur. Tôi có mang theo cả camera để ghi lại thời điểm lịch sử này. Có một không khí náo nức, mọi người rất hồi hộp chờ đợi. Chắc chắn chúng tôi đều có cảm giác rằng mình đang được tham gia vào một thời điểm lịch sử. Ai cũng cười rất tươi cả trước cũng như trong thời gian nghe Andrew báo cáo. Sự căng thẳng đã tích tụ trong mấy ngày qua, nhưng bây giờ thì đã tới thời điểm tuyệt vời này, thời điểm mà chúng tôi đang tiến gần tới đích chứng minh của Định lý cuối cùng của Fermat”.

Mặc dù đã có trong tay bản photocopy chứng minh của Wiles, nhưng Barry Mazur lúc đó vẫn cảm thấy ngạc nhiên: “Tôi chưa bao giờ được chứng kiến một báo cáo vẻ vang như vậy, một bản báo cáo đầy những ý tưởng tuyệt vời, với sự căng thẳng đầy kịch tính và sự dẫn dắt được chuẩn bị tuyệt hảo, để dẫn đến một kết luận duy nhất”.

Sau bảy năm nỗ lực căng thẳng Wiles sắp sửa thông báo chứng minh của ông cho toàn thế giới. Một điều lạ là ngay cả Wiles cũng không nhớ được một cách chi tiết những thời điểm cuối cùng của buổi báo cáo, mà chỉ nhớ bầu không khí lúc đó: “Mặc dù báo chí cũng đã phong thanh biết về buổi báo cáo này, nhưng rất may là họ không đến dự. Nhưng có rất nhiều người trong phòng hội nghị mang theo máy ảnh và họ đã chụp tới tấp vào lúc gần kết thúc, và ông Giám Đốc Viện Newton chắc đã có chuẩn bị từ trước nên còn mang theo cả một chai sâm-banh. Có một sự im lặng đầy trang trọng khi tôi đọc chứng minh và khi tôi viết lên bảng phát biểu của Định lý cuối cùng của Fermat. Đoạn tôi nói: 'Có lẽ, tôi xin phép được dừng ở đây' và sau đó là những tràng vỗ tay không ngớt".

Hậu chiến

Thật lạ là cảm giác của Wiles về bản báo cáo của mình lại buồn vui lẫn lộn: "Tất nhiên đây là một cơ hội lớn, nhưng ở tôi lại có những tình cảm lẫn lộn. Đây là một phần của bản thân tôi trong suốt bảy năm trời: nó là toàn bộ cuộc sống làm việc của tôi. Tôi đã đắm mình trong bài toán đó tới mức tôi thực sự cảm thấy rằng nó đã hoàn toàn thuộc về tôi, nhưng bây giờ tôi đã để cho nó đi mất. Có cảm giác như là tôi đã cho đi một phần cơ thể của mình".

Ken Ribet, một đồng nghiệp của Wiles, lại không hề có cảm giác day dứt như vậy: "Đây là một sự kiện hoàn toàn đặc biệt. Ý tôi muốn nói khi bạn đến dự một hội nghị, ở đó có một số báo cáo tầm thường, một số báo cáo hay và có cả những báo cáo rất đặc biệt nữa, nhưng một bản báo cáo trong đó tác giả tuyên bố rằng đã giải được một bài toán đã từng tồn tại tới 350 năm thì chỉ một lần trong đời bạn được nghe. Mọi người nhìn nhau và nói: 'Lạy Chúa, bạn biết không, chúng ta vừa được chứng kiến một sự kiện lịch sử'. Sau đó mọi người hỏi đôi ba câu về một vài kỹ thuật trong chứng minh và một số áp dụng cho các phương trình khác, rồi tất cả lại im lặng và sau đó đột nhiên lại vang lên tràng vỗ tay thứ hai. Báo cáo tiếp theo là của tôi. Tôi nói, mọi người cũng ghi chép, rồi cũng vỗ tay, nhưng sự thực không một ai có mặt ở đây, kể cả tôi, có một ý niệm gì về những điều mà tôi đã nói trong báo cáo".

Trong khi các nhà toán học đang truyền đi tin tốt lành đó qua e-mail, thì phần còn lại của thế giới phải đợi tới chương trình thời sự buổi tối hoặc báo chí ngày hôm sau. Một nhóm phóng viên truyền hình và các phóng viên khoa học lao tới Viện Newton, tất cả đều đề nghị được phỏng vấn "nhà toán học vĩ đại nhất của thế kỷ". Tờ *Guardian* của Anh đã giật tít: "Sự cáo chung một Câu đố cuối cùng của toán học". Tờ *Le Monde* đăng trang trọng trên trang nhất: "Định lý Fermat cuối cùng đã được chứng minh". Các nhà báo ở khắp nơi đều đề nghị các nhà toán học cho biết ý kiến đánh giá của mình về công trình của Wiles, và các giáo sư vừa hồi tỉnh sau cơn sốc đã được yêu cầu giải thích ngắn gọn chứng minh toán học phức tạp nhất từ trước đến nay, hoặc cung cấp những đoạn trích dẫn ngắn gọn có thể làm sáng tỏ về giả thuyết Taniyama - Shimura.

Lần đầu tiên giáo sư Shimura nghe nói về chứng minh của chính giả thuyết của mình là khi ông đọc thấy trên trang nhất của tờ *New York Times* - "Cuối cùng, tiếng kêu 'Eureka!' trong một câu đố toán học cổ". Ba mươi lăm năm sau khi Yukata Taniyama, bạn ông tự sát, giả thuyết mà họ cùng nhau sáng tạo ra giờ đây đã được chứng minh. Đối với nhiều nhà toán học chuyên nghiệp, chứng minh của giả thuyết Taniyama - Shimura là một thành tựu còn quan trọng hơn nhiều so với lời giải của bài toán Fermat, bởi vì nó đã có vô số hệ quả đối với rất nhiều định lý toán học khác. Nhưng các nhà báo đề cập tới câu chuyện này lại có xu hướng tập trung vào Fermat và chỉ nhắc sơ qua về Taniyama - Shimura, nếu không muốn nói là hoàn toàn không.

Shimura, một con người khiêm tốn và lịch thiệp, không bận tâm quá đáng về chuyện người ta không chú ý tới vai trò của ông trong

The New York Times

At Last, Shout of "Eureka!" In Age-Old Math Mystery

Split in Japan's Ruling Party Is Rearranging Political Map

S.& L. Woes Impinge on Privileged Haven

Budget Debate: A Primer

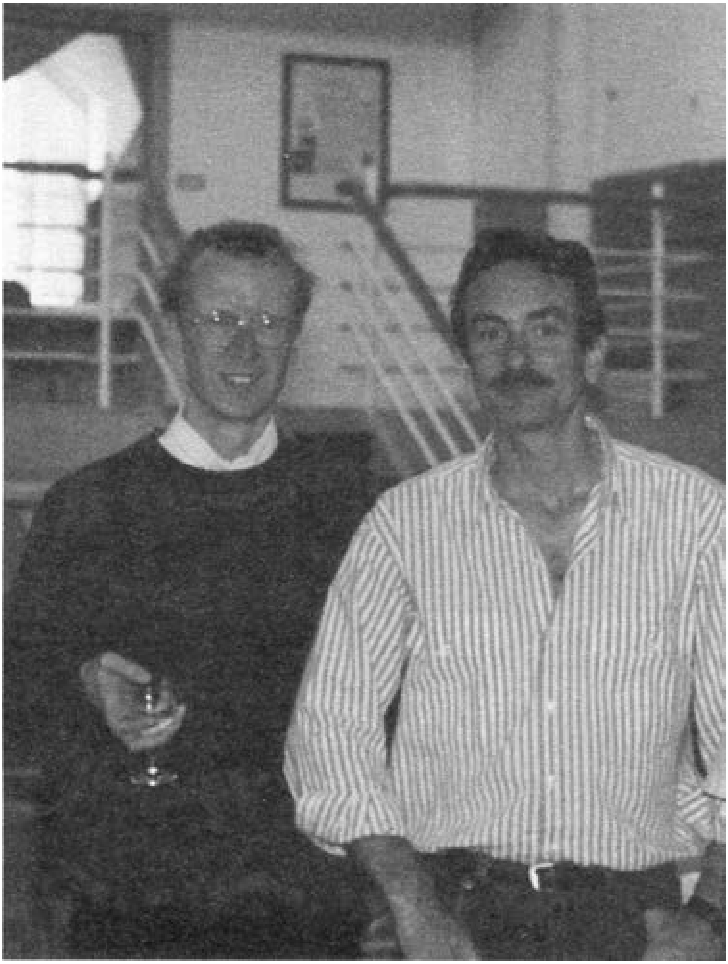
Sau báo cáo chứng minh định lý cuối cùng của Fermat, những tạp chí trên khắp thế giới đều có tin và bài phỏng vấn về Wiles cùng chứng minh của ông.

việc chứng minh Định lý cuối cùng của Fermat. Nhưng ông cũng hơi buồn vì ông và Taniyama đã bị gạt từ địa vị những cái tên riêng xuống thân phận của những tính từ. "Thật lạ là người ta chỉ viết về giả thuyết Taniyama - Shimura mà không ai viết về Taniyama và Shimura".

Đây là lần đầu tiên toán học được xuất hiện trên trang nhất kể từ khi Yoichi Miyaoka thông báo chứng minh của ông vào năm

1988. Sự khác biệt duy nhất ở lần này là các phương tiện thông tin đại chúng đề cập tới với quy mô lớn gấp hai lần và không ai tỏ ra có một chút nghi ngờ nào đối với những tính toán của Wiles. Qua một đêm ông đã trở thành nhà toán học nổi tiếng nhất và thực tế là nhà toán học nổi tiếng duy nhất trên thế giới. Tạp chí *People* thậm chí còn liệt ông vào số "25 người hấp dẫn nhất trong năm", cùng với Công nương Diana và Oprah Winfrey. Thậm chí một tập đoàn may sẵn quốc tế còn đề nghị người đàn ông thiên tài nhưng rụt rè này quảng cáo cho những bộ quần áo dành cho đàn ông của họ.

Trong khi những trò xiếc của các phương tiện thông tin đại chúng vẫn còn đang tiếp tục và trong khi nhiều nhà toán học cố hết sức để được công chúng chú ý, thì một công việc hết sức nghiêm túc là kiểm tra lại chứng minh của Wiles vẫn đang được âm thầm tiến hành. Cũng như với bất cứ một bộ môn khoa học nào khác, mỗi một công trình mới đều phải được kiểm tra một cách kỹ lưỡng, trước khi nó được công nhận là chính xác và đúng đắn. Chứng minh của Wiles cũng phải được phản biện và kiểm tra một cách gắt gao. Mặc dù những báo cáo của Wiles ở Viện Newton đã cung cấp cho mọi người những đường nét chính công trình của ông, nhưng điều đó không có giá trị như một cuộc kiểm tra chính thức của các chuyên gia. Thủ tục học thuật đòi hỏi rằng bất kỳ một nhà toán học nào gửi một bản thảo hoàn chỉnh tới một tạp chí có uy tín, thì biên tập viên của tạp chí đó phải gửi nó cho một nhóm những người phản biện, những người có trách nhiệm kiểm tra kỹ lưỡng từng dòng một. Wiles đã phải trải qua một mùa hè đợi chờ một cách lo âu nhận xét của những người phản biện, với hy vọng cuối cùng ông cũng sẽ nhận được sự tán đồng của họ.



Andrew Wiles và Ken Ribert
ngay sau báo cáo lịch sử của Wiles ở Viện Isaac Newton.

VII
MỘT BÀI TOÁN NHỎ

> Một bài toán đáng để công phá chứng tỏ sự xứng đáng của nó bằng cách phản kích lại.
>
> PIET. HEIN

Ngay khi buổi báo cáo ở Cambridge kết thúc, Hội đồng trao giải thưởng Wolfskehl đã được thông báo về chứng minh của Wiles. Tuy nhiên, họ không thể trao ngay giải thưởng vì quy định của cuộc thi đã yêu cầu một cách rõ ràng rằng chứng minh phải được các nhà toán học khác xác nhận và phải được công bố chính thức:

> Kônigliche Gesellschaft der Wissenschaften ở Gottingen... sẽ chỉ xem xét những công trình toán học đã xuất bản dưới dạng một chuyên luận đăng trên các tạp chí hoặc dưới dạng sách để bán trong các hiệu sách... Việc trao giải sẽ được Hội tiến hành không sớm hơn hai năm kể từ ngày công bố công trình. Khoảng thời gian này dành cho các nhà toán học Đức cũng như nước ngoài bày tỏ ý kiến của mình về tính đúng đắn của lời giải đã được công bố.

Wiles đã gửi bản thảo cho tạp chí *Inventiones Mathematicae,* và rồi từ đây biên tập viên của nó là Barry Mazur bắt đầu quá trình chọn lọc những người phản biện. Bài báo của Wiles liên quan tới quá nhiều các kỹ thuật toán học, cả cổ điển lẫn hiện đại, nên Mazur đã quyết định không theo thông lệ là chọn hai hoặc ba phản biện, mà ông đã chọn sáu. Mỗi năm có tới ba ngàn bài báo được công bố trong các tạp chí khoa học trên toàn thế giới, nhưng với khối lượng đồ sộ và tầm quan trọng như công trình của Wiles thì nó phải được kiểm tra ở một cấp độ đặc biệt. Để cho công việc được đơn giản, bản chứng minh 200 trang của Wiles được chia làm 6 phần, mỗi phản biện chịu trách nhiệm một phần.

Chương III là phần của Nick Katz, người đã tiến hành kiểm tra phần này cùng với Wiles một năm trước: "Mùa hè năm đó tôi tới Paris làm việc ở Viện Nghiên cứu Khoa học Cao cấp (IHES) và tôi có mang theo toàn bộ bản chứng minh 200 trang, trong đó chương mà tôi chịu trách nhiệm gồm 60 trang. Khi tới nơi, tôi quyết định cần phải có một người giúp về mặt kỹ thuật và thế là tôi đã nài nỉ Luc Illusie, lúc đó cũng ở Paris, làm "phó"- phản biện chương này cho tôi. Chúng tôi gặp nhau vài lần mỗi tuần trong suốt mùa hè đó, chủ yếu là dạy cho nhau để hiểu được chương mà chúng tôi chịu trách nhiệm. Thực ra, chúng tôi chẳng làm gì ngoài việc soát xét bản thảo từng dòng một để tin chắc rằng không có sai sót nào. Đôi khi chúng tôi cảm thấy bối rối trước điều này điều kia mỗi ngày, đôi khi vài ba lần trong ngày. Những khi đó tôi đều e-mail hỏi Andrew - tôi không hiểu điều mà anh nói ở trang này hoặc hình như sai ở dòng kia. Thường thì chúng tôi nhận được trả lời ngay trong ngày hoặc ngày hôm sau. Những trả lời của Andrew đều làm sáng tỏ được vấn đề và chúng tôi lại tiếp tục công việc của mình".

Chứng minh của Wiles là một chuỗi những suy diễn khổng lồ được xây dựng hết sức phức tạp từ hàng trăm những tính toán toán học gắn kết với nhau bằng hàng ngàn những kết nối logic. Chỉ cần một trong những tính toán ấy là sai hoặc một trong số những kết nối đó rời ra, không còn tính kết dính nữa là toàn bộ chứng minh có nguy cơ không còn giá trị. Wiles giờ đây đã trở về Princeton, đang lo âu chờ đợi các nhà phản biện hoàn tất nhiệm vụ của mình. “Tôi không muốn tổ chức ăn mừng chừng nào bài báo còn chưa hoàn toàn hết trách nhiệm của tôi. Trong khi đó công việc của tôi luôn bị gián đoạn bởi những câu hỏi do các nhà phản biện gửi về qua e-mail. Tôi vẫn đinh ninh rằng sẽ không có câu hỏi nào gây cho tôi nhiều phiền phức cả”. Thực ra, Wiles đã kiểm tra đi, kiểm tra lại chứng minh của mình trước khi gửi nó cho các nhà phản biện, vì vậy ông nghĩ rằng nếu có những sai sót về mặt toán học thì chẳng qua cũng tựa như những lỗi in ấn trong một bài báo mà thôi, nghĩa là đó chỉ là những lỗi tầm thường, ông có thể sửa lại được ngay lập tức.

“Những câu hỏi cứ tiếp tục tương đối bình thường như thế trong suốt tháng 8”, Katz nhớ lại, “cho đến khi tôi vấp phải một vấn đề dường như chỉ là một bài toán nhỏ. Vào khoảng ngày 23 tháng 8, tôi e-mail cho Andrew, nhưng do nó hơi phức tạp nên anh ấy đã trả lời tôi bằng fax. Tuy nhiên, bản fax không trả lời đúng câu hỏi của tôi, nên tôi gửi tiếp cho anh một bức thư điện tử nữa và lại nhận được một bản fax nữa, nhưng vẫn không làm tôi thỏa mãn”.

Wiles cho rằng lỗi này cũng làng nhàng như những lỗi trước đó, nhưng sự thúc ép của Katz đã buộc ông phải xem xét lại vấn đề này một cách nghiêm túc: “Tôi không thể giải đáp được ngay lập tức cái câu hỏi có vẻ rất đơn giản này. Một thời gian tôi nghĩ nó cũng đại loại như những câu hỏi khác thôi, nhưng rồi đến tháng 9 tôi bắt đầu nhận ra rằng nó không chỉ là một khó khăn tầm thường, mà còn là một lỗi rất cơ bản. Đó là một sai lầm trong phần quan trọng của hệ thống suy diễn có liên quan tới phương pháp Kolyvagin-Flach, nhưng do nó khá tinh tế nên tôi đã không nhận ra. Sai lầm này khá trừu tượng, không thể mô tả bằng ngôn ngữ thông thường được. Ngay cả giải thích cho một nhà toán học cũng đòi hỏi nhà toán học đó phải bỏ ra từ hai đến ba tháng để nghiên cứu những nét lớn của bản thảo".

Vấn đề là ở chỗ không có gì đảm bảo rằng phương pháp Kolyvagin-Flach vận hành đúng như Wiles dự kiến. Phương pháp này được cho rằng có thể mở rộng chứng minh từ phần tử đầu tiên của mọi phương trình eliptic và dạng modular tới tất cả các phần tử còn lại, bằng cách cung cấp một cơ chế lật từ một quân đôminô sang quân đôminô tiếp theo. Ban đầu, phương pháp Kolyvagin-Flach *chỉ vận hành* được trong những điều kiện hạn chế cụ thể, nhưng Wiles tin rằng ông đã cải tiến và củng cố nó đủ để nó có thể vận hành đúng như ông cần. Nhưng theo Katz, thực tế không hẳn như vậy, hệ quả của điều đó là hết sức to lớn và tiêu cực.

Sai lầm đó không nhất thiết có nghĩa là công trình của Wiles là không thể cứu vãn nổi, nhưng nó cũng có nghĩa là ông cần phải gia cố lại chứng minh của mình. Tính tuyệt đối của toán học đòi hỏi Wiles phải chứng minh được một cách chắc chắn rằng phương pháp của ông áp dụng được cho mọi phần tử của tất cả các dãy -E và dãy -M.

Người lắp đặt thảm

Khi Katz nhận thấy tầm quan trọng của sai sót mà ông phát hiện ra, ông đã tự trách mình là tại sao vào mùa xuân, khi Wiles giảng cho ông trong lớp chuyên đề với mục đích duy nhất là để phát hiện ra những sai sót, thế mà ông đã để lọt qua. "Tôi nghĩ rằng câu trả lời ở đây là do sự căng thẳng khi bạn lắng nghe một bài giảng; một mặt, bạn muốn hiểu từng chi tiết nhưng mặt khác, lại muốn để cho người giảng không bị ngắt quãng bởi những câu hỏi của mình. Nếu bạn mỗi phút lại hỏi tôi không hiểu điều này, tôi không hiểu điều kia, thì người giảng sẽ không bao giờ giải thích được gì mà bạn cũng chẳng đi đến đâu. Trái lại, nếu bạn không bao giờ hỏi cắt ngang thì rồi bạn cũng sẽ không theo dõi kịp nữa, bạn chỉ gật đầu cho lịch sự, chứ thực chất thì lại chẳng kiểm tra được gì hết. Đúng là có một sự căng thẳng như vậy giữa việc hỏi quá nhiều và hỏi quá ít, và chắc chắn là vào giai đoạn cuối của chuyên đề, sai lầm đó đã lọt được qua. Tôi đã sai lầm ở phía hỏi quá ít".

Chỉ mới ít tuần trước, báo chí trên toàn cầu còn ca ngợi Wiles như nhà toán học xuất sắc nhất thế giới, và sau 350 năm thất bại, giờ đây các nhà lý thuyết số mới tin rằng cuối cùng họ cũng đã thắng được Fermat. Nhưng hiện thời Wiles lại đang phải đối mặt với sự nhục nhã sẽ phải thừa nhận rằng mình đã phạm phải một sai lầm. Nhưng trước khi thú nhận sai lầm, ông quyết định tập trung mọi nỗ lực để lấp đầy khe hở đó. "Tôi không thể đầu hàng được. Tôi đã bị ám ảnh bởi bài toán này và tôi vẫn còn tin rằng phương pháp Kolyvagin-Flach chỉ cần một sửa đổi nhỏ là nó sẽ lại vận hành tốt. Tôi quyết định trở lại lối làm việc cũ của mình và hoàn toàn xa lánh thế giới bên ngoài. Tôi cần phải tập trung cao độ một lần nữa, nhưng lần này trong những điều kiện khó khăn hơn rất nhiều. Trong một thời gian dài tôi cứ nghĩ rằng việc sửa chữa đã nằm trong tầm tay và tôi chỉ để sót một điều gì đó đơn giản thôi và chỉ ngày hôm sau là mọi chuyện sẽ đâu vào đấy. Tất nhiên, điều đó có thể đã xảy ra như vậy, nhưng rồi thời gian trôi đi, tôi mới nhận ra rằng dường như vấn đề đã trở nên gai góc hơn".

Wiles hy vọng rằng có thể sửa chữa được sai lầm trước khi cộng đồng các nhà toán học ý thức được rằng đã có sai lầm. Vợ ông, người đã chứng kiến bảy năm ròng nỗ lực dành cho chứng minh đầu tiên, giờ đây lại phải quan sát cuộc vật lộn cam go của chồng mình với một sai sót có nguy cơ phá hủy tất cả. Wiles vẫn còn nhớ sự lạc quan của vợ mình: "Vào tháng 9, Nada nói với tôi rằng điều duy nhất mà cô ấy muốn cho sinh nhật của mình là một chứng minh đúng. Ngày sinh của cô ấy là ngày 6 tháng 10. Nghĩa là tôi chỉ có hai tuần để hoàn tất chứng minh, và tôi đã thất bại".

Đối với Nick Katz, đó cũng là một thời kỳ rất căng thẳng: "Vào tháng 10, về nguyên tắc, chỉ có tôi, Illusie, những người phản biện các chương khác và Andrew, đó là tất cả những ai biết về sai sót này. Thái độ của tôi với tư cách một người phản biện là hành động một cách hoàn toàn bí mật. Tôi không cảm thấy rằng mình có phận sự phải thảo luận vấn đề này với ai đó, ngoài Andrew ra, vì vậy tôi đã không hé môi với một ai. Tôi nghĩ, bên ngoài Wiles làm ra vẻ bình thường thế thôi, nhưng lúc này anh vẫn đang giữ kín điều bí mật đối với thế giới, và tôi cho rằng chắc anh cũng đang rất khốn khổ với nó. Thái độ của Wiles tỏ ra là chỉ ngày hôm sau anh sẽ giải quyết được, nhưng rồi khi mùa thu đã trôi qua, bản thảo vẫn chưa được hoàn thành. Rồi bắt đầu lan truyền tin đồn nói rằng đã có vấn đề".

Đặc biệt, Ken Ribet, một người phản biện khác, đã bắt đầu cảm thấy áp lực của việc phải giữ bí mật: "Vì một lý do hoàn toàn ngẫu nhiên tôi được người ta biết tới như là "Cơ quan thông tin về Fermat". Nguyên do là ở bài báo khởi đầu đăng trên tờ *New York Times*, mà Andrew đề nghị tôi thay mặt anh nói với phóng viên, và bài báo đã viết "Ribet, người hành động với tư cách là phát ngôn viên của Andrew Wiles..." hay một cái gì đó đại loại như vậy. Sau đó tôi gần như biến thành một thỏi nam châm thu hút mọi sự quan tâm về Định lý cuối cùng của Fermat, cả từ bên trong cũng như bên ngoài cộng đồng các nhà toán học. Những người thuộc giới truyền thông từ khắp nơi trên thế giới gọi điện tới, và trong suốt thời gian hai ba tháng tôi cũng đã phải đọc khá nhiều bài giảng. Trong những bài giảng đó, tôi đã nhấn mạnh rằng đó là một thành tựu tuyệt vời, tôi cũng đã trình bày khái quát chứng minh của Wiles và nói chuyện về những phần tôi biết rõ nhất, nhưng rồi ít lâu sau người ta bắt đầu tỏ ra nóng ruột và bắt đầu đặt ra những câu hỏi rất khó chịu.

"Anh biết đấy, Wiles đã thông báo rất công khai, nhưng không ai, ngoài một nhóm rất nhỏ những người phản biện là được nhìn thấy bản thảo. Do đó các nhà toán học nóng lòng chờ bản thảo mà Andrew đã hứa rằng chỉ ít tuần sau thông báo đầu tiên hồi tháng 6 là sẽ có. Người ta nói: "Thôi được, cứ cho là định lý đã được thông báo rồi, nhưng chúng tôi muốn biết điều gì đang xảy ra. Người ta đang làm gì? Và tại sao chúng tôi lại không nghe thấy tăm hơi gì?". Mọi người hơi bất bình vì bị rơi vào trình trạng mù tịt, vì họ đơn giản chỉ muốn biết điều gì đang diễn ra mà thôi. Sau đó mọi chuyện còn trở nên tồi tệ hơn bởi vì đám mây đó chậm chạp tích tụ trên đầu chứng minh của Wiles và người ta liên tục nói với tôi về những tin đồn khẳng định có một khe hở ở Chương 3. Họ hỏi tôi có biết không, và quả thật tôi không biết trả lời họ thế nào".

Khi Wiles và những người phản biện nói dối rằng họ không biết gì về khe hở đó, hoặc ít nhất là từ chối bình luận, thì sự bàn tán suy diễn bùng lên ghê gớm. Trong cơn tuyệt vọng các nhà toán học bắt đầu dồn dập gửi e-mail cho nhau với hy vọng tìm ra sự thật.

> Date: 18/11/1993 21:04:49 GMT
> Subject: Khe hở trong chứng minh của Wiles
>
> Có nhiều tin đồn về một hoặc nhiều khe hở trong chứng minh của Wiles. Liệu khe hở này là một vết rạn, một vết nứt, một lỗ hổng hay là một vực thẳm? Có ai có thông tin đáng tin cậy không?
>
> Josheph Lipman
> Đại học Purdue

Tại phòng uống trà của hầu hết các khoa toán trên thế giới, sự bàn tán về chứng minh của Wiles ngày một căng thẳng hơn. Để đáp lại những tin đồn và những e-mail suy diễn lung tung, một số nhà toán học đã cố gắng kêu gọi cộng đồng hãy bình tĩnh trở lại.

> Date: 19/11/93 15:42:20 GMT
> Subject: Trả lời: Khe hở trong chứng minh của Wiles
> Tôi không có một thông tin thứ thiệt nào, và tôi cũng không cảm thấy thoải mái khi thảo luận những thông tin được gửi lần đầu. Tôi nghĩ, lời khuyên tốt nhất đối với mọi người bây giờ là hãy giữ bình tĩnh và hãy để cho những người phản biện rất có thẩm quyền, có trách nhiệm xem xét một cách thận trọng bài báo của Wiles, làm công việc của họ. Họ sẽ thông báo những phát hiện của họ khi họ thấy có điều gì đó cần phải nói. Bất cứ ai đã từng

viết báo hoặc phản biện các bài báo đều đã quen với một thực tế là trong quá trình kiểm tra các chứng minh thường nảy sinh các vấn đề. Đối với một kết quả quan trọng như chứng minh khó và dài của Wiles, điều đó không xảy ra mới là sự lạ.

Leonard Evens

Đại học North Western

Mặc dù có lời kêu gọi hãy bình tĩnh, nhưng những e-mail vẫn không giảm bớt. Ngoài việc bàn luận về cái sai sót giả định đó, các nhà toán học còn bắt đầu tranh luận về đạo đức của việc giành trước thông báo của người phản biện.

Date: 24/11/93 12:00:34 GMT

Subject: Tiếp tục bàn tán về Fermat

Tôi nghĩ rõ ràng là tôi không đồng ý với những ai nói rằng chúng ta không nên bàn tán về chuyện chứng minh của Wiles đối với Định lý cuối cùng của Fermat có sai hay không. Tôi hoàn toàn ủng hộ loại bàn tán này chừng nào người ta còn không đối xử với nó một cách nghiêm túc. Tôi không xem nó là chuyện có ác tâm. Đặc biệt bởi vì bất kể chứng minh của Wiles có sai hay không, tôi vẫn tin rằng ông đã làm toán ở trình độ quốc tế.
Đó là cái tôi đã nhận được hôm nay, một thông tin không phải được gửi lần đầu mà đã được gửi đi gửi lại bởi nhiều người.

Bob Silverman

Date: Thứ hai,22/11/93 20:16 GMT

Subject: Re: Lỗ hổng Fermat

Coates đã nói trong một bài giảng ở Viện Newton tuần trước rằng theo quan điểm của ông thì đã có một lỗ hổng trong phần "hệ thống Euler" của chứng minh, mà có thể phải mất hai tuần hoặc có khi phải hai năm mới lấp đầy được. Tôi đã vài lần nói chuyện với ông ấy, nhưng vẫn chưa biết chắc ông ấy nói như vậy là dựa trên cơ sở nào, vì ông ấy cũng không có bản thảo của chứng minh. Theo như đến nay tôi biết thì bản thảo duy nhất có ở Cambridge là của Richard Taylor với tư cách là một người phản biện của bài báo cho tạp chí *Inventiones*, và anh ta kiên quyết lẩn tránh không bình luận, chừng nào tất cả các phản biện chưa đạt được một kết luận chung. Như vậy tình hình đang còn rất rối ren. Bản thân tôi không hiểu tại sao lại phải lấy quan điểm của Coates như một quan điểm có thẩm quyền nhất hiện nay: tôi dự định sẽ chờ tiếng nói của chính Taylor.

Richard Pinch

Trong khi cơn giận giữ vì không được tiếp cận với bản thảo chứng minh định lý ngày càng tăng, thì Wiles cố hết sức để không quan tâm tới những tranh luận và suy diễn lung tung. "Tôi thực sự xa lánh mọi người vì tôi không muốn biết người ta đang nói gì về tôi. Mặc dù sống cách biệt, nhưng Peter Sarnak, một bạn đồng nghiệp, vẫn thường xuyên nói với tôi: "Anh biết đấy, cả một trận bão tố đang nổ ra bên ngoài này". Tôi lắng nghe, nhưng đối với tôi, tôi chỉ muốn hoàn toàn tách mình ra khỏi những tranh luận, chỉ muốn tập trung hoàn toàn cho bài toán này".

Peter Sanark tới Khoa toán của Đại học Princeton cùng thời với Wiles, và trong nhiều năm họ đã trở thành bạn thân của nhau. Trong thời kỳ đầy sóng gió đó, Sanark luôn luôn là một trong số ít người mà Wiles có thể tin cẩn. "Thực ra, tôi chưa bao giờ được biết những chi tiết chính xác, nhưng một điều rõ ràng là anh ấy đang cố gắng vượt qua vấn đề nghiêm trọng ấy. Nhưng cứ mỗi lần anh ấy sửa được phần này của tính toán thì nó lại gây ra một khó khăn khác trong một phần khác của chứng minh. Điều này cũng tựa như anh ấy cố gắng trải một tấm thảm trong một căn phòng có kích thước hơi nhỏ hơn tấm thảm vậy. Cứ đặt vừa ở một góc thì lại thấy nó chồi ra ở góc kia. Việc tấm thảm đặt vừa hay không vừa căn phòng không phải là điều mà Andrew có thể quyết định được. Nhưng cần nhớ rằng, cho dù là có sai sót đi nữa, thì Andrew cũng đã làm được một bước tiến khổng lồ. Trước anh, chưa ai có được cách tiếp cận nào đối với giả thuyết Taniyama - Shimura, nhưng giờ đây mọi người đều thực sự nao nức vì anh ấy đã cho chúng ta thấy rất nhiều ý tưởng mới. Chúng đều là những ý tưởng rất cơ bản mà trước đó chưa ai xem xét. Vì vậy, ngay cả khi không thể sửa chữa được thì nó vẫn là một tiến bộ rất quan trọng, chỉ có điều khi đó Bài toán Fermat vẫn còn đó chưa được giải".

Cuối cùng, Wiles cũng nhận thấy rằng ông không thể cứ im lặng mãi như thế này được. Việc giải quyết sai lầm vẫn chưa trong tầm tay, nhưng đã đến lúc phải chấm dứt những suy diễn lung tung. Sau một mùa thu thất bại buồn thảm, ông đã gửi một e-mail cho Ban thông tin toán học:

> Date: 4/12/93 01:36:50 GMT
> Subject: Hiện trạng Fermat
>
> Theo sự suy diễn của mọi người đối với công trình của tôi về giả thuyết Taniyama - Shimura và Định lý cuối cùng của Fermat, tôi muốn thông báo tóm tắt về tình hình như sau. Trong quá trình kiểm tra lại, một số vấn đề đã xuất hiện và hầu hết đã được giải quyết, nhưng đặc biệt có một vấn đề mà đến nay tôi vẫn chưa giải quyết được. Việc quy (trong đa số trường hợp) giả thuyết

Taniyama - Shimura mang tính then chốt trong tính toán nhóm Selmer là hoàn toàn đúng đắn. Tuy nhiên, việc tính toán cuối cùng giới hạn trên chính xác đối với nhóm Selmer trong trường hợp bán ổn định (của biểu diễn bình phương gắn liền với dạng modular) là còn chưa hoàn chỉnh trong trạng thái hiện nay của nó. Tôi tin rằng tôi sẽ hoàn tất việc này trong một tương lai gần bằng cách dùng những ý tưởng đã được trình bày trong báo cáo của tôi ở Cambridge.

Thực tế là còn rất nhiều việc cần phải làm, nên công bố nó dưới dạng photo hiện nay là chưa thích hợp. Trong chuyên đề của tôi ở Princeton bắt đầu vào tháng 2 tới, tôi sẽ trình bày đầy đủ về công trình này.

Andrew Wiles

Ít người tin vào sự lạc quan của Wiles. Hầu như 6 tháng đã trôi qua mà sai lầm vẫn chưa sửa chữa được, vì vậy chẳng có lý do gì để cho rằng sẽ có điều gì đó thay đổi trong 6 tháng tới. Trong mọi trường hợp, nếu Wiles thực sự “hoàn tất được điều đó trong một tương lai gần”, thì tại sao lại phải bận tâm tung ra bức e-mail này làm gì? Tại sao không cứ im lặng ít tuần nữa rồi sau đó tung ra bản thảo đã hoàn tất? Chuyên đề tháng 2 được nhắc tới ở trên trong e-mail cũng không đưa ra được chi tiết đã hứa hẹn, và cộng đồng các nhà toán học đã ngờ rằng Wiles làm như vậy cốt chỉ để kéo dài thêm thời gian mà thôi.

Báo chí lại một lần nữa bùng lên về câu chuyện này và các nhà toán học lại được nhắc nhở về chứng minh đã thất bại của Miyaoka năm 1988. Lịch sử có vẻ như đã được lặp lại. Các nhà lý thuyết số giờ đây nóng lòng chờ đợi bức e-mail thứ hai giải thích tại sao chứng minh lại bị sai lầm tới mức không thể phục hồi nổi như vậy. Một số các nhà toán học đã bộc lộ sự nghi ngờ của họ đối với chứng minh của Wiles ngay từ mùa hè, nên giờ đây sự bi quan của họ dường như đã được biện minh. Người ta kể rằng giáo sư Alan Baker ở Đại học Cambridge đã đánh cuộc 100 chai sâm banh ăn 1 rằng trong vòng một năm nữa chứng minh của Wiles sẽ được chứng tỏ là sai. Baker phủ nhận giai thoại này, nhưng ông vẫn kiêu hãnh thừa nhận đúng là mình đã thể hiện một "sự hoài nghi lành mạnh".

Chưa đầy sáu tháng kể từ khi được báo cáo tại Viện Newton, chứng minh của Wiles đã rơi vào cảnh đổ vỡ hoang tàn. Niềm vui sướng, nỗi đam mê và niềm hy vọng đã đưa ông đi qua những năm tháng tính toán bí mật đầy thử thách giờ đây đã nhường chỗ cho sự bối rối và tuyệt vọng. Ông nhớ lại giấc mơ tuổi thơ của ông đã trở thành cơn ác mộng như thế nào: "Bảy năm đầu tiên làm việc về bài toán này tôi sung sướng được hưởng một cuộc chiến của riêng mình. Bất kể nó hóc búa tới mức nào, bất kể mọi chuyện tưởng như không thể vượt qua nổi ra sao, tôi vẫn dấn thân vào bài toán mà tôi yêu thích. Đó là niềm đam mê thời thơ ấu của tôi, tôi không thể từ bỏ nó cũng như không thể rời xa nó một giây phút nào. Sau đó tôi đã công bố nó một cách công khai, và trong khi nói tôi đã thực sự cảm thấy một sự mất mát. Đó là một cảm xúc pha trộn. Thật tuyệt vời khi thấy phản ứng của những người khác đối với chứng minh của mình, khi thấy những suy luận trong đó có thể làm thay đổi hoàn toàn phương hướng của toán học, nhưng đồng thời tôi cũng đã mất đi cuộc tìm kiếm của riêng mình. Bây giờ nó đã trở thành công khai đối với thế giới và tôi không còn ước mơ riêng của mình để mà thực hiện nữa. Rồi sau đó, sau khi trong nó nảy sinh vấn đề, có hàng chục, hàng trăm thậm chí hàng ngàn người muốn làm phân tán suy nghĩ của tôi. Nhưng làm toán theo kiểu phô bày hết ra như thế này hẳn không phải là phong cách của tôi và tôi hoàn toàn không thích lối làm việc ầm ĩ đó".

Các nhà lý thuyết số trên khắp thế giới rất thông cảm với tình thế của Wiles. Chính Ken Ribet cũng đã trải qua một cơn ác mộng như vậy 8 năm trước, khi ông tìm cách chứng minh mối liên hệ giữa giả thuyết Taniyama - Shimura và Định lý cuối cùng của Fermat. "Tôi đã đọc một bài giảng về chứng minh đó tại Viện Nghiên cứu Toán học ở Berkeley và có ai đó từ trong cử tọa đứng dậy nói: "Xin ông một phút, xin hỏi làm sao ông biết được những điều như thế là đúng?". Tôi đáp lại bằng cách trình bày những lý lẽ của tôi, nhưng họ nói: "Điều đó không thể áp dụng được trong tình huống này". Tôi như bị khủng bố trực tiếp. Người tôi vã mồ hôi và vô cùng bối rối về chuyện đó. Sau đó tôi nhận ra rằng chỉ có một khả năng duy nhất là phải chứng minh được nó. Nghĩa là phải quay trở lại công trình cơ bản về đề tài này và xem nó đã được làm chính xác là như thế nào trong tình huống tương tự. Tôi xem một bài báo có liên quan và thấy rằng phương pháp đó thực sự áp dụng được cho trường hợp của tôi, trong một hai ngày tôi đã sửa lại được tất cả. Trong bài giảng thứ hai của tôi, tôi đã trình bày đầy đủ chứng minh của mình. Nhưng dẫu sao bạn vẫn luôn luôn phải sống với nỗi lo sợ rằng khi bạn thông báo một điều gì đó quan trọng thì rất có thể sẽ bị phát hiện ra một sai lầm cơ bản nào đó.

"Khi bạn tìm ra sai lầm trong một bản thảo, nó có thể diễn ra theo hai cách. Đôi khi bạn tìm thấy ngay sự tự tin và chứng minh có thể được phục hồi không mấy khó khăn. Nhưng đôi khi cũng xảy ra điều ngược lại. Điều đó sẽ khiến bạn mất ăn mất ngủ, bạn sẽ cảm thấy choáng váng khi nhận thấy rằng mình đã phạm phải một sai lầm cơ bản và không cách gì có thể cứu vãn nổi. Có thể khi lỗ hổng phát triển, định lý sẽ thực sự sụp đổ tan tành, bởi vì bạn càng cố gắng vá víu thì bạn lại càng sa lầy nhiều hơn. Nhưng trong trường hợp của Wiles, mỗi chương của chứng minh lại là cả một bài viết có tầm quan trọng riêng của nó. Bản thảo của công trình kéo dài 7 năm trời này về cơ bản gồm một số bài viết quan trọng ghép lại với nhau và mỗi một bài viết đều hết sức thú vị. Đúng là đã có sai lầm trong một bài viết, cụ thể là Chương 3, nhưng cho dù bạn có bỏ chương này đi, thì những cái còn lại cũng vẫn hết sức tuyệt vời".

Nhưng không có Chương 3 sẽ không có chứng minh của giả thuyết Taniyama - Shimura, và do đó cũng không có chứng minh của Định lý cuối cùng của Fermat. Cộng đồng các nhà toán học cảm thấy vỡ mộng, bởi vì chứng minh nằm sau hai bài toán lớn đã lâm vào cảnh hiểm nguy. Hơn nữa, sau 6 tháng đợi chờ, không một ai, ngoài Wiles và những người phản biện được tiếp xúc trực tiếp với bản thảo. Có một sự đòi hỏi ngày càng tăng yêu cầu phải công khai hơn nữa để cho bất kỳ ai cũng được biết chi tiết về sai lầm trong chứng minh của Wiles với hy vọng sẽ có người phát hiện được điều gì đó mà Wiles đã không nhận ra và tiến hành tính toán lấp được khe hở trong chứng minh. Một số nhà toán học còn tuyên bố rằng chứng minh này có giá trị hết sức to lớn nên không thể để rơi vào tay của chỉ một người được. Các nhà lý thuyết số đã trở thành cái bia để cho những nhà toán học khác chế nhạo, họ đã hỏi một cách mỉa mai rằng không biết các nhà lý thuyết số có hiểu khái niệm chứng minh là gì không. Cái mà lẽ ra đã là thời điểm đáng kiêu hãnh nhất trong lịch sử toán học lại biến thành một trò đùa.

Mặc dù chịu sức ép ghê gớm từ phía bên ngoài, nhưng Wiles vẫn từ chối phát tán bản thảo của mình. Sau 7 năm nỗ lực quên mình, ông không thể ngồi khoanh tay nhìn ai đó hoàn tất chứng minh và cướp đi vinh quang của ông. Người chứng minh được Định lý cuối cùng của Fermat không phải là người đã đóng góp nhiều nhất, mà là người trao được cho thế giới một chứng minh cuối cùng và hoàn chỉnh. Wiles thừa biết rằng một khi bản thảo được tung ra trong trạng thái còn sai sót của nó, ông sẽ ngay lập tức bị sa lầy bởi những câu hỏi và yêu cầu làm sáng tỏ của những người-muốn-lấp-kín khe-hở và sự phân tán suy nghĩ đó sẽ làm tiêu tan hy vọng tự ông sẽ sửa chữa được chứng minh, trong khi lại phải trao cho người khác những manh mối có tầm quan trọng sống còn.

Wiles có ý định trở lại làm việc đơn độc như cũ, sự đơn độc đã cho phép ông sáng tạo ra bản chứng minh gốc, và trở lại thói quen nghiên cứu với cường độ cao trong căn gác áp mái của mình. Thi thoảng ông vẫn lang thang đi dạo bên hồ Princeton, như trước kia ông vẫn từng làm. Những người tập đi bộ, đi xe đạp và bơi thuyền trước kia, mỗi bận đi ngang qua, thường vẫy tay chào ông, thì nay họ dừng lại và hỏi ông đã có tiến bộ gì đối với cái lỗ hổng đó chưa. Wiles đã từng xuất hiện ở trang nhất các báo trên khắp thế giới, ông cũng đã được đăng quang trên tạp chí nổi tiếng *People,* và thậm chí còn được Đài CNN phỏng vấn. Mùa hè năm ngoái Wiles đã trở thành nhà toán học nổi tiếng nhất thế giới, nhưng giờ đây hình ảnh ấy đang bị hoen ố.

Trong khi đó tại Khoa toán, những cuộc bàn tán vẫn tiếp tục. Nhà toán học ở Princeton, giáo sư John H. Conway nhớ lại bầu không khí trong phòng uống trà của Khoa: "Chúng tôi thường tụ tập uống trà vào lúc ba giờ chiều. Đôi khi chúng tôi bàn về những vấn đề toán học, nhưng cũng có khi bàn về vụ xử O.J. Simpson và đôi khi bàn cả về những tiến bộ của Andrew. Vì không ai thực sự muốn đi hỏi thẳng anh ấy xem công việc đã tiến triển như thế nào, nên chúng tôi xử sự chẳng khác gì những nhà Cremly học vậy. Một người nói: "Mình vừa nhìn thấy Andrew sáng nay." - "Anh ấy có cười không?"- "Ồ, có, nhưng nhìn không được vui vẻ lắm". Chúng tôi chỉ có thể đo lường tình cảm của anh ấy qua nét mặt mà thôi".

Bức e-mail ác mộng

Vào giữa mùa đông, những hy vọng về một đột phá mới đã tàn dần, và ngày càng có nhiều nhà toán học lý sự rằng Wiles phải có trách nhiệm công khai bản thảo. Những tin đồn thổi vẫn tiếp tục và có một bài báo thậm chí còn khẳng định rằng Wiles đã đầu hàng và chứng minh của ông đã sụp đổ không thể cứu vãn nổi. Mặc dù điều đó là quá đáng, nhưng quả thật Wiles đã vét hết hàng chục cách tiếp cận có khả năng khắc phục được sai sót và hiện ông không còn nhìn thấy một con đường tiềm tàng nào khác dẫn tới lời giải.

Wiles thú nhận với Peter Sanark rằng tình hình đang ngày một tuyệt vọng và ông đã sắp đến lúc phải chấp nhận thất bại. Sanark cho rằng một phần của khó khăn là ở chỗ Wiles không có ai tin cậy để ông có thể trao đổi hằng ngày; không có ai để cùng ông thử nghiệm những ý tưởng mới hoặc có ai để khích lệ ông khám phá những cách tiếp cận ít trực diện hơn. Sanark đã gợi ý Wiles hãy tìm một người tin cẩn để thử lấp đầy khe hở một lần nữa xem sao. Wiles thực sự cần một người là chuyên gia trong việc sử dụng phương pháp Kolyvagin-Flach, nhưng cũng phải là người biết giữ bí mật những chi tiết của bài toán. Sau khi đã suy nghĩ khá lâu, Wiles quyết định mời Richard Taylor, một giảng viên thuộc Đại học Cambridge, tới Princeton để cùng làm việc với mình.

Taylor là một trong số sáu nhà phản biện chịu trách nhiệm kiểm tra chứng minh và còn là sinh viên cũ của Wiles, do đó là người rất đáng tin cậy. Năm ngoái, Taylor cũng có mặt trong số cử tọa ở Viện Newton để chứng kiến người thầy cũ của mình trình bày chứng minh của thế kỷ. Giờ đây nhiệm vụ của anh là giúp thầy mình cứu vãn một chứng minh đang có sai sót.

Vào tháng Giêng, với sự giúp đỡ của Taylor, Wiles một lần nữa lại hăm hở khám phá phương pháp Kolyvagin-Flach, cố gắng tìm ra con đường để đưa bài toán ra khỏi bế tắc. Thi thoảng, sau nhiều ngày nỗ lực, họ cũng đã bước vào một vùng đất mới, nhưng rồi cuối cùng họ lại phải trở về đúng nơi mà họ đã xuất phát. Sau khi đã phiêu lưu xa hơn bất cứ khi nào trước đó và chịu hết thất bại này đến thất bại khác, cả hai người đã nhận ra rằng họ đang lạc vào một mê lộ rộng lớn không thể tưởng tượng nổi. Nỗi sợ hãi nhất của họ là mê lộ này là vô hạn, không có đường ra, và họ sẽ phải lang thang vô mục đích và vô định trong đó.

Mùa xuân năm 1994, khi thấy mọi chuyện không thể tồi tệ hơn được nữa, bức thư điện tử sau đã xuất hiện trong máy tính trên khắp thế giới:

Date: 03/4/94

Subject: Lại nói về Fermat

Ngày hôm nay đã có một sự phát triển đầy kinh ngạc về Định lý cuối cùng của Fermat.

Noam Elkies đã công bố một phản ví dụ chứng tỏ Định lý cuối cùng của Fermat là không đúng! Ông đã nói về điều đó ở Viện ngày hôm nay. Lời giải mà ông xây dựng cho bài toán Fermat liên quan với lũy thừa của một số nguyên tố lớn không thể tưởng tượng nổi (lớn hơn 10^{20}), nhưng nó là một con số có tính kiến thiết. Ý tưởng chủ yếu ở đây là một loại dựng điểm Heegner kết hợp với sự giảm thực sự khôn khéo để chuyển từ các đường cong modular tới đường cong Fermat. Phần thực sự khó khăn của lập luận dường như là phải chứng minh rằng trường xác định của nghiệm phải thực sự giảm về Q.

Tôi không thể kiếm được đầy đủ các chi tiết, những chi tiết này cũng rất phức tạp...

Rốt cục, giả thuyết Taniyama - Shimura là không đúng. Các chuyên gia nghĩ rằng nó vẫn còn có thể cứu vãn được bằng cách mở rộng khái niệm biểu diễn tự đẳng cấu và đưa vào khái niệm "các đường cong dị thường" vẫn cho phép xuất hiện "một biểu diễn tựa-tự đẳng cấu".

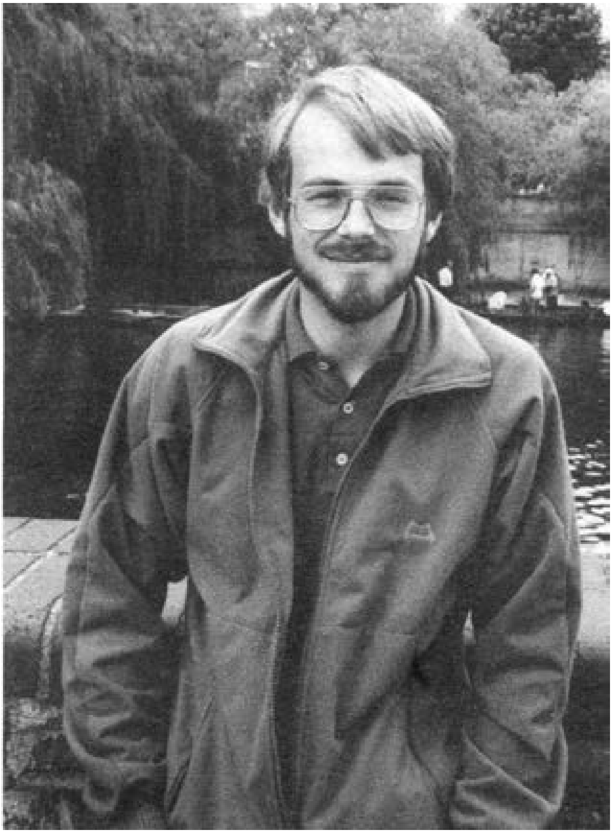
Henri Darmon

Đại học Princeton

Noam Elkies là giáo sư thuộc trường Đại học Harvard, người mà vào năm 1988 đã tìm ra một phản ví dụ cho giả thuyết Euler, do đó đã chứng minh được giả thuyết đó là sai:

$$2.682.440^4 + 15.365.639^4 + 187.960^4 = 20.615.673^4$$

Giờ đây dường như ông lại phát hiện ra một phản ví dụ cho Định lý cuối cùng của Fermat, và bằng cách đó chứng tỏ rằng nó cũng sai nốt.



Richard Taylor

Đó là một đòn tàn khốc đối với Wiles - thì ra cái sai của Định lý Fermat đã dẫn đến một hệ quả trực tiếp: vì định lý đó sai cho nên ông đã không thể sửa chữa được chứng minh của mình. Đó là một đòn còn tàn khốc hơn nữa đối với cộng đồng các nhà toán học, bởi vì nếu Định lý cuối cùng của Fermat là sai, thì Frey đã chứng tỏ được rằng điều đó sẽ dẫn tới một phương trình eliptic không phải là modular, và điều này mâu thuẫn trực tiếp với giả thuyết Taniyama - Shimura. Như vậy, Elkies không chỉ tìm ra phản ví dụ cho Fermat, mà ông còn gián tiếp tìm ra phản ví dụ cho giả thuyết Taniyama - Shimura.

Cái chết của giả thuyết Taniyama - Shimura đã kéo theo những hậu quả tàn phá ghê gớm đối với toàn bộ lĩnh vực lý thuyết số, bởi vì trong hơn hai thập kỷ, các nhà toán học đã ngầm thừa nhận tính chân lý của nó. Trong Chương 5 chúng ta đã thấy rằng các nhà toán học đã viết hàng tá những chứng minh bắt đầu với "Thừa nhận giả thuyết Taniyama - Shimura là đúng", thế mà giờ đây Elkies lại chứng tỏ được rằng giả thiết đó là sai và tất cả những chứng minh kia đều đồng thời sụp đổ theo. Các nhà toán học ngay lập tức bắt đầu yêu cầu cung cấp nhiều thông tin hơn và tới tấp gửi cho Elkies nhiều câu hỏi, nhưng không có trả lời và cũng không có giải thích tại sao lại im hơi mãi như vậy. Thậm chí không ai tìm được những chi tiết chính xác của phản ví dụ đó.

Sau một vài ngày xôn xao, một số nhà toán học xem lại e-mail mới nhận ra rằng mặc dù nó thường được đề ngày 2 tháng 4 hoặc 3 tháng 4, nhưng là do nó nhận được từ người thứ ba, thứ tư mà ra. Bức thư gốc thực ra là đề ngày 1 tháng 4 (ngày cá tháng Tư) tai hại, do nhà lý thuyết số Henri Darmon người Canada bịa ra. Đó là một bài học đích đáng cho những người chuyên phao tin đồn xung quanh Định lý cuối cùng của Fermat. Và cũng nhờ thế mà Định lý cuối cùng, Wiles, Taylor và cái chứng minh còn sai sót kia được để yên không bị quấy rầy một thời gian.

Mùa hè đó Wiles và Taylor không tiến bộ được một chút nào. Sau 8 tháng nỗ lực và bị ám ảnh liên tục, Wiles đã chuẩn bị chấp nhận đầu hàng. Ông nói với Taylor rằng ông không thấy lóe tia hy vọng nào để tiếp tục ý định sửa chữa lại chứng minh của họ nữa. Vì Taylor có kế hoạch ở Princeton cho đến hết tháng 9, nên anh đã đề nghị Wiles hãy cố thêm một tháng nữa dù Wiles rất thất vọng. Nếu vào cuối tháng 9 mà vẫn không có tín hiệu gì có thể sửa chữa được thì hãy đầu hàng, thừa nhận thất bại công khai và công bố chứng minh còn sai sót để những người khác có cơ hội xem xét.

Quà sinh nhật

Dường như số mệnh đã định trận chiến đấu của Wiles với bài toán hóc búa nhất thế giới sẽ kết thúc thất bại, nhưng khi nhìn lại, ông vẫn cho rằng phần còn lại của công trình mà ông đã thực hiện trong suốt bảy năm ròng rã là đúng. Việc bắt đầu sử dụng các nhóm Galois đã cho mọi người một sự hiểu biết mới, sâu sắc hơn về bài toán. Ông đã chứng minh được rằng phần tử đầu tiên của mọi phương trình eliptic đều kết đối với phần tử thứ nhất của một dạng modular. Sau đó, vấn đề đặt ra là phải chứng minh được rằng nếu một phần tử của phương trình eliptic là modular, thì phần tử tiếp theo cũng phải là modular, và như vậy có nghĩa là mọi phần tử sẽ đều là modular.

Trong khoảng thời gian đó Wiles đã phải vật lộn với việc mở rộng chứng minh. Ông đã cố gắng hoàn tất cách tiếp cận bằng quy nạp và đã vật lộn với lý thuyết Iwasawa với hy vọng nhờ sự giúp đỡ của nó ông có thể chứng minh được rằng nếu một quân đôminô đã đổ thì tất cả cũng sẽ đổ theo. Ban đầu lý thuyết Iwasawa dường như đủ mạnh để gây ra hiệu ứng đôminô nhưng rồi cuối cùng hóa ra nó không thể thỏa mãn những kỳ vọng của ông. Ông đã mất đứt hai năm nỗ lực để đi tới cái ngõ cụt toán học đó.

Vào mùa hè năm 1991, sau một năm lạc đường, Wiles đã gặp phương pháp Kolyvagin-Flach, và ngay lập tức ông đã bỏ lý thuyết Iwasawa để theo đuổi kỹ thuật mới này. Và thế rồi, một năm sau chứng minh được thông báo ở Cambridge và ông được tôn vinh như một người anh hùng. Nhưng hai tháng sau, phương pháp Kolyvagin-Flach đã được chỉ ra là sai, và từ đó tình hình ngày càng trở nên xấu đi. Mọi ý định sửa chữa lại phương pháp Kolyvagin-Flach đều bị thất bại.

Toàn bộ công trình của Wiles, trừ giai đoạn cuối có liên quan với phương pháp Kolyvagin-Flach, còn thì đều rất sáng giá. Giả thuyết Taniyama - Shimura và Định lý cuối cùng của Fermat tất nhiên là chưa được giải quyết, nhưng Wiles đã cung cấp cho các nhà toán học một loạt những kỹ thuật và chiến lược mới mà họ có thể sử dụng để chứng minh các định lý khác. Không có gì phải xấu hổ trong sự thất bại của Wiles và ông đã bắt đầu quen dần với triển vọng sẽ bị thất bại.

Để tìm một sự an ủi, ông muốn hiểu tại sao mình đã bị thất bại. Trong khi Taylor xem xét lại các phương pháp thay thế khác, Wiles quyết định dùng trọn tháng 9 để nhìn lại một lần nữa cấu trúc của phương pháp Kolyvagin-Flach để thử chỉ ra một cách chính xác tại sao nó lại không vận hành như ông mong muốn. Ông vẫn còn nhớ rất rõ những ngày cuối cùng định mệnh đó: "Một buổi sáng thứ hai, ngày 19 tháng 9, tôi đang ngồi bên bàn làm việc kiểm tra lại phương pháp Kolyvagin-Flach. Mặc dù không còn tin nó có thể vận hành tốt nữa, nhưng tôi nghĩ rằng ít ra tôi cũng phải biết được tại sao lại như vậy. Tất nhiên, tôi biết việc này cũng chẳng khác gì tìm kim đáy bể, nhưng tôi muốn lấy lại sự tự tin cho mình. Và rồi đột nhiên, hoàn toàn bất ngờ, tôi đã có được sự phát hiện huyền diệu đó. Tôi chợt nhận ra rằng mặc dù phương pháp Kolyvagin-Flach không vận hành tốt một cách hoàn chỉnh, nhưng đó là tất cả những gì tôi cần để làm cho lý thuyết Iwasawa ban đầu mà tôi đã sử dụng ba năm trước, giờ đây trở nên áp dụng được. Như vậy là từ đống tro tàn của phương pháp Kolyvagin-Flach đã xuất hiện câu trả lời đích thực cho bài toán".

Riêng bản thân lý thuyết Iwasawa cũng như riêng bản thân phương pháp Kolyvagin-Flach thôi thì không đủ. Kết hợp lại chúng sẽ bổ sung tuyệt vời cho nhau. Wiles không bao giờ có thể quên được thời điểm đầy hứng khởi này. Khi nhắc lại những thời khắc đó, ký ức vẫn còn mạnh mẽ tới mức ông rơm rớm nước mắt: "Nó đẹp tới mức không sao mô tả nổi; mà lại đơn giản và tao nhã nữa. Tôi không hiểu tại sao mà trước kia tôi lại không nhìn ra; tôi nhìn chằm chằm vào nó trong hơn hai mươi phút mà vẫn tưởng mình mơ. Sau đó trong ngày tôi cứ đi loanh quanh trong khoa, rồi lại trở về bàn làm việc nhìn xem nó có còn ở đó hay không. Nó vẫn còn đó. Tôi không thể kiềm chế được tình cảm của mình, vì quá xúc động. Đây là thời điểm quan trọng nhất trong cuộc đời làm việc của tôi. Không có gì mà tôi sẽ làm được sau này lại có nhiều ý nghĩa đến như vậy".

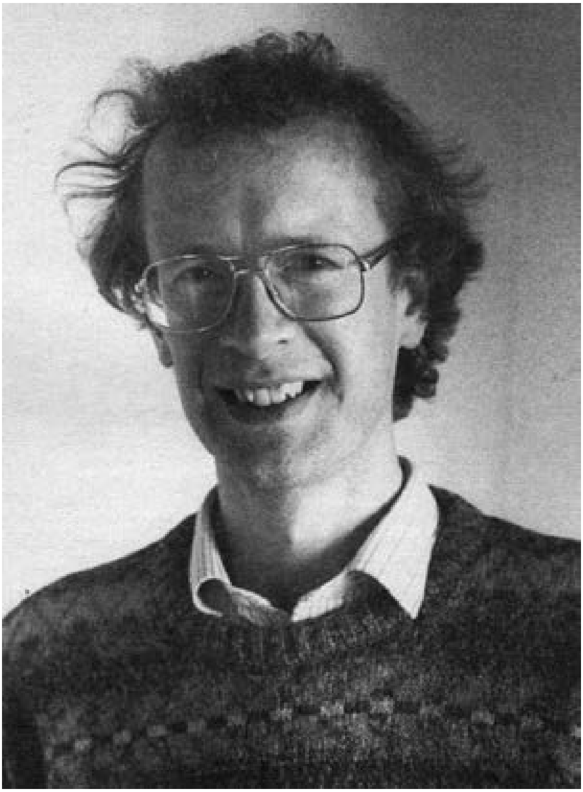
Đây không chỉ là sự thực hiện giấc mơ thuở ấu thơ và là kết cục của tám năm nỗ lực không mệt mỏi mà còn là một chiến công vĩ đại. Khi bị đẩy tới bờ vực của sự đầu hàng, Wiles đã phản công lại để chứng minh cho thế giới biết thiên tài của mình. Mười bốn tháng cuối cùng đã là một thời kỳ đau đớn, tủi nhục và tuyệt vọng nhất trong sự nghiệp toán học của ông. Giờ đây một phát hiện xuất sắc đã đặt dấu chấm hết cho những đau khổ của ông.

"Tối đó tôi trở về nhà và ngủ một giấc ngon lành. Sáng hôm sau, kiểm tra lại tất cả một lần nữa, hoàn thành vào lúc 11 giờ và cảm thấy hoàn toàn thỏa mãn, tôi đi xuống dưới nhà nói với vợ: 'Anh tìm ra rồi! Anh nghĩ là mình đã tìm ra rồi!'. Điều đó diễn ra bất ngờ đến nỗi vợ tôi lại nghĩ rằng tôi đang nói về thứ đồ chơi hay cái gì đó của bọn trẻ, và cô ấy hỏi lại: 'Tìm thấy cái gì?'. Tôi nói: 'Anh đã sửa được chứng minh của anh rồi. Anh đã tìm ra nó'."

Tháng sau, Wiles đã có thể thực hiện lời hứa mà ông đã không giữ được năm trước. "Lại đã tới ngày sinh của Nada và tôi nhớ rằng lần trước tôi đã không thể tặng nàng cái mà nàng mong muốn. Lần này, một nửa phút sau bữa ăn tối của chúng tôi trong đêm sinh nhật của Nada, tôi đã có thể trao cho nàng bản thảo hoàn chỉnh của chứng minh đó. Tôi nghĩ nàng sẽ thích món quà tặng này hơn bất cứ một món quà nào khác mà tôi đã từng tặng cho nàng".

Date: 25/10/94 11:04:11
Subject: Cập nhật về Định lý cuối cùng của Fermat

Buổi sáng nay đã có hai bản thảo được tung ra:
- Các đường cong eliptic modular và Định lý cuối cùng của Fermat, tác giả là Andrew Wiles.
- Các tính chất lý thuyết vành của một số đại số Hecke, tác giả là Richard Taylor và Andrew Wiles.
Bài báo thứ nhất (khá dài), ngoài những điều khác, đã thông báo về Định lý cuối cùng của Fermat, dựa trên bài báo thứ hai (ngắn hơn) như một bước quan trọng.



Andrew Wiles

Như đa số các bạn đã biết, những lập luận của Wiles được trình bày ở Cambridge có một khe hở rất nghiêm trọng, mà cụ thể là việc xây dựng hệ thống Euler. Sau những cố gắng sửa lại không thành công, Wiles đã quay trở lại một cách tiếp cận khác mà anh đã sử dụng trước kia nhưng đã vứt bỏ để dùng ý tưởng về hệ thống Euler. Và anh ấy đã hoàn tất được chứng minh của mình với giả thuyết rằng một số đại số Hecke là các điểm giao nhau. Mà điều này và các ý tưởng còn lại được mô tả trong báo cáo của Wiles ở Cambridge đã được viết đầy đủ trong bản thảo đầu tiên.

Taylor và Wiles cũng đã cùng nhau xác lập được những tính chất cần thiết của các số đại số Hecke trong bài báo thứ hai.

Những đường nét đại cương của lập luận hoàn toàn tương tự như Wiles đã mô tả ở Cambridge. Cách tiếp cận mới đơn giản và ngắn gọn hơn nhiều so với cách tiếp cận ban đầu, bởi vì nó vứt bỏ được hệ thống Euler. *(Thực ra, sau khi xem bản thảo này, Faltings còn đạt được sự đơn giản hóa nhiều hơn nữa đối với phần này của chứng minh).* Các phiên bản của bản thảo này hiện nằm trong tay một số ít người trong một ít tuần nữa. Mặc dù nên thận trọng trong một khoảng thời gian ngắn nữa, nhưng chắc chắn đã có lý do để lạc quan.

Karl Rubin

Đại học Quốc gia Ohio

VIII.
TOÁN HỌC THỐNG NHẤT

Có một chàng trai điên rồ người Miến Điện,
Đã tìm ra những chứng minh của Định lý Fermat,
Anh ta sống trong sự sợ hãi vô cùng,
Bởi một sai lầm có thể sẽ hiện ra,
Vì chứng minh vững chắc hơn hết thảy
Là của Wiles, anh vốn đã ngờ!

FERNANDO GOUVEA

Lần này thì không ai có thể nghi ngờ vào chứng minh được nữa. Hai bài báo, cả thảy gồm 130 trang, là những bản thảo toán học được săm soi kỹ lưỡng nhất trong lịch sử và cuối cùng đã được công bố trên tạp chí *Annals of Mathematics* (tháng 5 năm 1995).

Lại một lần nữa Wiles thấy mình được xuất hiện trên trang nhất của tờ *New York Times*, nhưng lần này cái tít nổi bật "Một nhà toán học tuyên bố đã giải được một câu đố kinh điển" đã phần nào bị che lấp bởi một thông tin khoa học khác - "Việc tìm ra tuổi của Vũ trụ đã đặt ra một câu đố mới". Trong khi các nhà báo lần này ít mặn mà hơn với Định lý cuối cùng của Fermat, thì các nhà toán học đã không thể làm ngơ trước tầm quan trọng đích thực của chứng minh. "Về phương diện toán học, chứng minh cuối cùng này của Wiles tương đương với phát minh ra sự phân chia hạt nhân hoặc tìm ra cấu trúc ADN", John Coates tuyên bố. "Chứng minh của Định lý Fermat là một chiến công vĩ đại của trí tuệ và người ta không thể làm ngơ trước một thực tế là nó đã tạo ra một cuộc cách mạng trong lý thuyết số. Đối với tôi, sự duyên dáng và vẻ đẹp trong công trình của Wiles là ở chỗ nó đã tạo một bước tiến khổng lồ đối với lý thuyết số đại số".

Trong cuộc "lưu đày" tám năm trời, Wiles đã thực sự thu thập tất cả những đột phá trong lý thuyết số của thế kỷ XX và gộp chúng vào chứng minh toàn năng của mình. Ông đã tạo ra được những kỹ thuật hoàn toàn mới và kết hợp chúng với những kỹ thuật truyền thống theo cách chưa bao giờ được xem là khả thi. Khi làm như vậy, ông đã mở ra những đường hướng mới trong việc công phá cả một đội quân những bài toán khác. Theo Ken Ribet, chứng minh của Wiles là sự tổng hợp hoàn hảo của toán học hiện đại và một khát vọng cho tương lai: "Tôi nghĩ rằng nếu bạn bị lạc trên một hòn đảo hoang vu và chỉ có một bản thảo của chứng minh đó trong tay, thì bạn đã có đủ thức ăn cho trí tuệ của mình. Bạn có thể thấy ở đó tất cả những ý tưởng chủ đạo của lý thuyết số. Lật giở trang đầu bạn sẽ thấy sự xuất hiện thấp thoáng một định lý cơ bản nào đó của Deligne, rồi lật sang một trang khác một cách tình cờ, bạn sẽ lại gặp một định lý của Hellegouarch - tất cả những cái đó đều được vẫy gọi vào cuộc chơi và được dùng chốc lát trước khi chuyển sang một ý tưởng tiếp sau".

Trong khi các nhà báo khoa học hết lời ca ngợi chứng minh của Wiles đối với Định lý cuối cùng của Fermat, thì một số ít trong họ cũng bình luận về chứng minh giả thuyết Taniyama - Shimura, giả thuyết đã có mối liên hệ khăng khít với Định lý Fermat. Một số ít trong họ cũng nhắc tới đóng góp của Yutaka Taniyama và Goro

Shimura, hai nhà toán học Nhật Bản, những người từ những năm 1950 đã gieo những hạt mầm đầu tiên cho công trình của Wiles. Mặc dù Taniyama đã tự sát hơn ba mươi năm trước, nhưng đồng nghiệp của ông là Shimura thì hiện vẫn còn sống và được chứng kiến giả thuyết của mình đã được chứng minh. Khi được hỏi về phản ứng của ông đối với chứng minh, Shimura cười hiền lành và vẫn theo phong thái điềm đạm và đàng hoàng, ông chỉ nói: "Thì tôi đã nói với anh rồi". Giống như nhiều đồng nghiệp của mình, Ken Ribet cảm thấy rằng việc chứng minh được giả thuyết Taniyama - Shimura đã làm biến đổi toán học: "Có một ảnh hưởng quan trọng về mặt tâm lý: giờ đây mọi người sẽ mạnh dạn đương đầu với những bài toán khác, mà trước kia họ nhút nhát không dám. Quang cảnh giờ đây cũng đã khác, ở chỗ bạn biết rằng tất cả các phương trình eliptic đều là modular và do đó khi bạn chứng minh các định lý đối với các phương trình eliptic cũng tức là bạn đã chứng minh đối với các dạng modular và ngược lại. Bạn cũng có một viễn cảnh khác về những gì sẽ diễn ra, bạn sẽ cảm thấy ít nhút nhát hơn với ý nghĩ phải làm việc với các dạng modular, bởi vì giờ đây về cơ bản bạn sẽ làm việc với các phương trình eliptic. Và, tất nhiên, khi bạn viết một bài báo về các phương trình eliptic, thay vì nói rằng: chúng ta không biết gì và do đó sẽ tạm cho rằng giả thuyết Taniyama - Shimura là đúng và xem điều gì có thể xảy ra, thì giờ đây ta có thể nói ngay rằng giả thuyết Taniyama - Shimura là đúng và do đó điều này và điều kia cần phải đúng. Đó là một trải nghiệm dễ chịu hơn nhiều".

Thông qua giả thuyết Taniyama - Shimura, Wiles đã thống nhất được thế giới eliptic với thế giới modular và khi làm như vậy ông đã cung cấp cho toán học một con đường tắt cho nhiều chứng minh khác - những bài toán trong một lĩnh vực này có thể được giải bằng sự tương tự với những bài toán trong lĩnh vực song song với nó. Các bài toán eliptic cổ điển còn chưa có lời giải từ thời cổ Hy Lạp giờ đây có thể được xem xét lại bằng cách dùng tất cả những công cụ và kỹ thuật modular đã có sẵn.

Thậm chí quan trọng hơn nữa là Wiles đã thực hiện được bước đầu tiên trong sơ đồ thống nhất rộng lớn hơn của Langlands, tức chương trình Langlands. Giờ đây đã có những nỗ lực mới nhằm chứng minh những giả thuyết có tính thống nhất khác giữa các lĩnh vực khác của toán học. Tháng 3 năm 1996, Wiles đã cùng Langlands chia sẻ giải thưởng Wolf trị giá 100.000 đôla (không nên nhầm lẫn với giải thưởng Wolfkehl). Hội đồng trao giải thưởng Wolf đã thừa nhận rằng ngoài việc chứng minh của Wiles bản thân nó đã là một kỳ tích đáng kinh ngạc, nó còn thổi sức sống cho sơ đồ đầy tham vọng của Langlands. Đây là một đột phá mở đường đưa toán học bước vào thời đại hoàng kim giải các bài toán.

Tiếp theo những năm tháng đầy bối rối và bất định, cộng đồng toán học giờ đây đã có thể hãnh diện. Bất cứ một hội nghị hay hội thảo nào đều có một phiên dành cho chứng minh của Wiles và thậm chí ở Boston các nhà toán học còn tổ chức một cuộc thi thơ hài hước để ghi nhớ thời điểm lịch sử này.

Những bài toán lớn còn chưa giải được

Wiles nhận thấy rằng để mang lại cho toán học một trong những chứng minh vĩ đại nhất của nó, ông đã phải lấy đi của nó một trong những câu đố vĩ đại nhất: "Người ta nói với tôi rằng tôi đã lấy đi mất bài toán của họ, và hỏi tôi sẽ còn mang lại cho họ điều gì nữa đây. Đúng là một cảm giác rất buồn. Chúng tôi mất đi một cái gì đó đã từng gắn bó với chúng tôi lâu đến như vậy, một cái gì đó đã dẫn dắt rất nhiều người trong số chúng tôi đi vào toán học. Với các bài toán toán học, có lẽ luôn luôn là như vậy. Giờ đây chúng tôi phải tìm ra những bài toán mới để cuốn hút tâm trí của mình".

Thậm chí mặc dù Wiles giờ đây đã giải được bài toán nổi tiếng nhất trong toán học, nhưng những người giải đố trên khắp thế giới cũng không mất hy vọng, bởi lẽ còn có cả đống bài toán còn chưa giải được. Nhiều bài trong số đó, giống như Định lý cuối cùng của Fermat, đã bắt nguồn từ toán học của thời kỳ cổ Hy Lạp và một cậu học trò cũng có thể hiểu được. Ví dụ, còn có rất nhiều bí ẩn liên quan với các số hoàn hảo. Như đã nói trong Chương 2, các số hoàn hảo là những số có tổng các ước số đúng bằng chính số đó. Ví dụ, 6 và 28 là những số hoàn hảo bởi vì:

1, 2 và 3 là ước số của 6, đồng thời 6 = 1 + 2 + 3,

1, 2, 4, 7, 14 là ước số của 28,

đồng thời 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.

René Descartes nói rằng "Cũng giống như con người hoàn hảo, các số hoàn hảo là rất hiếm" và quả thật trong mấy ngàn năm trở lại đây người ta cũng mới chỉ phát hiện được 30 số. Số hoàn hảo được phát hiện mới nhất và cũng là lớn nhất chứa 130.000 chữ số và được xác định bằng công thức:

$$2^{216090} \times 2^{216091} - 1$$

Một tính chất mà tất cả các số hoàn hảo đã biết đều có chung, đó là chúng đều là số chẵn, và điều này gợi ý rằng phải chăng tất cả các số hoàn hảo đều là chẵn, cần phải chứng minh điều này đúng - đó là một thách thức

Một câu đố lớn khác về các số hoàn hảo là liệu số lượng của chúng có vô hạn không. Mặc dù trong nhiều thế kỷ hàng ngàn nhà lý thuyết số đều đã thất bại trong việc chứng minh có hay không có một số vô hạn các số hoàn hảo. Người nào thành công chắc chắn sẽ có được một vị trí trong lịch sử.

Một câu đố thuộc lĩnh vực khác về những bài toán cổ chưa giải được, đó là lý thuyết các số nguyên tố. Dãy các số nguyên tố không tạo nên một hình mẫu rõ rệt, dường như các số này xử sự không theo một quy luật nào. Chúng được mô tả như những hạt giống được vãi một cách ngẫu nhiên giữa các số tự nhiên. Khi kiểm tra qua các số tự nhiên, người ta có thể tìm được những vùng rất giàu các số nguyên tố, nhưng không biết vì những lý do gì, ở những vùng khác lại hoàn toàn thưa vắng. Trong nhiều thế kỷ, các nhà toán học đã thử nhưng thất bại trong việc giải thích hình mẫu nằm sau các số nguyên tố. Cũng có thể cái hình mẫu đó không tồn tại chăng, và các số nguyên tố đã bộc lộ sự phân bố ngẫu nhiên cố hữu của nó. Nếu đúng như vậy thì các nhà toán học nên tìm giải những bài toán khác ít tham vọng hơn về các số nguyên tố.

Ví dụ, hai ngàn năm trước, Euclid đã chứng minh được rằng có một số vô hạn các số nguyên tố (xem Chương 2), nhưng trong hai thế kỷ gần đây các nhà toán học đã thử chứng minh rằng cũng có một số vô hạn các số nguyên tố sinh đôi. Các số nguyên tố sinh đôi là cặp số hơn kém nhau chỉ 2 đơn vị, đó là các số nguyên tố ở gần nhau nhất - chúng không thể khác nhau 1 đơn vị được bởi vì khi đó một số sẽ là chẵn và chia hết cho 2, do đó không thể là số nguyên tố. Những ví dụ về các số nguyên tố sinh đôi nhỏ là: (5, 7) và (17, 19); những số lớn là (22.271, 22.273) và (1.000.000.000.061 và 1.000.000.000.063). Các số nguyên tố sinh đôi dường như cũng nằm rải rác trong dãy các số tự nhiên, và họ càng chịu khó tìm kiếm thì lại càng phát hiện ra nhiều. Có một bằng chứng khá mạnh chứng tỏ rằng có một số vô hạn các số nguyên tố sinh đôi nhưng chưa có ai chứng minh được điều đó là đúng.

Đột phá mới đây nhất trên con đường tìm kiếm chứng minh giả thuyết các số nguyên tố sinh đôi đã được thực hiện từ năm 1966, khi nhà toán học Trung Quốc Chen Jing-run đã chứng minh được rằng có một số vô hạn các cặp gồm một số nguyên tố và một số gần như nguyên tố. Các số nguyên tố thực sự là những số không có ước số, trừ 1 và chính nó, nhưng các số gần như nguyên tố là số gần gũi nhất với số nguyên tố: nó chỉ có hai ước số nguyên tố. Ví dụ 17 là số nguyên tố, nhưng 21 (= 3×7) là số gần như nguyên tố. Nhưng số như 120 (= 2×3×4×5) hoàn toàn là không nguyên tố bởi vì nó là tích của nhiều hơn 2 thừa số nguyên tố. Chen đã chứng minh được rằng những trường hợp trong đó có một số nguyên tố sinh đôi với một số nguyên tố khác hoặc với một số gần như nguyên tố là vô hạn. Ai đi được bước tiếp theo, bỏ được chữ "gần như" đi sẽ là người thực hiện được một đột phá lớn nhất trong lý thuyết các số nguyên tố kể từ thời Euclid.

Một câu đố khác về các số nguyên tố ra đời từ tận năm 1742 khi Chritian Goldbach, thầy dạy của Nga Hoàng Peter II ở tuổi lên 10, viết một bức thư gửi cho nhà toán học Thụy Sĩ nổi tiếng Leonhard Euler. Goldbach đã kiểm tra hàng chục các số chẵn và thấy rằng nó có thể được tách ra thành tổng của hai số nguyên tố:

4	=	2 + 2
6	=	3 + 3
8	=	3 + 5
10	=	5 + 5
12	=	5 + 7
50	=	19 + 31
100	=	53 + 47
21000	=	17 + 20983

...

Goldbach đã hỏi Euler rằng liệu ông có chứng minh được mọi số chẵn đều có thể tách ra thành hai số nguyên tố không. Mặc dù nhiều năm nỗ lực, nhưng người được mệnh danh là "hiện thân của giải tích" cũng đã phải bó tay trước thách thức của Goldbach. Trong thời đại máy tính ngày nay, giả thuyết Goldbach, như người ta vẫn gọi, đã được kiểm tra và thấy rằng nó đúng cho tới con số 100.000.000, nhưng vẫn chưa có ai chứng minh được rằng giả thuyết này là đúng đối với mọi số chẵn đến tận vô cùng. Các nhà toán học đã có thể chứng minh được rằng mọi số chẵn là tổng của không hơn 800.000 số nguyên tố, nhưng điều này còn xa mới chứng minh được giả thuyết ban đầu. Nhưng cho dù như vậy đi nữa, những chứng minh chưa hoàn chỉnh như thế cũng cho ta sự hiểu biết sâu sắc hơn về bản chất các số nguyên tố và vào năm 1941 Stalin đã trao giải thưởng 100.000 rúp cho nhà toán học Nga Ivan Matveyevich Vinogradov, người đã tiến một bước gần hơn tới chứng minh giả thuyết Goldbach.

Trong số tất cả các bài toán có khả năng thay thế cho Định lý cuối cùng của Fermat, với tư cách là bài toán toán học vĩ đại nhất còn chưa giải được, thì có lẽ bài toán xếp các quả cầu của Kepler là ứng viên sáng giá nhất. Năm 1609, nhà khoa học người Đức Johannes Kepler đã chứng minh được rằng các hành tinh chuyển động theo các quỹ đạo hình elip chứ không phải hình tròn như người ta vẫn tưởng, một phát minh đã gây ra một cuộc cách mạng trong thiên văn học và sau này đã khích lệ Isaac Newton rút ra định luật vạn vật hấp dẫn. Di sản toán học của Kepler về tầm cỡ không to lớn bằng nhưng cũng sâu sắc không kém. Nó chủ yếu liên quan với bài toán xếp các quả cam sao cho có hiệu quả nhất.

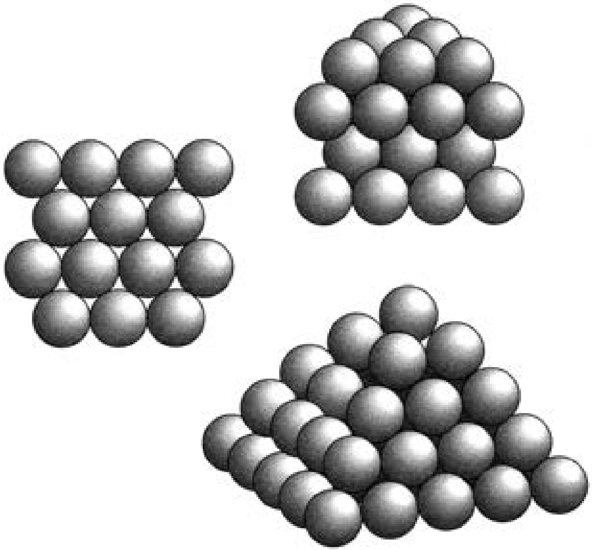
Bài toán này ra đời năm 1611, khi Kepler viết bài báo nhan đề "Về các bông tuyết sáu cánh", một món quà mừng năm mới cho ông chủ của mình là John Wacker xứ Wackenfels. Kepler đã giải thích thành công tại sao các bông tuyết lại có một cấu trúc duy nhất, đó là hình sao lục giác, bằng cách đưa ra giả thiết rằng mỗi bông tuyết đều bắt đầu từ một hạt mầm đã có sẵn đối xứng lục giác, hạt mầm này lớn lên trong quá trình rơi xuống qua khí quyển. Những điều kiện thay đổi liên tục của gió, nhiệt độ và độ ẩm lẽ ra sẽ làm cho mỗi bông tuyết có một cấu trúc riêng biệt, nhưng do các hạt mầm nhỏ tới mức những điều kiện quyết định hình mẫu tăng trưởng của chúng vẫn còn là như nhau đối với tất cả sáu cạnh của nó, đảm bảo cho đối xứng đó vẫn được duy trì. Trong bài báo có vẻ vô thưởng vô phạt đó, Kepler, người có tài tuyệt vời trong việc rút ra những hiểu biết sâu sắc từ những quan sát đơn giản nhất, đã đặt cơ sở cho khoa tinh thể học.

Sự quan tâm của Kepler đến chuyện các hạt vật chất sắp xếp và tự tổ chức như thế nào đã dẫn ông tới bàn về một vấn đề khác, cụ thể là cách xếp các hạt thế nào là có hiệu quả nhất để cho chúng chiếm ít thể tích nhất có thể được? Nếu coi các hạt là những hình cầu, thì một điều rõ ràng là dù có xếp theo bất cứ cách nào, cũng không tránh khỏi còn những kẽ hở giữa các hạt, và bài toán đặt ra ở đây là tìm cách sắp xếp để cho những khe hở đó là cực tiểu. Để giải quyết bài toán đó, Kepler đã dựng những cách sắp xếp khác nhau và sau đó tính hiệu quả xếp của mỗi cách đó.

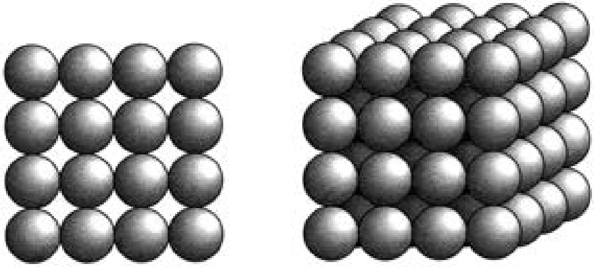
Một trong những cách sắp xếp đầu tiên mà Kepler khảo sát là mạng lập phương tâm mặt. Mạng này được xây dựng trước hết bằng cách tạo một lớp đáy những hình cầu sao cho mỗi quả cầu được bao quanh bởi 6 quả cầu khác. Lớp thứ hai được tạo ra bằng cách đặt những quả cầu vào chỗ hõm của lớp đầu tiên, như được minh họa trên Hình 24. Lớp thứ hai thực sự chính là bản sao của lớp thứ nhất, chỉ khác một điều là nó hơi dịch ngang một chút để xếp chặt các quả cầu vào vị trí. Cách sắp xếp này đúng là cách mà những người bán hoa quả thường hay dùng để xếp các quả cam thành những hình tháp, và nó có hiệu quả là 74%. Điều này có nghĩa là nếu xếp cam vào một hộp lớn bằng cách dùng phương pháp lập phương tâm mặt nói ở trên thì các quả cam sẽ chiếm 74% thể tích của hộp.

Cách sắp xếp này có thể so với các cách khác như mạng lập phương đơn giản, chẳng hạn. Trong trường hợp này, mỗi lớp gồm những quả cầu được xếp thành một lưới hình vuông và lớp này được đặt trực tiếp lên trên lớp kia, như được minh họa trên Hình 25. Mạng lập phương đơn giản có hiệu quả xếp là 53%.

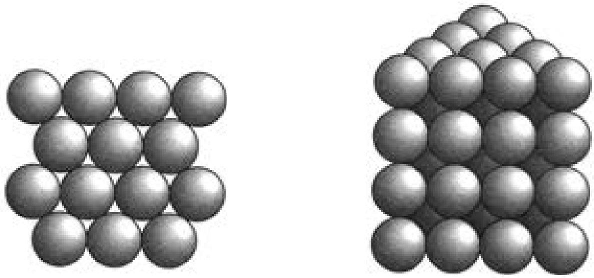
Một cách sắp xếp khác là mạng lục giác, nó tương tự như mạng lập phương tâm mặt ở chỗ mỗi quả cầu được bao quanh bởi 6 quả cầu khác, nhưng thay vì hơi dịch mỗi lớp đi để các quả xếp vào chỗ



Hình 24. Trong cách xếp lập phương tâm mặt, mỗi một lớp các quả cầu được xếp sao cho mỗi quả được bao xung quanh bởi 6 quả khác. Một lớp sau đó được đặt nằm ngang lên trên một lớp khác sao cho một quả cầu được đặt vào chỗ hõm chứ không trực tiếp đặt lên trên một quả cầu khác. Một sự định hướng cụ thể của cách sắp xếp đó sẽ cho ta hình tháp những quả cam quen thuộc của người bán hoa quả.



Hình 25. Trong cách xếp lập phương đơn giản, mỗi lớp gồm các quả cầu được xếp thành một lưới hình vuông sao cho lớp này được xếp nằm ngang lên trên một lớp kia sao cho mỗi quả cầu được đặt trực tiếp lên trên một quả cầu khác.



Hình 26. Trong cách xếp mạng lục giác, mỗi lớp gồm các quả cầu được xếp sao cho mỗi quả cầu được bao quanh bởi 6 quả cầu khác. Một lớp sau đó được xếp nằm ngang lên trên một lớp kia sao cho mỗi quả cầu được đặt trực tiếp lên trên một quả cầu khác.

hõm ở lớp dưới, thì bây giờ các quả cầu ở lớp trên được xếp trực tiếp lên trên các quả cầu ở lớp dưới, như được minh họa trên Hình 26. Mạng lục giác có hiệu quả xếp là 60%.

Kepler đã nghiên cứu rất nhiều cấu hình khác nhau và đi tới kết luận mà ông cho là đáng được đưa vào bài báo "Về những bông tuyết sáu cánh", cụ thể là mạng lập phương tâm mặt là "cách xếp chặt nhất có thể được". Phát biểu của Kepler là hoàn toàn có lý, bởi vì hiệu quả xếp của mạng lập phương tâm mặt là tốt nhất mà ông đã tìm thấy, nhưng điều đó cũng không loại trừ khả năng có một cách sắp xếp nào đó với hiệu quả xếp còn cao hơn nữa mà ông đã bỏ qua chưa xét. Một chút nghi ngờ vẫn lảng vảng trong lòng bài toán xếp các quả cầu, một câu đố ra đời còn sớm hơn Định lý cuối cùng của Fermat tới hơn nửa thế kỷ và giờ đây hóa ra thậm chí lại còn khó giải hơn cả Định lý Fermat. Bài toán này đòi hỏi các nhà toán học phải chứng minh được rằng mạng lập phương tâm mặt chắc chắn là cách xếp các quả cầu có hiệu quả nhất.

Giống như Định lý cuối cùng, bài toán Kepler đòi hỏi các nhà toán học phải đưa ra một cách chứng minh bao quát được một số vô hạn các khả năng. Fermat khẳng định rằng trong số vô hạn các số tự nhiên, không có nghiệm nào cho phương trình của ông, còn Kepler thì khẳng định rằng trong số vô hạn các cách sắp xếp thì không có cách nào hiệu quả hơn mạng lập phương tâm mặt. Ngoài việc phải chứng minh rằng không có mạng nào khác, ý muốn nói là các mạng có cấu trúc đều đặn, có hiệu quả cao hơn, các nhà toán học cũng còn phải bao hàm được cả mọi cách sắp xếp ngẫu nhiên nữa trong chứng minh của họ.

Trong 380 năm trở lại đây chưa có ai chứng minh được rằng mạng lập phương tâm mặt đúng là chiến lược sắp xếp tối ưu; mặt khác, cũng chưa ai phát hiện ra một cách sắp xếp nào khác có hiệu quả hơn. Việc không đưa ra được phản ví dụ có nghĩa là đối với tất cả những ứng dụng trong thực tế, phát biểu của Kepler coi như là đúng, nhưng trong thế giới tuyệt đối của toán học thì còn cần phải có một chứng minh chặt chẽ. Điều này đã dẫn đến việc một chuyên gia về xếp các quả cầu là C. A. Rogers bình luận rằng tuyên bố của Kepler là một khẳng định mà "phần lớn các nhà toán học đều tin, và tất cả các nhà vật lý đều biết".

Mặc dù chưa có một chứng minh hoàn chỉnh, nhưng trong nhiều thế kỷ nay cũng đã có được một ít cột mốc trên con đường tiến tới lời giải của bài toán này. Năm 1892, một nhà toán học Scandinavie là Axel Thue đã đưa ra một chứng minh cho bài toán Kepler trong trường hợp hai chiều, tức là cách nào là hiệu quả nhất trong việc xếp các quả cầu khi chỉ xét một lớp, hay nói cách khác là xếp các quả cam trong khay chứ không phải trong hộp. Lời giải là cách xếp lục giác. Sau đó, Tóth, Serge và Mahler cũng đi tới cùng kết luận đó, nhưng các phương pháp của họ đều không áp dụng được cho bài toán gốc ba chiều của Kepler.

Trong thời hiện đại, một số nhà toán học đã thử dùng nhiều chiến thuật khác nhau để đặt một giới hạn trên cho hiệu quả xếp khả dĩ. Năm 1958, C. A. Rogers đã tính được giới hạn trên đó là 77,97%, điều này nghĩa là không thể có một cách sắp xếp nào mà hiệu quả xếp của nó vượt quá 77,97%. Số phần trăm này cao hơn hiệu quả xếp của mạng lập phương tâm mặt (74,04%) không nhiều. Do đó, nếu có một cách sắp xếp nào có hiệu quả cao hơn mạng lập phương tâm mặt thì cũng chỉ hơn được vài phần trăm mà thôi. Cách sắp xếp siêu phàm, nếu có, đã đi vào qua cái cửa sổ bé xíu 3,93% để chứng tỏ Kepler là sai. Sau Rogers, các nhà toán học khác đã cố gắng đóng hẳn cái cửa sổ đó lại, bằng cách hạ thấp giới hạn trên đó xuống còn 74,04%, khi đó sẽ không còn có một cách sắp xếp nào khác có thể lọt vào và đánh bại hiệu quả của mạng lập phương tâm mặt và do đó cũng có nghĩa là đã chứng minh được Kepler đúng. Thật không may, việc hạ thấp giới hạn trên hóa ra lại là một quá trình hết sức chậm chạp và khó khăn, tới năm 1988, nó mới hạ được xuống còn 77,84%, chỉ tốt hơn kết quả của Rogers chẳng được là bao.

Mặc dù trải qua nhiều năm tiến bộ hết sức chậm chạp, bài toán sắp xếp các quả cầu bỗng đột nhiên xuất hiện trên báo chí với những hàng tít lớn, khi Wu-Yi Hsiang thuộc trường Đại học California ở Berkeley đã công bố một kết quả mà ông khẳng định là chứng minh của giả thuyết Kepler. Ban đầu cộng đồng các nhà toán học đã đáp lại hết sức lạc quan, nhưng cũng như với chứng minh của

Wiles, bài báo phải trải qua một quá trình kiểm tra gắt gao trước khi nó được chấp nhận là đúng. Rồi nhiều tuần trôi qua, Hsiang đã phải đối mặt với rất nhiều sai lầm và chứng minh đã bị bỏ lại trong đống tan hoang.

Trong câu chuyện tương tự như trường hợp của Wiles, một năm sau Hsiang đã đáp lại bằng một chứng minh đã được sửa chữa và lần này ông tuyên bố rằng ông đã khắc phục được hết mọi vấn đề được phát hiện ra trong bản thảo đầu tiên. Tuy nhiên, những người phê bình vẫn tin rằng còn có nhiều khe hở trong logic của ông. Trong một bức thư gửi Hsiang, nhà toán học Thomas Hales đã cố gắng giải thích rõ mối nghi ngờ của mình:

> Một điều thừa nhận đã được đưa ra trong bài báo thứ hai của anh đã gây cho tôi ấn tượng nó còn cơ bản hơn và khó chứng minh hơn những cái khác... Anh đã phát biểu rằng "cách tốt nhất (tức là cực tiểu hóa thể tích) để thêm vào một lớp xếp thứ hai cần phải bịt được càng nhiều lỗ hổng càng tốt...". Lập luận của anh dựa chủ yếu trên giả thiết đó, nhưng không ở đâu tìm thấy, dù chỉ là manh mối, sự chứng minh cho nó."

Từ khi có bài báo thứ hai của Hsiang đã diễn ra một trận luận chiến không ngừng giữa ông và những người phê bình, với những lời khẳng định và phủ định rằng những vấn đề đã được giải quyết và chưa được giải quyết. Trong trường hợp tốt nhất có thể coi chứng minh này vẫn còn đang trong vòng tranh cãi, còn tồi tệ nhất thì nó đã mất uy tín hoàn toàn, nghĩa là cánh cửa vẫn còn mở cho bất cứ ai muốn chứng minh giả thuyết Kepler. Năm 1996, Doug Muder đã cho một tổng kết cá nhân về tình hình này, trong đó có hé mở một số chuyện hấp dẫn xung quanh chứng minh của Hsiang.

"Tôi mới trở về từ Hội nghị Nghiên cứu Mùa hè Liên hợp AMS-IMS-STAM về Hình học Rời rạc và Tính toán tổ chức ở Mount Holyoke. Đây là Hội nghị cứ 10 năm tổ chức một lần và do đó nó tập trung vào việc đánh giá những tiến bộ trong 10 năm trở lại đây. Tuyên bố của Hsiang là đã chứng minh được giả thuyết Kepler giờ đây đã được 6 năm, và tôi thấy cộng đồng đã đạt được sự nhất trí rằng: không ai chấp nhận nó.

Trong những báo cáo tại các phiên toàn thể và trong các cuộc thảo luận không chính thức ở căng tin, những điểm sau đây đã được nhất trí hoàn toàn:

1. Bài báo của Hsiang (được công bố trong tạp chí *International Journal of Mathematics*, năm 1993) không phải là chứng minh của giả thuyết Kepler. May lắm mới có thể coi nó là một phác thảo (những 100 trang!) về việc tiến hành chứng minh như thế nào.

2. Ngay cả với tư cách là một phác thảo thì bài báo cũng không đầy đủ, vì người ta đã tìm được những phản ví dụ cho một số bước trong đó.

3. Tuyên bố có liên quan của Hsiang là đã chứng minh được giả thuyết Dodecahedron (và nhiều bài toán xếp các quả cầu chưa giải được trước kia) cũng không có cơ sở tương tự.

4. Những nghiên cứu về giả thuyết Kepler và giả thuyết Dodecahedron vẫn cần được tiếp tục như chưa hề bao giờ tồn tại bài báo của Hsiang.

Trong một báo cáo, Gabor Fejes Tóth thuộc Viện Hàn lâm Khoa học Hungari đã nói về bài báo của Hsiang như sau: "Nó không thể được coi như một chứng minh. Bài toán vẫn còn để mở". Thomas Hales thuộc trường Đại học Michigan cũng đồng ý như vậy: "Bài toán này vẫn còn chưa được giải. Tôi vẫn chưa giải được nó và Hsiang cũng chưa giải được. Và theo như tôi biết thì chưa ai giải được". (Hales đã tiên đoán rằng những kỹ thuật riêng của ông sẽ cho phép giải được bài toán này trong vòng "một hay hai năm tới").

Điều làm cho câu chuyện này trở nên lý thú là trong sự đồng thuận đó còn vắng mặt một người - bản thân Hsiang (ông ấy đã không tham gia Hội nghị). Hsiang biết rất rõ về các phản ví dụ cũng như thực tế là những tuyên bố của ông ấy không được các chuyên gia cùng lĩnh vực tin cậy, nhưng ông ấy vẫn tiếp tục đi giảng trên khắp thế giới, và ở đâu cũng lặp đi lặp lại những tuyên bố của mình. Những người có va chạm cá nhân với Hsiang (như Hales và Bezdek) đều tin rằng ông ta sẽ không bao giờ chấp nhận bài báo của mình sai.

Đó chính là lý do giải thích tại sao thời gian kéo dài lâu như vậy mà đám bụi vẫn chưa lắng xuống. Hsiang lần đầu tiên tuyên bố đã chứng minh được giả thuyết Kepler vào năm 1990, tức là 6 năm trước. Những cuộc nói chuyện của ông ta thường khá mập mờ để người nghe dễ tin. Nhiều tháng sau lần tuyên bố đầu tiên, khi bản photo đầu tiên xuất hiện, những khe hở trong bài báo đó đã được phát hiện gần như ngay lập tức, và những phản ví dụ cũng nhanh chóng được đưa ra sau đó. Nhưng việc Hsiang vẫn tiếp tục tuyên bố công khai đã tạo ra một ấn tượng rằng ông ta đã phải xử lý mọi phản đối xuất hiện cho tới lúc đó. Độ dài của bài báo đã trải qua mấy lần lặp đi lặp lại làm cho tình hình càng rối ren thêm.

Trường hợp của Hsiang cho thấy toán học dựa trên một hệ thống danh dự đạt tới quy mô nào. Cộng đồng vốn đã thừa nhận rằng các vị giáo sư có chức quyền trong các trường đại học hàng đầu sẽ không tung ra những tuyên bố giả mạo và sẽ rút ngay lại những lời tuyên bố không đúng ngay sau khi sai lầm đầu tiên đã được chứng minh. Nhưng một số người coi thường hệ thống đó đã tạo ra sự rối ren trong thời gian dài vì người ta đâu có thì giờ hoặc động cơ để đi theo anh ta khắp thế giới và vạch trần những tuyên bố mỗi khi anh ta tung ra.

Hsiang có thể không bao giờ thừa nhận sai lầm của mình, nhưng còn tạp chí *International Journal* nơi đã đăng bài báo của Hsiang thì sao? Họ cũng có một phần trách nhiệm. Bài báo đã không được phản biện một cách thích đáng, nếu như nó đã được phản biện. Tạp chí này đâu có quan tâm tới bài toán xếp các quả cầu trước khi có bài báo của Hsiang. Mà cũng rõ ràng là Hsiang đã chọn tạp chí này là do các bạn mình chịu trách nhiệm xuất bản tờ báo, chứ không phải bởi vì nó là nơi đến thích hợp cho bài báo đó.

Karoly Bezdek, người đã mất hơn một năm làm việc với Hsiang với ý định lấp đầy những khe hở trong bài báo, cũng đã gửi một bài để đăng trên tờ tạp chí này, trong đó có chứa một phản ví dụ cho một bổ đề của Hsiang. Nhưng họ vẫn ngâm đó từ tháng 12, một thời gian bình thường đối với một bài báo cần phải có phản biện, nhưng lại là quá dài đối với một phản ví dụ cho một bài báo đã đăng trên tạp chí đó nhiều năm trước.

DOUG MUDER

Những chứng minh nhờ máy tính

Trong cuộc chiến đấu của mình chống lại Định lý cuối cùng của Fermat, vũ khí duy nhất của Wiles là bút chì, giấy và logic thuần túy. Mặc dù chứng minh của ông dùng phần lớn những kỹ thuật hiện đại trong lý thuyết số, nhưng nền tảng của nó vẫn là Pythagore và Euclid. Tuy nhiên, mới đây đã có những dấu hiệu không hay cho rằng lời giải của Wiles có thể là một trong số những ví dụ cuối cùng của một chứng minh mang tính chất đột phá và những kết quả trong tương lai có thể sẽ dựa trên một cách tiếp cận máy móc hơn là những suy luận tao nhã.

Một trong những chỉ dẫn đầu tiên cho thấy sự suy thoái của toán học liên quan tới một bài toán đã được sáng tạo ra ở Anh quốc vào tháng 10 năm 1852 bởi một nhà toán học không chuyên tên là Francis Guthrie. Một buổi chiều, trong khi đang uể oải ngồi tô màu bản đồ các hạt của nước Anh, Guthrie bỗng vấp phải một vấn đề xem ra có vẻ tầm thường nhưng ông lại không sao giải quyết nổi. Ông đơn giản chỉ muốn biết số tối thiểu các màu cần thiết để tô bất kỳ một bản đồ nào, sao cho hai vùng có biên giới chung phải được tô bằng hai màu khác nhau.

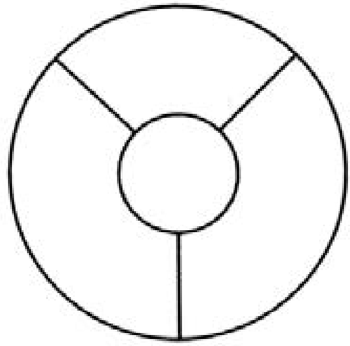
Ví dụ ba màu là không đủ để tô hình mẫu trên Hình 27. Do đó rõ ràng là một số bản đồ đòi hỏi phải có bốn màu, nhưng Guthrie lại muốn biết liệu bốn màu có đủ cho tất cả các bản đồ hay lại phải cần tới năm, sáu hay nhiều màu hơn nữa?

Thất vọng nhưng vẫn tò mò muốn biết, Guthrie bèn kể về bài toán này cho Frederick, em trai của mình, lúc đó là sinh viên của trường Đại học Luân Đôn. Sau đó, Frederick lại đưa bài toán đó cho giáo sư của mình là nhà toán học nổi tiếng Augustus de Morgan; rồi ông này, vào ngày 23 tháng 10, lại viết thư cho nhà toán học và vật lý vĩ đại người Ailen William Rowan Hamilton:

> Hôm nay có một sinh viên đề nghị tôi giải thích cho cậu ấy một thực tế - quả thật tôi cũng không biết có phải là một thực tế hay không - nhưng tôi đã không làm được. Cậu ta nói rằng nếu như một hình được chia nhỏ ra theo một cách nào đó và các vùng được tô bằng những màu khác nhau thì chỉ cần bốn màu là đủ, không hơn. Tôi cũng có một trường hợp cho thấy bốn màu là đủ. Và một câu hỏi được đặt ra là liệu có cần tới 5 màu hoặc nhiều hơn nữa không... Nếu anh vặn lại rằng với một trường hợp quá

ư đơn giản mà tôi tìm không ra chứng tỏ tôi là một con vật ngốc nghếch thì tôi nghĩ tốt nhất là mình nên im lặng như con nhân sư vậy...

Francis Guthrie đã nhận thấy rằng ông có thể tô màu bản đồ các hạt của nước Anh bằng bốn màu, đồng thời không để cho các hạt cạnh nhau được tô cùng một màu. Sau đó ông đã băn khoăn tự hỏi liệu một bản đồ bất kỳ có đòi hỏi hơn bốn màu hay không?



Hình 27. Hình mẫu đơn giản này cho thấy rằng ít nhất cần phải có bốn màu để tô một số bản đồ, nhưng liệu bốn màu có đủ để tô mọi bản đồ hay không?

Hamilton cũng không thể phát minh ra được một bản đồ nào đòi hỏi tới 5 màu, nhưng ông cũng không chứng minh được những bản đồ như vậy không tồn tại. Tin về bài toán này lan truyền rất nhanh khắp châu Âu, nhưng nó vẫn chống trả lại một cách quyết liệt sự công phá từ khắp mọi nơi, tỏ rõ sự hóc búa đến vô vọng của nó. Trong cơn quá kiêu hãnh, Hermann Minkowski đã nói rằng sở dĩ bài toán này còn chưa giải được là do chỉ mới có các nhà toán học hạng ba thử giải nó, nhưng chính những nỗ lực của ông cũng đã kết thúc thất bại. "Chúa đã nổi giận bởi sự ngu xuẩn của tôi", ông tuyên bố. "Chứng minh của tôi cũng có sai sót".

Mặc dù đã phát minh ra một trong những bài toán hóc búa nhất trong toán học mà hiện nay được gọi là bài toán bốn màu, nhưng Francis Guthrie đã rời nước Anh tới hành nghề luật sư ở Nam Phi. Nhưng rồi cuối cùng ông cũng trở về với toán học với tư cách là một giáo sư của Đại học Cape Town, nơi ông dành nhiều thời gian cho Khoa thực vật học hơn là với các đồng nghiệp toán học của mình. Điều đáng chú ý nhất ở ông, ngoài bài toán bốn màu, đó là tên của ông được đặt cho cây thạch nạm - Erica guthriei.

Sau một phần tư thế kỷ không ai giải được, vào năm 1879, người ta đã vô cùng lạc quan khi nhà toán học người Anh Alfred Bray Kempe công bố một bài báo trên tạp chí *American Journal of Mathematics* trong đó ông tuyên bố rằng đã giải được câu đố của Guthrie. Kempe dường như đã chứng minh được rằng mọi bản đồ đều đòi hỏi tối đa bốn màu và thủ tục kiểm tra chặt chẽ dường như cũng đã công nhận điều đó. Ngay lập tức Kempe được bầu làm thành viên của Hội Hoàng gia Luân Đôn và cuối cùng đã được phong hiệp sĩ do những đóng góp của mình cho toán học.

Sau đó, vào năm 1890, Percy John Heawood, một giảng viên ở Đại học Durham, đã công bố một bài báo làm chấn động các trung tâm toán học. Mười năm sau khi Kempe dường như đã giải được bài toán Guthrie, Heawood đã chứng tỏ được rằng cái được gọi là chứng minh của Kempe đã phạm sai lầm một cách cơ bản. Tuy nhiên vẫn có một tin vui, đó là ngoài việc bác bỏ công trình của Kempe, Heawood còn chứng minh được rằng số tối đa các màu đòi hỏi là bốn hoặc năm và chắc chắn không thể cao hơn.

Mặc dù Kempe, Heawood và những người khác chưa giải được trọn vẹn bài toán bốn màu, nhưng những nỗ lực và thất bại của họ đã có những đóng góp to lớn vào một lĩnh vực toán học mới và đang rất phát triển là tôpô. Không giống như hình học, trong đó người ta nghiên cứu hình dạng và kích thước chính xác của các vật, tôpô chỉ đơn thuần quan tâm tới cái cốt lõi của vật, tức những nét đặc trưng cơ bản nhất của nó. Ví dụ, khi một nhà hình học xem xét một hình vuông, thì những tính chất của nó mà anh ta quan tâm là chiều dài của các cạnh bằng nhau và các góc đều là vuông. Khi nhà tôpô xem xét cũng vật đó, thì tính chất duy nhất mà anh ta quan tâm là hình vuông là một đường duy nhất, không đứt gãy, tạo nên một vòng kín. Do đó, đối với nhà tôpô, hình vuông với vòng tròn là không thể phân biệt được, bởi vì chúng đều gồm một vòng kín duy nhất.

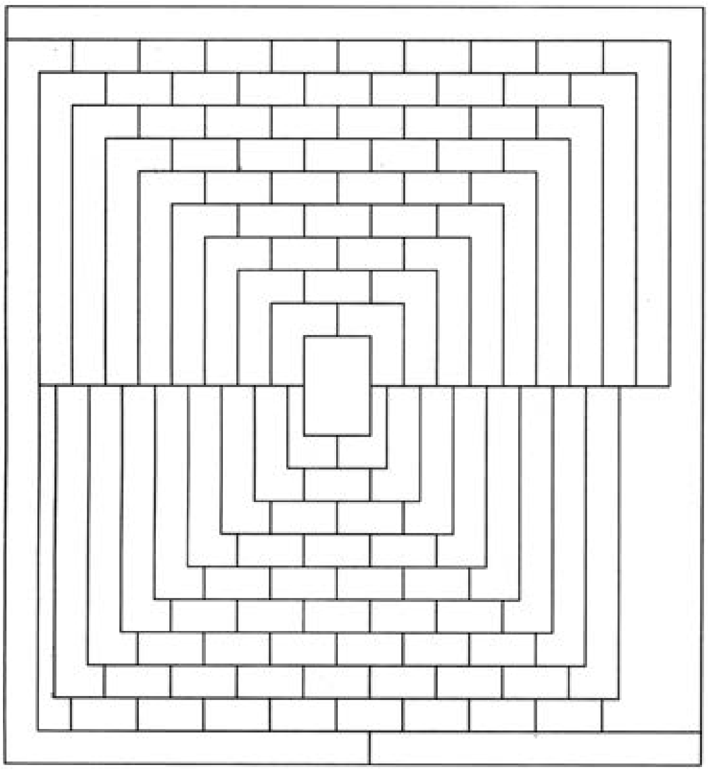
Một cách khác để hình dung sự tương đương giữa hình vuông và hình tròn là hãy tưởng tượng một trong hai hình đó được vẽ trên một tấm cao su mỏng. Nếu ta bắt đầu với hình vuông thì tấm cao su có thể được kéo dãn, được uốn, được xoắn (nhưng không được xé rách) cho đến khi nó biến thành hình tròn. Trái lại, hình vuông không bao giờ có thể biến thành một hình chữ thập, cho dù tấm cao su có vặn vẹo, kéo nén thế nào đi nữa. Từ đó suy ra hình vuông và hình chữ thập là không tương đương về mặt tôpô. Do cách suy nghĩ như thế nên tôpô thường được gọi là "hình học của tấm cao su".

Sau khi đã vứt bỏ những khái niệm như chiều dài và góc, các nhà tôpô chỉ có thể phân biệt các vật bằng cách lọc ra những đặc điểm, chẳng hạn như những giao điểm có trong một vật. Theo cách đó thì hình số 8 sẽ khác một cách căn bản với hình tròn bởi vì nó chứa một điểm mà tại đó có bốn đường gặp nhau, trong khi đó vòng tròn không có một giao điểm nào như vậy. Dù ta có kéo dãn hoặc vặn xoắn thế nào đi nữa thì cũng không thể biến một hình số 8 thành hình tròn. Các nhà tôpô cũng quan tâm tới cả những vật thể ba chiều (hoặc cao hơn) trong đó các lỗ, các vòng và các điểm nút trở thành những đặc điểm cơ bản cần quan tâm.

Nhà toán học John Kelley đã nói đùa rằng: "Nhà tôpô là người không thấy sự khác nhau giữa một chiếc bánh vòng và một chiếc tách uống càphê".

Các nhà toán học hy vọng rằng bằng cách nhìn các bản đồ thông qua lăng kính của tôpô học, họ sẽ nắm bắt được cái cốt lõi của bài toán bốn màu. Đột phá đầu tiên đã được thực hiện vào năm 1922, khi Philip Franklin bỏ qua bài toán tổng quát nhưng đã chứng minh được rằng đối với mọi bản đồ chứa 25 vùng hoặc ít hơn thì chỉ cần bốn màu. Các nhà toán học khác đã tìm cách xây dựng trên các phương pháp của Franklin; và năm 1926 Reynolds đã mở rộng chứng minh tới các bản đồ có 27 vùng; năm 1940 Winn đã mở rộng tới 35 vùng; và năm 1970 Ore và Stemple đã mở rộng tới 39 vùng. Bài toán này tựa như một tấm gương phản chiếu lịch sử của Định lý cuối cùng của Fermat: đó là sự tiến bộ chậm chạp hướng tới vô hạn. Giả thuyết gốc có vẻ gần như chắc chắn là đúng, nhưng chừng nào chứng minh tổng quát còn chưa tìm được thì vẫn luôn luôn có khả năng tồn tại một bản đồ nào đó chứng tỏ Guthrie là sai. Thực tế, năm 1975 nhà báo và nhà văn chuyên viết về toán học Martin Garner đã công bố một bản đồ trên tạp chí *Scientific American* mà ông cho rằng muốn tô nó đòi hỏi phải có 5 màu. Ngày công bố lại là ngày 1 tháng 4 và Garner đã biết rất rõ rằng mặc dù rất khó tô bản đồ này chỉ bằng 4 màu nhưng đó không phải là điều không thể làm được. Hẳn bạn muốn chứng minh đúng là như vậy: xin mời bạn, đó chính là bản đồ được in trên Hình 28.

Những bước tiến chậm chạp đã khiến người ta ngày càng nhận thấy rõ rằng các cách tiếp cận truyền thống không bao giờ có thể bắc được cầu nối giữa chứng minh của Ore và Stemple cho các bản đồ có 39 vùng với một bản đồ bất kỳ có thể chứa tới vô hạn vùng. Sau đó, năm 1976 hai nhà toán học thuộc trường Đại học Illinois là Wolfgang Haken và Kenneth Appel đã giới thiệu một



Hình 28. Ngày 1 tháng 4 năm 1975 Martin Garner đã giới thiệu bản đồ này trên cột báo dành riêng cho ông trên tờ *Scientific American*. Ông tuyên bố rằng nó đòi hỏi phải tô bằng 5 màu, nhưng tất nhiên, tuyên bố đó cốt chỉ để lừa mọi người vào ngày cá tháng Tư mà thôi!

kỹ thuật mới, tạo ra một cuộc cách mạng đối với khái niệm chứng minh toán học.

Haken và Appel đã nghiên cứu kỹ công trình của Heinrich Heesch, người đã từng tuyên bố rằng một số vô hạn các bản đồ biến thiên vô hạn, đều có thể được xây dựng từ một số hữu hạn các bản đồ hữu hạn; và bằng cách nghiên cứu những bản đồ "đơn nguyên" như những viên gạch cơ bản đó, ta có thể xử lý được bài toán tổng quát. Những bản đồ cơ sở tương đương như các hạt electron, proton và neutron, những hạt cơ bản tạo nên thế giới vô cùng phong phú và đa dạng xung quanh chúng ta. Thật không may, tình hình lại không đơn giản như vậy đối với thế giới các bản đồ, vì Haken và Appel chỉ quy được bài toán bốn màu về 1.482 cấu hình cơ sở chứ không phải là 3 như các hạt trong thế giới nguyên tử. Nếu Haken và Appel chứng minh được tất cả các bản đồ đó đều tô được bằng bốn màu thì có nghĩa là mọi bản đồ sẽ tô được bằng bốn màu.

Việc kiểm tra 1.482 bản đồ và tất cả các tổ hợp tô màu trong từng bản đồ là một công việc cực kỳ to lớn, và chắc chắn vượt ra ngoài khả năng của bất kỳ một tập thể các nhà toán học nào. Thậm chí dùng máy tính để quét cho hết các hoán vị cũng phải hết một thế kỷ. Không hề nản chí, Haken và Appel bắt đầu tìm kiếm những con đường và những chiến lược đi tắt mà máy tính có thể sử dụng để tăng tốc quá trình này. Năm 1975, sau 5 năm nghiên cứu bài toán, hai người đã chứng kiến kết quả làm việc tuyệt vời của các máy tính: chúng không chỉ đẩy nhanh tốc độ tính toán mà còn thực sự đóng góp vào những ý tưởng của họ. Hai người đã nhớ lại bước ngoặt trong quá trình nghiên cứu của họ:

> "Vào thời điểm đó chương trình đã khiến chúng tôi phải ngạc nhiên: ban đầu chúng tôi kiểm tra các lập luận của nó bằng tay, do đó luôn luôn có thể tiên đoán được diễn tiến trong mọi tình huống; nhưng giờ đây nó đột ngột bắt đầu hoạt động như một máy chơi cờ. Nó có thể tạo ra những chiến lược tổ hợp dựa trên các "mẹo" đã được "dạy" và thường là những cách tiếp cận đó

thông minh hơn rất nhiều so với những cách tiếp cận mà chúng tôi đã thử. Như vậy, nó đã bắt đầu dạy cho chúng tôi về những điều cần phải tiến hành mà chúng tôi chưa bao giờ ngờ tới. Theo một nghĩa nào đó, nó đã vượt những người tạo ra nó về một số phương diện của các phần mang tính chất cơ học và "trí tuệ" của công việc."

Tháng 6 năm 1976, nhờ 1.200 giờ chạy máy tính, Haken và Appel đã có thể tuyên bố rằng toàn bộ 1.482 bản đồ cơ sở đã được phân tích và không có một bản đồ nào trong đó đòi hỏi hơn bốn màu. Vậy là bài toán bốn màu của Guthrie cuối cùng đã được giải quyết. Điều đáng nói là đây là chứng minh toán học đầu tiên, trong đó máy tính không chỉ làm tăng tốc độ tính toán, mà nó còn có những đóng góp quan trọng tới mức nếu không có nó thì chứng minh sẽ không thể thực hiện được. Đây là một thành tựu hết sức to lớn nhưng đồng thời cũng để lại một cảm giác bứt rứt trong cộng đồng các nhà toán học bởi vì không có cách nào kiểm tra được chứng minh đó theo cách truyền thống.

Trước khi những chi tiết của chứng minh được công bố trên tạp chí *Illinois Journal of Mathematics,* ban biên tập cũng đã thực hiện sự kiểm tra chặt chẽ ở một mức độ nào đó. Do việc kiểm tra theo cách thông thường là điều không thể, nên người ta đã nạp chương trình của Haken và Appel vào một máy tính độc lập khác để chứng minh rằng nó cũng sẽ cho cùng một kết quả.

Quá trình phản biện không có tính chính thống này đã khiến cho một số nhà toán học nổi giận, họ tuyên bố rằng đó là sự kiểm tra chưa thỏa đáng và không có gì đảm bảo rằng không có một sự trục trặc gì đó trong cấu trúc máy tính có thể gây ra những sai sót trong logic. H.P.F. Swinnerton-Dyer đã chỉ ra điều dưới đây về những chứng minh nhờ máy tính:

> Khi một định lý được chứng minh nhờ máy tính, người ta không thể bày chứng minh đó ra để được kiểm tra theo cách truyền thống - nghĩa là bất cứ một độc giả đủ kiên nhẫn nào cũng có thể rà soát lại toàn bộ chứng minh và xác nhận nó có đúng hay không. Ngay cả nếu người ta có in ra toàn bộ chương trình và toàn bộ tập hợp dữ liệu đi nữa thì cũng không có gì đảm bảo rằng dữ liệu đó đã không bị đục lỗ sai hoặc đọc sai. Hơn thế nữa, mọi máy tính hiện đại đều có những lỗi mờ ám trong phần cứng cũng như trong phần mềm của nó - điều này đôi khi gây ra những lỗi mà họ phải mất hàng năm cũng chưa chắc phát hiện được - và mỗi máy tính đều có thể bị những lỗi bất chợt như thế.

Ở một chừng mực nào đó, đây là biểu hiện của chứng hoang tưởng bộ phận của một cộng đồng chỉ thích lảng xa các máy tính hơn là sử dụng chúng. Joseph Keller một lần đã nhận xét rằng ở trường đại học của ông, Đại học Stanford, Khoa toán có ít máy tính hơn bất cứ một khoa nào khác, kể cả Khoa Văn học Pháp. Những nhà toán học bác bỏ công trình của Haken và Appel đều không thể phủ nhận rằng tất cả các nhà toán học đều công nhận những chứng minh ngay cả khi cá nhân họ không trực tiếp kiểm tra những chứng minh đó. Trong trường hợp chứng minh của Wiles đối với Định lý cuối cùng của Fermat, chưa đến 10% các nhà lý thuyết số hiểu được đầy đủ logic của nó, nhưng 100% thừa nhận nó là đúng. Những người không thể nắm bắt được chứng minh đó đều cảm thấy thỏa mãn bởi vì những người khác hiểu được nó đã kiểm tra một cách kỹ lưỡng.

Một trường hợp còn cực đoan hơn nữa là chứng minh sự phân loại các nhóm đơn hữu hạn. Chứng minh này gồm 500 bài báo tách rời nhau được viết bởi hơn 100 nhà toán học. Người ta đồn rằng chỉ duy nhất có nhà toán học Daniel Gorenstein là hiểu được toàn bộ chứng minh gồm 15.000 trang đó, mà ông lại đã qua đời vào năm 1992. Tuy nhiên, cộng đồng các nhà toán học đa số vẫn rất yên tâm rằng mỗi một đoạn trong chứng minh đều đã được một tập thể gồm các chuyên gia riêng kiểm tra một cách kỹ lưỡng và từng dòng trong cả 15.000 trang đều đã được kiểm tra đi kiểm tra lại hàng chục lần. Sự khác biệt của bài toán bốn màu là ở chỗ nó chưa bao giờ và sẽ không bao giờ được ai đó kiểm tra một cách đầy đủ.

Hai mươi năm sau kể từ ngày chứng minh của định lý bốn màu được công bố, máy tính được dùng để giải nhiều bài toán khác ít nổi tiếng hơn nhưng cũng quan trọng không kém. Trong một lĩnh vực mà trước kia chưa hề bị công nghệ làm cho bị "ô nhiễm", ngày càng có nhiều nhà toán học miễn cưỡng phải chấp nhận việc sử dụng ngày càng tăng thứ logic phần mềm và thừa nhận những lập luận sau của Haken:

> Bất kỳ ai, ở bất cứ dòng nào, đều có thể điền vào các chi tiết và kiểm tra chúng. Thực tế các máy tính trong một ít giờ có thể chạy qua nhiều chi tiết hơn con người có thể hy vọng làm được trong suốt cuộc đời của mình, thực tiễn đó không hề làm thay đổi khái niệm cơ bản về chứng minh toán học. Cái thay đổi không phải là lý thuyết mà là thực hành của toán học.

Mới đây nhất, một số nhà toán học đã trao cho máy tính quyền lực bằng cách dùng thuật giải di truyền. Đó là những chương trình máy tính có cấu trúc đại thể do các nhà toán học thiết kế ra, nhưng những chi tiết tinh vi của nó thì được quyết định bởi chính bản thân máy tính. Một số dòng trong chương trình được phép đột biến và tiến hóa giống như các gene cá thể trong ADN hữu cơ. Từ chương trình mẹ ban đầu sẽ sinh ra hàng trăm chương trình con hơi khác do những đột biến ngẫu nhiên trong máy tính. Những chương trình con lại được dùng để giải một bài toán cụ thể nào đó. Phần lớn những chương trình này đều thất bại thảm hại, nhưng chương trình tiến gần được tới kết quả nhất sẽ được phép "sinh sản" và tạo ra một thế hệ các chương trình con đột biến mới. Chương trình con nào thích nghi nhất được hiểu trong trường hợp này là chương trình con nào tiến gần nhất tới lời giải bài toán. Bằng cách lặp lại quá trình đó các nhà toán học hy vọng rằng không cần phải can thiệp, một chương trình sẽ tự tiến hóa tới khi giải được bài toán và trong một số trường hợp cách tiếp cận đó đang có những thành công đáng kể.

Nhà khoa học máy tính Edward Frenkin đã đi xa tới mức có thể một ngày nào đó, máy tính sẽ phát minh ra một chứng minh quan trọng độc lập với các nhà toán học. Mười năm trước, ông đã lập ra giải thưởng Leibniz trị giá 100.000 đôla Mỹ nhằm trao cho chương trình máy tính đầu tiên nào sáng tạo được một định lý có "ảnh hưởng sâu sắc tới toán học". Việc Giải thưởng này có khi nào được trao hay không còn là vấn đề phải bàn cãi, nhưng điều chắc chắn là một chứng minh bằng máy tính sẽ luôn luôn thiếu tác dụng soi sáng của những chứng minh truyền thống và dường như là trống rỗng nếu đem so sánh. Một chứng minh toán học không chỉ cần trả lời cho một câu hỏi mà còn cần phải giải thích tại sao lời giải phải là như vậy. Việc nạp một câu hỏi vào một hộp đen và nhận được câu trả lời ở đầu kia của nó chỉ cho ta thêm kiến thức nhưng lại không cho thêm hiểu biết. Trong chứng minh của Wiles đối với Định lý cuối cùng của Fermat, chúng ta biết rằng phương trình Fermat không có nghiệm nguyên bởi vì một nghiệm như vậy, nếu có, sẽ dẫn đến mâu thuẫn với giả thuyết Taniyama - Shimura. Wiles không chỉ đáp ứng được thách thức của Fermat, mà ông còn biện minh cho câu trả lời của mình rằng nó phải là như vậy để duy trì mối quan hệ cơ bản giữa các phương trình eliptic và các dạng modular.

Nhà toán học Ronald Graham đã mô tả sự nông cạn của các chứng minh nhờ máy tính, trong bối cảnh của một trong số những giả thuyết lớn ngày hôm nay còn chưa được chứng minh như giả thuyết Riemann: "Sẽ thật là nản lòng, nếu bạn hỏi máy tính rằng giả thuyết Riemann là đúng hay sai và nó trả lời: 'Đúng, nhưng mà anh không hiểu được chứng minh đó đâu'."

Nhà toán học Philip Davis, khi viết cùng với Reuben Hersh, cũng đã có phản ứng tương tự đối với chứng minh của bài toán bốn màu:

> Phản ứng đầu tiên của tôi là: "Thật tuyệt vời! Nhưng họ làm điều đó thế nào nhỉ?". Tôi chờ đợi một sự phát hiện mới sâu sắc hơn, một chứng minh mà trong nhân lõi của nó có một ý tưởng với vẻ đẹp có thể làm biến đổi thời đại của tôi. Nhưng khi tôi nhận được câu trả lời "Họ đã làm điều đó bằng cách phá vỡ nó thành hàng ngàn trường hợp, rồi sau đó cho chạy trên máy tính, hết mảnh này đến mảnh khác", thì tôi hoàn toàn thất vọng. Những phản ứng của tôi là: "Như vậy, nó chỉ cốt ở việc trình diễn, do đó xét cho cùng đó không phải là một bài toán tốt".

Giải thưởng

Chứng minh của Wiles đối với Định lý cuối cùng của Fermat dựa trên việc kiểm chứng một giả thuyết ra đời từ những năm 1950. Hệ thống suy diễn của ông đã sử dụng một loạt những kỹ thuật toán học được phát triển trong thập kỷ gần đây nhất, trong đó có những kỹ thuật do chính Wiles sáng tạo ra. Chứng minh của Wiles là một tuyệt phẩm của toán học hiện đại, nó dẫn tới một kết luận tất yếu là chứng minh của Wiles không phải là chứng minh đã thất lạc của Fermat. Fermat đã viết rằng chứng minh của ông không thể viết hết được ra bên lề cuốn *Arithmetica* của Diophantus và 100 trang của Wiles hẳn cũng thỏa mãn tiêu chuẩn đó, nhưng một điều chắc chắn là Fermat đã không phát minh ra các dạng modular, giả thuyết Taniyama - Shimura, các nhóm Galois và phương pháp Kolyvagin-Flach sớm hàng thế kỷ.

Vậy nếu như Fermat không có chứng minh của Wiles thì ông đã có cái gì? Về vấn đề này các nhà toán học chia làm hai phe. Những người hoài nghi cứng đầu thì tin rằng Định lý cuối cùng của Fermat là kết quả của những giây phút yếu đuối hiếm hoi của vị thiên tài thế kỷ XVII này. Họ tuyên bố rằng mặc dù Fermat đã viết: "Tôi đã phát minh ra một chứng minh thực sự tuyệt vời", nhưng thực tế ông đã tìm ra một chứng minh sai. Thực chất của chứng minh sai này còn là điều phải bàn cãi, nhưng rất có thể nó cũng theo đường lối như các công trình của Cauchy hay Lamé mà thôi.

Các nhà toán học khác, những người lạc quan lãng mạn, thì tin rằng Fermat có thể đã có một chứng minh thiên tài. Dù chứng minh đó là thế nào đi nữa thì nó cũng chỉ có thể dựa trên những kỹ thuật toán học của thế kỷ XVII và nó chứa đựng một hệ thống suy luận khôn khéo tới mức từ Euler cho tới Wiles không ai nghĩ ra được. Mặc dù Wiles đã công bố lời giải đối với bài toán đó nhưng vẫn có nhiều nhà toán học tin rằng họ vẫn còn có cơ hội đạt được sự nổi tiếng và vinh quang bằng cách phát minh lại chứng minh của Fermat.

Mặc dù Wiles đã phải dùng tới những kỹ thuật toán học của thế kỷ XX để chứng minh một câu đố của thế kỷ XVII, tuy nhiên ông đã đáp ứng được thử thách của Fermat phù hợp với những quy định của Hội đồng trao giải Wolfskehl. Ngày 27 tháng 6 năm 1997, Andrew Wiles đã được trao giải thưởng này với trị giá khoảng 50.000 đô la Mỹ. Và một lần nữa Fermat và Wiles lại xuất hiện nổi bật trên các trang báo ở khắp thế giới. Vậy là Định lý cuối cùng của Fermat đã chính thức được chứng minh.

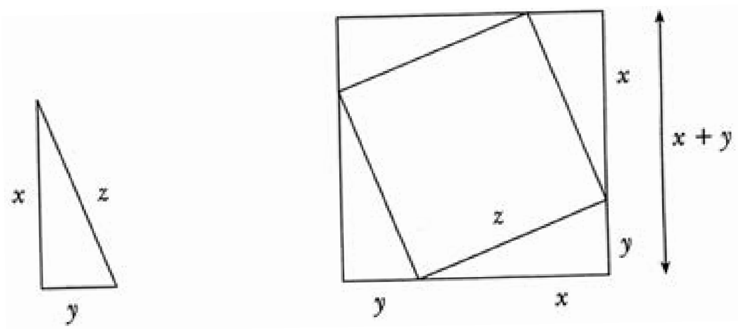
Nhưng cái gì tiếp theo sẽ thu hút tâm trí của Wiles? Ông đã từ chối không bình luận về những nghiên cứu hiện nay của mình, đó là điều không có gì đáng ngạc nhiên đối với một người đã từng làm việc âm thầm và đơn độc trong suốt bảy năm trời. Nhưng dù ông có làm gì đi nữa thì chắc chắn cũng không bao giờ có thể thay thế được hoàn toàn niềm say mê cuồng dại mà ông đã có đối với Định lý cuối cùng của Fermat. “Không một bài toán nào khác có ý nghĩa như thế đối với tôi. Đó là niềm đam mê từ thuở ấu thơ của tôi. Không gì có thể thay thế được. Và tôi đã *chinh phục* được nó. Tôi cũng sẽ thử giải những bài toán khác, chắc chắn là như thế. Một số bài rất khó do đó tôi cũng sẽ có cảm giác chinh phục trở lại, nhưng chắc chắn không có bài toán nào khác có thể gắn bó với tôi như bài toán Fermat”.

"Tôi có một lợi thế rất hiếm hoi là được theo đuổi giấc mơ thời thơ ấu trong suốt cuộc đời của mình. Tôi biết đó là một đặc ân hiếm hoi, nhưng nếu bạn giải quyết được một điều gì đó trong cuộc đời trưởng thành của mình mà nó lại rất có ý nghĩa đối với bạn, thì điều đó còn toại nguyện hơn bất kỳ điều gì. Khi đã giải quyết xong được bài toán đó, chắc chắn bạn sẽ có một cảm giác mất mát, nhưng đồng thời cũng có cảm giác tuyệt vời về sự tự do. Tôi đã bị ám ảnh bởi bài toán này trong suốt 8 năm, đến mức lúc nào tôi cũng nghĩ về nó - từ lúc tôi thức dậy vào buổi sáng cho tới khi đi ngủ vào ban đêm. Đó là một thời gian dài chỉ suy nghĩ về một điều. Cuộc phiêu lưu ấy giờ đã qua rồi. Trí óc của tôi hiện đang được nghỉ ngơi".

Phụ lục

Phụ lục 1. Chứng minh định lý Pythagore

Mục đích của chứng minh này là chứng tỏ định lý Pythagore đúng đối với mọi tam giác vuông.



Ở hình trên, 4 tam giác vuông giống hệt nhau được ghép với một hình vuông nghiêng tạo nên một hình vuông lớn hơn. Diện tích hình vuông lớn chính là chìa khóa của việc chứng minh.

Diện tích của hình vuông lớn được tính bằng hai cách:

Cách 1: Tính diện tích hình vuông lớn. Chiều dài mỗi cạnh là x+y. Vì vậy, diện tích hình vuông lớn là $(x+y)^2$.

Cách 2: Tính diện tích từng phần trong hình vuông lớn. Diện tích mỗi tam giác là $\frac{1}{2}$xy; nghĩa là $\frac{1}{2}$ × cạnh đáy × đường cao. Diện tích hình vuông nghiêng là z^2. Do đó, diện tích hình vuông lớn = 4 × (diện tích 1 tam giác vuông) + diện tích hình vuông nghiêng

$$= 4 \times \frac{1}{2} xy + z^2 .$$

Cách 1 và cách 2 cho hai biểu thức khác nhau. Tuy nhiên, hai biểu thức này là tương đương vì chúng cùng biểu thị một diện tích. Do đó, diện tích tính bằng cách 1 = diện tích tính bằng cách 2

$$(x+y)^2 = 4\times\frac{1}{2}xy + z^2$$

Khai triển và giản ước, ta có:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 2xy + z^2$$

ước lược 2xy ở 2 vế, ta được:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Đó chính là định lý Pythagore.

Cơ sở lập luận ở đây là diện tích của hình vuông lớn phải luôn như nhau cho dù nó được tính theo bất cứ phương pháp nào. Từ đó chúng ta suy ra hai biểu thức cho cùng một diện tích, cho chúng bằng nhau và cuối cùng kết quả tất yếu là $x^2 + y^2 = z^2$, tức là bình phương cạnh huyền (z^2) bằng tổng bình phương các cạnh còn lại ($x^2 + y^2$).

Lập luận này đúng với mọi tam giác vuông. Các cạnh tam giác trong phần lập luận của chúng ta được biểu thị bằng x, y và z, và vì vậy nó có thể biểu thị các cạnh của bất kỳ tam giác vuông nào.

Phụ lục 2. Chứng minh của Euclid về tính vô tỷ của $\sqrt{2}$

Mục đích của Euclid là chứng minh rằng $\sqrt{2}$ không thể được viết dưới dạng phân số. Vì ông sử dụng phương pháp phản chứng, nên bước đầu tiên là giả sử điều ngược lại là đúng, tức là $\sqrt{2}$ có thể được viết dưới dạng một phân số chưa biết nào đó. Phân số giả thiết đó được biểu thị bằng p/q, với p và q là các số nguyên.

Trước khi bắt tay vào chứng minh, tất cả những gì cần biết đó là những tính chất cơ bản của phân số và số chẵn.

(1) Nếu lấy một số nguyên bất kỳ và nhân nó với 2 thì số mới thu được là một số chẵn. Đó cũng là định nghĩa chính xác của một số chẵn.

(2) Nếu bình phương của một số là một số chẵn thì bản thân số đó cũng là số chẵn.

(3) Cuối cùng, các phân số có thể rút gọn: 16/24 tương đương với 8/12; chỉ cần chia tử số và mẫu số của 16/24 cho thừa số chung là 2. Tiếp nữa, 8/12 tương đương với 4/6 và 4/6 lại tương đương với 2/3. Tuy nhiên, 2/3 là tối giản, tức không thể rút gọn được nữa bởi vì 2 và 3 không có ước số chung nào. Như vậy, không thể rút gọn một phân số mãi mãi được.

Nào, bây giờ, hãy nhớ lại rằng Euclid khẳng định $\sqrt{2}$ không thể được viết dưới dạng một phân số. Tuy nhiên, vì ông dùng phương pháp phản chứng, nên ông suy luận dựa trên giả thiết rằng phân số p/q tồn tại và từ đó ông rút ra hệ quả của nó:

$$\sqrt{2} = p/q$$

Nếu ta bình phương hai vế lên, ta có:

$$2 = p^2/q^2$$

Phương trình này có thể dễ dàng viết lại thành:

$$2q^2 = p^2$$

Bây giờ, từ (1), chúng ta biết rằng p^2 là một số chẵn. Thêm nữa, từ (2), ta biết rằng p cũng là một số chẵn. Nhưng nếu p chẵn thì theo (1) nó có thể được viết thành 2m với m là một số nguyên khác nào đó. Thay vào phương trình trên ta được:

$$2q^2 = (2m)^2 = 4m^2$$

Chia hai vế cho 2, ta được:

$$q^2 = 2m^2$$

Lập luận tương tự như trên ta có q^2 là một số chẵn. Do đó q sẽ được viết dưới dạng q = 2n, với n là một số nguyên khác bất kỳ. Trở lại hệ thức ban đầu, ta có:

$$\sqrt{2} = p/q = 2m/2n$$

Giờ thì chúng ta có phân số m/n, rút gọn hơn p/q.

Tuy nhiên, đến đây chúng ta nhận thấy mình lại ở trong tình trạng có thể lặp lại một cách chính xác quá trình dẫn tới m/n, và cuối cùng sẽ tạo ra một phân số mới rút gọn hơn, chẳng hạn là g/h. Phân số này lại tiếp tục chịu nghiền nhỏ một lần nữa và phân số mới, chẳng hạn là e/f, sẽ còn rút gọn hơn nữa. Chúng ta có thể tiếp tục nghiền nhỏ mãi bằng cách lặp đi lặp lại quá trình đó, không bao giờ kết thúc. Nhưng từ (3) ta biết rằng phân số luôn phải có một phân số tối giản, nhưng phân số p/q theo giả thuyết ban đầu của chúng ta lại có vẻ như không tuân theo quy tắc này. Vì vậy, chúng ta có thể nói một cách chắc chắn rằng chúng ta đã dẫn tới mâu thuẫn. Nếu $\sqrt{2}$ có thể được viết dưới dạng phân số thì kết quả sẽ là vô lý, và đúng là $\sqrt{2}$ không thể viết dưới dạng một phân số. Vì vậy, $\sqrt{2}$ là một số vô tỷ.

Phụ lục 3. Câu đố về tuổi của Diophantus

Gọi tuổi của Diophantus là L. Từ câu đố, ta có một thống kê hoàn chỉnh về cuộc đời của Diophantus như sau:

1/6 cuộc đời ông ta, tức L/6, là thời thơ ấu

L/12 là thời thanh niên

L/7 là thời trước hôn nhân

5 năm sau thì con trai ông ta ra đời

L/2 là tuổi của người con

4 năm chịu đựng đau khổ trước khi chết

Tuổi thọ của Diophantus đúng bằng tổng của các thời gian trên:

$$L = \frac{L}{6} + \frac{L}{12} + \frac{L}{7} + 5 + \frac{L}{2} + 4$$

Rút gọn phương trình trên, ta được:

$$L = \frac{25}{28}L + 9 \quad \text{vậy:} \quad L = \frac{28}{3} \times 9 = 84$$

Như vậy, Diophantus chết vào tuổi 84.

Phụ lục 4. Bài toán cân của Bachet

Để cân bất kỳ một khối lượng là số nguyên của kg từ 1 đến 40, hầu hết mọi người đều đề nghị sử dụng 6 quả cân: 1, 2, 4, 8, 16, 32 kg. Bằng cách này, tất cả các khối lượng trên đều có thể dễ dàng cân được bằng cách dùng tổ hợp các quả cân dưới đây đặt lên một đĩa cân:

1kg = 1
2kg = 2
3kg = 2 + 1
4kg = 4
5kg = 4 + 1
...
40kg = 32+8

Tuy nhiên, bằng cách đặt các quả cân lên đồng thời cả 2 đĩa cân, nghĩa là cho phép các quả cân có thể được đặt cùng đĩa với vật cần cân, Bachet đã hoàn thành nhiệm vụ chỉ với 4 quả cân: 1, 3, 9, 27 kg. Quả cân được đặt cùng đĩa với vật cần cân coi như có giá trị âm. Nhờ đó, các khối lượng được cân như sau:

1kg = 1,
2kg = 3 - 1
3kg = 3
4kg = 3 + 1
5kg = 9 - 3 - 1
...
40kg = 27 + 9 + 3 + 1

Phụ lục 5. Chứng minh của Euclid về số lượng vô hạn của các bộ ba số Pythagore

Một bộ ba số Pythagore là một bộ gồm 3 số nguyên, mà bình phương của một số cộng với bình phương một số khác thì bằng bình phương số thứ ba. Euclid đã chứng minh rằng có một số vô hạn bộ ba số Pythagore như vậy.

Chứng minh của Euclid bắt đầu từ nhận xét rằng hiệu số của bình phương hai số nguyên liên tiếp luôn là một số lẻ.

1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2 7^2 8^2 9^2 10^2...

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100...

\ / \ / \ / \ / \ / \ / \ / \ / \ /

3 5 7 9 11 13 15 17 19 ...

Như vậy, mỗi một số trong vô số các số lẻ ấy khi cộng với bình phương một số cụ thể nào đó thì tạo thành bình phương một số khác. Bản thân một phần các số lẻ đó cũng là một số chính phương (tức là bình phương của một số nguyên khác), nhưng một phần của một số vô hạn thì cũng lại là vô hạn.

Do đó, cũng có vô hạn các số chính phương lẻ mà khi cộng với bình phương một số thì tạo thành một số chính phương khác. Nói cách khác, có vô hạn các bộ ba số Pythagore.

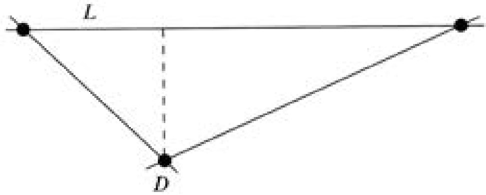
Phụ lục 6. Chứng minh giả thuyết các điểm

Giả thuyết các điểm phát biểu rằng không thể vẽ được một giản đồ các điểm sao cho mỗi đường thẳng chứa ít nhất ba điểm.

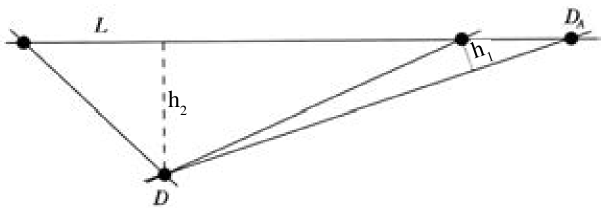
Mặc dù việc chứng minh giả thuyết này đòi hỏi phải có một số kiến thức tối thiểu về toán học, song nó chủ yếu dựa trên một số kỹ thuật về hình học, và vì vậy tôi đề nghị nên xem kỹ từng bước một.

Trước hết hãy xét một hình mẫu tùy ý các điểm và các đường thẳng nối mỗi điểm với một điểm khác. Sau đó, đối với mỗi điểm, ta xác định khoảng cách từ chúng đến đường thẳng gần nhất, trừ các đường thẳng đi qua điểm đó. Từ đó, trong số tất cả các điểm, ta xác định được điểm ở gần với một đường thẳng nhất.

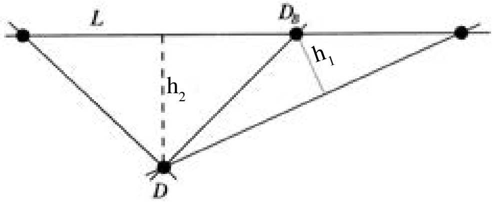
Hình dưới là hình nhìn cận cảnh của một điểm D như trên, nó ở gần đường thẳng L nhất. Khoảng cách giữa điểm này và đường thẳng L được biểu thị bằng đường đứt nét và khoảng cách này là nhỏ hơn bất kỳ một khoảng cách nào khác giữa một đường thẳng và một điểm.



Giờ thì ta có thể chứng tỏ được rằng đường tnắng L luôn chỉ chứa 2 điểm và vì vậy, giả thuyết trên là đúng, tức là không thể vẽ được một giản đồ mà mọi đường thẳng đều chứa ba điểm.



Để chứng tỏ rằng đường thẳng L chỉ chứa 2 điểm, chúng ta hãy xét xem điều gì sẽ xảy ra nếu như nó chứa điểm thứ ba. Nếu điểm thứ ba, D_A, nằm ngoài hai điểm đã cho ban đầu, thì khoảng cách biểu thị bằng đường h_1 sẽ ngắn hơn đường h_2 (biểu thị khoảng cách ngắn nhất từ một điểm đến một đường thẳng). Vì vậy, D_A không thể tồn tại.



Tương tự như vậy, nếu điểm thứ ba, D_B, nằm giữa hai điểm đã cho ban đầu, thì khoảng cách biểu thị bằng đường h_1 cũng ngắn hơn đường h_2 (biểu thị khoảng cách ngắn nhất giữa một điểm và một đường thẳng). Do vậy điểm D_B cũng không tồn tại.

Tóm lại, một hình bất kỳ luôn có khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm đến một đường thẳng, và đường thẳng này chỉ đi qua 2 điểm. Vì vậy mọi hình luôn có ít nhất một đường thẳng chỉ đi qua 2 điểm - nghĩa là giả thuyết trên là đúng.

Phụ lục 7. Lạc vào sự vô lý

Dưới đây là một minh họa cổ điển cho thấy bắt đầu từ một mệnh đề rất đơn giản mà sau đó với vài bước logic và hoàn toàn không phức tạp lắm lại dẫn tới kết quả 2 = 1.

Trước tiên, chúng ta hãy bắt đầu bằng một mệnh đề rất vô hại: a = b

Sau đó, nhân hai vế với a, ta được:

a2 = ab

Thêm a2 - ab vào hai vế, ta có:

a2+ a2- ab = ab + a2- ab

Đẳng thức trên có thể rút gọn thành:

2 (a2- ab) = a2- ab

Cuối cùng, chia hai vế cho a2- ab, ta được:

2 = 1

Mệnh đề đầu tiên có vẻ như là đúng, nhưng những bước tiếp theo đã có một sai sót nhỏ nhưng rất tai hại dẫn tới sự vô lý trong kết quả cuối cùng.

Thực sự thì cái lỗi chết người là ở bước cuối cùng, đó là chia hai vế cho a2- ab. Chúng ta biết rằng từ mệnh đề ban đầu là a = b, nên khi chia hai vế cho a2- ab cũng tức là chia cho số 0.

Chia bất cứ số nào cho 0 cũng không thể được vì 0 sẽ đi vào trong bất kỳ một lượng hữu hạn nào một số vô hạn lần. Bằng việc tạo nên giá trị vô hạn ở hai vế, chúng ta đã xé đôi hai nửa của phương trình để cho mâu thuẫn len vào trong lập luận của chúng ta.

Cái lỗi nhỏ này là một dạng sai lầm ngớ ngẩn điển hình thường gặp ở rất nhiều thí sinh tham gia tranh giải thưởng Wolfskehl.

Phụ lục 8. Các tính chất của số học

Dưới đây là những tính chất cơ bản tạo nền tảng cho các phép tính phức tạo của số học.

1. Tính chất giao hoán: Với các số m, n bất kỳ:

    $m + n = n + m$ và $mn = nm$

2. Tính chất kết hợp: Với các số m, n, k bất kỳ:

    $(m+n) + k = m + (n + k)$ và $(mn)k = m(nk)$

3. Tính chất phân phối: Với các số m, n, k bất kỳ:

    $m(n + k) = mn + mk$

4. Với mọi số n, ta luôn có:

    $n + 0 = n$

5. Với mọi số n, ta luôn có:

    $n \times 1 = n$

6. Với mọi số n, tồn tại một số k sao cho:

    $n + k = 0$

7. Với các số m, n, k bất kỳ,

    nếu $k \neq 0$ và $kn = km$ thì $m = n$

Từ các tính chất này, ta có thể chứng minh được tất cả các quy tắc khác. Chẳng hạn, áp dụng các tính chất trên và không cần giả thiết gì thêm, chúng ta có thể chứng minh một cách logic quy tắc sau đây:

nếu $m + k = n + k$, thì $m = n$

Trước hết, chúng ta có:

$$m + k = n + k$$

Theo tính chất 6, giả sử l là một số thỏa mãn $k + l = 0$ thì

$$(m + k)+ l = (n + k) + l$$

Theo tính chất 2, ta lại có:

$$m + (k + l) = n + (k + l)$$

Hãy nhớ rằng $k + l = 0$, từ đó suy ra:

$$m + 0 = n + 0$$

áp dụng tính chất 4, cuối cùng chúng ta suy ra điều phải chứng minh: $m = n$

Phụ lục 9. Lý thuyết trò chơi và cuộc đấu tay ba

Chúng ta hãy xét những khả năng lựa chọn của ông Black. Trước tiên, ông Black có thể nhằm vào mục tiêu là ông Grey. Nếu ông ta thành công thì lượt bắn tiếp theo là của ông White. Ông White chỉ còn lại một đối thủ là ông Black và vì ông White là một xạ thủ trăm phát trăm trúng nên ông Black cầm chắc cái chết.

Lựa chọn tốt hơn cho ông Black là nhắm thẳng vào ông White. Nếu như ông thành công thì lượt bắn tiếp theo sẽ thuộc về ông Grey. Nhưng ông Grey bắn ba phát chỉ trúng hai nên ông Black có cơ hội sống sót để bắn trở lại ông Grey và có thể là người chiến thắng.

Dường như lựa chọn thứ hai là chiến lược mà ông Black nên chọn. Tuy nhiên, có một phương án thứ ba thậm chí còn tốt hơn. Ông Black có thể bắn chỉ thiên. Ông Grey bắn lượt tiếp theo và ông ta sẽ nhằm vào ông White, bởi vì đó là đối thủ nguy hiểm hơn. Nếu ông White sống sót thì ông ta lại sẽ nhắm bắn ông Grey vì ông Grey cũng là đối thủ nguy hiểm hơn là ông Black. Như vậy, bằng cách bắn chỉ thiên, ông Black sẽ để cho ông Grey trừ khử ông White hoặc ngược lại.

Đó là chiến lược tốt nhất của ông Black. Cuối cùng thì ông Grey hoặc ông White sẽ chết và sau đó thì ông Black sẽ nhắm bắn người còn sống sót. Như vậy, ông Black đã xoay chuyển được tình thế, thay vì là người bắn phát đầu tiên trong cuộc đấu tay ba, ông trở thành người bắn đầu tiên cuộc đấu tay đôi.

Phụ lục 10. Một ví dụ về chứng minh bằng quy nạp

Các nhà toán học nhận thấy sẽ rất hữu ích khi có một công thức ngắn gọn mà có thể tính được tổng của các dãy số khác nhau. Trong ví dụ này, bài toán đặt ra là đi tìm một công thức để tính tổng của n số tự nhiên đầu tiên.

Chẳng hạn, tổng của chỉ một số đầu tiên là 1, tổng của hai số đầu tiên là 3 (tức là 1+2), tổng của ba số đầu tiên là 6 (tức là 1+2+3), tổng của bốn số đầu tiên là 10 (tức là 1+2+3+4), và cứ tiếp tục như vậy.

Và công thức tổng quát:

$$\text{Tổng } (n) = \frac{1}{2} n\,(n+1)$$

Nói cách khác, nếu chúng ta muốn tính tổng của n số đầu tiên, thì chúng ta chỉ cần thay số vào công thức trên là tính ra kết quả.

Bằng phương pháp quy nạp có thể chứng minh được công thức này là đúng đối với mọi số đến vô hạn.

Bước đầu tiên là chứng tỏ công thức đúng với trường hợp thứ nhất, n = 1. Điều này khá đơn giản, vì chúng ta biết rằng tổng của chỉ một số đầu tiên bằng 1, và nếu chúng ta thay n = 1 vào công thức trên thì chúng ta có kết quả đúng như thế:

$$\text{Tổng } (n) = \frac{1}{2} n\,(n+1)$$

$$\text{Tổng } (1) = \frac{1}{2} \times 1 \times (1+1)$$

$$\text{Tổng } (1) = \frac{1}{2} \times 1 \times 2$$

$$\text{Tổng } (1) = 1$$

Như vậy là quân đôminô đầu tiên đã bị đổ.

Bước tiếp theo trong phép chứng minh bằng quy nạp là chứng tỏ rằng nếu công thức trên là đúng với một giá trị n nào đó, thì nó cũng phải đúng với n+1. Nếu:

Tổng (n) = n (n+1)

thì:

Tổng (n+1) = Tổng (n) + (n+1)

Tổng (n+1) = n (n+1) + (n+1)

Sau khi sắp xếp và nhóm lại các số hạng bên vế phải, chúng ta có:

Tổng (n+1) = (n+1) [(n+1) + 1]

Điều quan trọng cần lưu ý ở đây là dạng phương trình mới này giống hoàn toàn với phương trình ban đầu, trừ một điều là bây giờ n được thay thế bằng (n+1).

Nói cách khác, nếu công thức là đúng với n, thì nó cũng sẽ đúng với n+1. Nghĩa là, nếu một quân cờ đôminô bị đổ thì nó sẽ luôn làm đổ quân đôminô tiếp theo. Chứng minh bằng quy nạp đã được hoàn tất.

ĐỊNH LÝ CUỐI CÙNG CỦA FERMAT

Simon Singh

Phạm Văn Thiều - Phạm Việt Hưng dịch

Chịu trách nhiệm xuất bản: NGUYỄN MINH NHỰT
Biên tập: HẢI VÂN - VĨNH THẮNG
Xử lý bìa: BÙI NAM
Sửa bản in: KHÁNH VI
Kĩ thuật vi tính: THANH HÀ

NHÀ XUẤT BẢN TRẺ
161B Lý Chính Thắng - Quận 3 - Thành phố Hồ Chí Minh
ĐT: 39316289 - 39316211 - 38465595 - 38465596 - 39350973
Fax: 84.8.8437450 - E-mail: nxbtre@hcm.vnn.vn
Website: http://www.nxbtre.com.vn

CHI NHÁNH NHÀ XUẤT BẢN TRẺ TẠI HÀ NỘI
Phòng 602, số 209 Giảng Võ, p. Cát Linh, q. Đống Đa - Hà Nội
ĐT: (04)37734544 - Fax: (04)35123395
E-mail: chinhanh@nxbtre.com.vn

Được xem là quyển sách viết về toán học dành cho đại chúng đầu tiên trở thành best-seller

"Câu chuyện hấp dẫn về một trong những sự kiện truyền cảm và kịch tính nhất của thế kỷ XX."

—Sir Roger Penrose, *New York Times Book Review*

"Khó có thể tạo ra thêm được một tác phẩm mô tả hấp dẫn hơn nữa cái bi hùng của hành trình lịch sử này… với đầy những thất bại mang tính thiên tài, những hy vọng bị bóp nghẹt, những cuộc đấu tay đôi chết người, và cả những vụ tự sát."

—Jim Holt, *The Wall Street Journal*

Tác giả SIMON LEHNA SINGH sinh ngày 1-1-1964 trong một gia đình Ấn Độ đã di cư từ bang Punjab sang Anh. Ông học vật lý tại Imperial College ở London và tại Đại học Tổng hợp danh tiếng Cambrige. Đây cũng là nơi ông đã nhận học vị tiến sĩ về một công trình trong lĩnh vực các hạt cơ bản. Ông cũng đã làm việc tại CERN, Geneva, Thụy Sĩ, trung tâm nghiên cứu năng lượng cao của cả cộng đồng châu Âu.

Năm 1996 ông gắn bó với Andrew Wiles và câu chuyện độc nhất vô nhị về Định lý cuối cùng của Fermat, câu chuyện đã khiến một nhà vật lý trở thành một tác giả nổi tiếng trong thể loại mới của sách khoa học, những cuốn sách không chỉ chuyển tải kiến thức mà chủ yếu làm rung động lòng người, qua đó đem lại niềm say mê, khao khát khám phá.