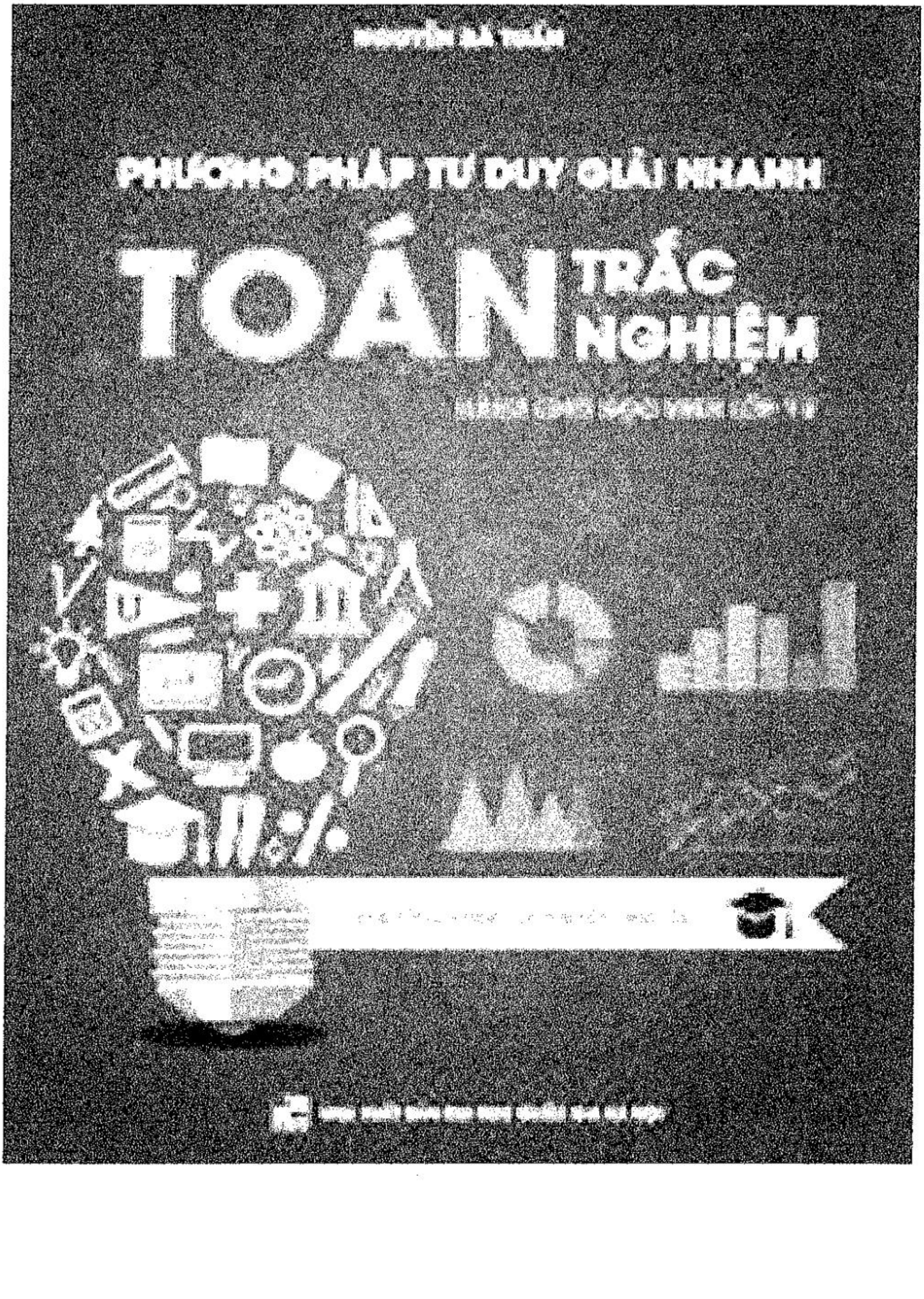

PHƯƠNG PHÁP TƯ DUY GIẢI NHANH
TOÁN
TRẮC NGHIỆM

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh thân mến!

Nếu các em là thí sinh sắp bước vào kỳ thi THPT quốc gia hoặc các kỳ t có môn Toán thi theo hình thức trắc nghiệm và đang gặp khó khăn với môn To thì bộ sách này sẽ giúp các em giải quyết được các khó khăn đó.

Hiện nay, trong hầu hết các kỳ thi lớn, môn Toán đã chuyển từ hình thức t tự luận sang thi trắc nghiệm (như kỳ thi THPT quốc gia). Việc chuyển qua hìn thức thi trắc nghiệm đối với môn Toán khiến các em học sinh gặp khó khăn, lắng khi trong suốt quá trình trước đó các em đã và đang học theo hướng tự luậ Nhằm giúp các em giải quyết được khó khăn đó, chúng tôi đã biên soạn bộ sác ôn luyện Toán trắc nghiệm, bộ sách gồm 3 cuốn:

Cuốn 1: **Phương pháp tư duy giải nhanh Toán trắc nghiệm – lớp 12,** gồ các phương pháp giải nhanh và các chuyên đề trong chương trình kiến thức lớp 12.

Cuốn 2: **Phương pháp tư duy giải nhanh Toán trắc nghiệm – lớp 10 v lớp 11,** gồm các phương pháp tư duy giải nhanh và các chuyên đề kiến thức tron chương trình lớp 10 và lớp 11.

Cuốn 3: **Tuyển tập đề thi và phương pháp giải nhanh Toán trắc nghiệ** bao gồm bộ đề thi được biên soạn theo cấu trúc đề thi THPT quốc gia và đề t mở rộng hơn có kết hợp kiến thức lớp 10, 11 cùng các hướng dẫn giải th phương pháp tư duy giải nhanh.

Cuốn ***Phương pháp tư duy giải nhanh Toán trắc nghiệm – lớp 12*** đượ cấu trúc thành các phần như sau:

- **Phần 1:** *Đề minh họa THPT quốc gia 2017 môn Toán có lời giải chi ti và phân tích cấu trúc đề thi.*
- **Phần 2:** *Phương pháp tư duy giải nhanh Toán trắc nghiệp và áp dụng và các chuyên đề kiến thức lớp 12.*

Cuốn sách gồm khoảng *1000 bài tập trắc nghiệm Toán* có đáp án và hướng dẫ giải theo từng chuyên đề giúp các em học sinh có môi trường để luyện tập.

Dù đã có nhiều cố gắng, dày công biên soạn nhưng cuốn sách khó trán được hết thiếu sót, rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô giáo, các em họ sinh và bạn đọc để cuốn sách được hoàn thiện hơn trong lần tái bản.

Chúc các em học tốt và thành công!

Tác gi

Trải nghiệm của học sinh về các phương pháp tư duy giải nhanh

Từ năm 2015, thầy Nguyễn Bá Tuấn đã nghiên cứu và đưa ra nhiều phương pháp tư duy giải nhanh cho Toán trắc nghiệm được hàng nghìn học sinh biết đến qua các video bài giảng, các đề thi thử Toán trắc nghiệm. Cảm nhận chung của các em về các phương pháp tư duy giải nhanh Toán đó là: đơn giản, dễ hiểu, vận dụng hiệu quả, phù hợp cho mọi đối tượng học sinh. Hàng nghìn học sinh đã áp dụng thành công trong các kỳ thi có môn Toán thi trắc nghiệm từ năm 2015 đến nay.

Đỗ Thị Ninh *(Tân sinh viên ĐH Khoa học Xã hội và Nhân văn – ĐH Quốc gia Hà Nội)*

Những bài giảng, những phương pháp tư duy giải nhanh cho Toán trắc nghiệm của thầy Tuấn thật tuyệt vời. Em là một học sinh khối C, học Toán rất kém, từ khi biết tới thầy, em đã học theo các phương pháp tư duy của thầy, nó giúp em thấy yêu môn Toán hơn. Thầy là người đã truyền động lực cho em. Nhờ các phương pháp giải nhanh, các đề thi thử và cả sự vui tính của thầy trong cách giảng, em đã đạt được kết quả như mong muốn và đỗ vào khoa Báo chí của trường Đại học Khoa học Xã hội và Nhân văn.

Nguyễn Đức Thiện *(Sinh viên ĐH Công nghệ - ĐH Quốc gia Hà Nội)*

Là một học sinh học khá môn Toán nhưng khi làm đề Toán trắc nghiệm em vẫn chưa làm chủ được thời gian. Nhưng từ khi học các bài giảng về phương pháp tư duy giải nhanh của thầy, em đã cải thiện được rất nhiều. Từ các phương pháp tư duy của thầy, em cũng đã học cách gặp các bài toán đều cố gắng tìm tòi hướng làm nhanh hơn, thầy đã dạy em không chỉ kiến thức mà còn là cách tư duy toán học, phương pháp tiếp cận vấn đề sao cho nhanh và hiệu quả nhất.

Đặng Hùng *(khoa Y dược – ĐH Quốc gia Hà Nội)*

Em cảm ơn thầy rất nhiều, nhờ những phương pháp tư duy của thầy đã giúp em giải nhanh hơn, cũng giúp em có tâm thế chủ động tìm kiếm thêm các phương pháp mới. Cùng từ các đề thi thử thầy soạn cũng đã giúp em rèn luyện tốt hơn, làm quen với các đề thi Toán trắc nghiệm. Thầy đã truyền cảm hứng cho em trong môn Toán. Cảm ơn thầy rất nhiều!

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

Bộ sách ôn luyện Toán trắc nghiệm gồm 3 cuốn, trong đó 2 cuốn: ***Phươn pháp tư duy giải nhanh Toán trắc nghiệm lớp 12*** và ***Phương pháp tư duy gi nhanh Toán trắc nghiệm lớp 10, lớp 11*** bao quát nội dung kiến thức môn Toá THPT quốc gia để phục vụ cho các bạn ôn tập. Các bạn ôn thi THPT quốc gi năm 2017 chỉ cần tập trung vào cuốn lớp 12 vì cấu trúc đề thi chỉ tập trung và lớp 12, sang năm 2018 thì cần nắm chắc cả kiến thức lớp 11 và từ năm 2019 toàn bộ kiến thức Toán THPT nên ôn cả 2 cuốn. Đối với các bạn ôn các kỳ th khác, cần chú ý cấu trúc của đề thi để có định hướng và kế hoạch ôn luyện tố nhất. Cuốn ***Tuyển tập đề thi và phương pháp giải nhanh Toán trắc nghiệm*** ba gồm các đề thi trắc nghiệm được biên soạn theo cấu trúc đề THPT quốc gia và đ thi mở rộng kèm theo đáp án và hướng dẫn giải theo các phương pháp tư duy gi nhanh giúp các em rèn kỹ năng làm bài và phương pháp tư duy giải các bài tậ trắc nghiệm, quen dần với cách làm đề trắc nghiệm.

Một số lưu ý để sử dụng hiệu quả bộ sách:

1. ***Đọc và học các phương pháp tư duy.*** Kể cả chưa học tới các phần kiến thứ đó thì việc đọc và học trước các phương pháp tư duy cũng sẽ giúp các en hình thành tư duy và cách học cho Toán trắc nghiệm.
2. ***Luyện tập thường xuyên với các bài tập trong sách.*** Áp dụng các phươn pháp tư duy giải nhanh đồng thời hãy thử tư duy để tìm ra phương pháp hay hơn
3. ***Ghi chú, ghi chép, đánh dấu*** các mục, phần mà các em thấy cần ghi nhớ.
4. ***Khi có khó khăn hoặc vướng mắc,*** các em có thể:

- Hỏi giáo viên trên lớp;
- Trao đổi với bạn bè để tăng hiệu quả của việc học;
- Trao đổi trực tiếp với tác giả cuốn sách là thầy Nguyễn Bá Tuấn qua các kênh:

  Email: batuantoan@gmail.com

  Facebook: https://www.facebook.com/NguyenBaTuan.gvToan

PHẦN MỘT

ĐỀ THI MINH HỌA THPT QUỐC GIA VÀ PHÂN TÍCH CẤU TRÚC ĐỀ THI

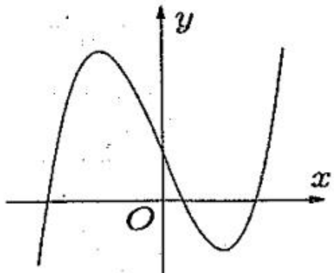
A. Giải đề minh họa THPT quốc gia 2017 môn Toán theo phương pháp giải nhanh *(Nguồn đề: Bộ Giáo dục và Đào tạo)*

Câu 1: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=-x^2+x-1$ **B.** $y=-x^3+3x+1$

C. $y=x^4-x^2+1$ **D.** $y=x^3-3x+1$

Hướng dẫn giải



Cách 1: Nhìn vào đồ thị có ngay $a>0$ nên loại A, B.

Đồ thị đã cho là đồ thị hàm bậc 3 nên chọn đáp án **D.**

Cách 2:

Đồ thị hàm số ở hình bên có hai điểm cực trị và

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$

A Sai vì đây là đồ thị hàm bậc hai chỉ có một điểm cực trị

C Sai vì đồ thị hàm trùng phương nhận Oy làm trục đối xứng

B Sai do $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$, hệ số a < 0.

Đáp án: **D.**

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$

Hướng dẫn giải

+) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ là một đường tiệm cận ngang

+) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow y = -1$ là một đường tiệm cận ngang. Đáp án: **C.**

Câu 3: Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$ **B.** $(0; +\infty)$ **C.** $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ **D.** $(-\infty; 0)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = 8x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Đáp án: **B.**

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có đúng một cực trị

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$

Hướng dẫn giải

Đáp án A: Sai vì hàm số có hai cực trị

Đáp án B: Sai vì hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1

Đáp án C: Sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$

Đáp án D: Đúng

Đáp án: **D.**

Câu 5: Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

A. $y_{CĐ} = 4$ **B.** $y_{CĐ} = 1$ **C.** $y_{CĐ} = 0$ **D.** $y_{CĐ} = -1$

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$

Vậy giá trị cực đại của hàm số bằng 4 (hàm bậc 3 có giá trị cực đại lớn hơn giá trị cực tiểu).

Đáp án: **A.**

Câu 6: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$ là:

A. $\min\limits_{[2;4]} y = 6$ **B.** $\min\limits_{[2;4]} y = -2$ **C.** $\min\limits_{[2;4]} y = -3$ **D.** $\min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{19}{3}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Do xét trên [2;4] nên dễ thấy y > 0 từ đó loại B, C. Còn lại A và D thử thấy x=3 thì y=6. Đáp án: **A.** (có thể dùng máy tính Casio để tìm x)

Cách 2: Ta có: $y' = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{(loại)} \\ x = 3 \end{array}\right.$ (do ta xét trên đoạn $[2;4]$)

Hàm số liên tục trên đoạn $[2;4]$ và ta có $y(2) = 7;\ y(3) = 6;\ y(4) = \dfrac{19}{3}$.

Đáp án: **A.**

Câu 7: Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất, ký hiệu $(x_0; y_0)$ là toạ độ của điểm đó. Giá trị của y_0 là

A. $y_0 = 4$ **B.** $y_0 = 0$ **C.** $y_0 = 2$ **D.** $y_0 = -1$

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$-2x + 2 = x^3 + x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2$. Đáp án: **C.**

Câu 8: Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân là:

A. $m = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$ **D.** $m = 1$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có: $y' = 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \end{array}\right.$

Điều kiện hàm số có 3 điểm cực trị $-m > 0$ (có thể nhìn nhanh để hàm số bậc 4 trùng phương có 3 cực trị thì a.b<0) $\Leftrightarrow m < 0 \Rightarrow$ Ta loại đáp án C, D (*)

Khi đó tọa độ 3 điểm cực trị là A(0;1); B $(\sqrt{-m};-m^2+1)$; C $(-\sqrt{-m};-m^2+1)$

Ta thấy AB = AC nên tam giác ABC luôn cân tại A.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow m+m^4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$, loại $m=0$

Hướng khác: Từ (*) Đến đây chỉ còn đáp án A hoặc B đúng. Thay $m=-1$ ta có tọa độ 3 điểm A(0;1); B(1;0); C(-1;0), thấy thỏa mãn tam giác ABC vuông cân nên chọn đáp án **B** (nếu không thỏa mãn ta sẽ chọn A).

Cách 2: Ta có công thức dạng tổng quát của đồ thị hàm số $y=x^4+bx^2+c$ có 3 điểm cực trị khi b<0. Nếu đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị thì 3 điểm cực trị đó tạo thành tam giác cân với góc ở đỉnh là α thì $\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{-\frac{b}{2}}$

Đáp án: **B.**

Câu 9: Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có 2 tiệm cận ngang là

A. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

B. $m<0$ **C.** $m=0$ **D.** $m>0$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Khi m = 0 ta có y = x+1 thì đồ thị hàm số không có tiệm cận $\Rightarrow$ Loại

Khi m > 0 ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}=\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{m}} \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{m}} \text{ là một tiệm cận ngang}$$

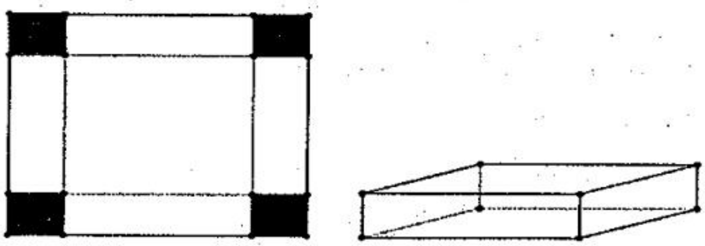
$$\lim_{x\to-\infty}=\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-1}{\sqrt{m}} \Rightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{m}} \text{ là một tiệm cận ngang}$$

Khi m < 0: Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Đáp án: **D.**

Cách 2: m = 1 thay vào rồi dùng máy tính Casio tìm tiệm cận ngang sẽ thấy có 2 tiệm cận ngang là y = 1 và y = -1. Đáp án: **D.**

Câu 10: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x=6$ **B.** $x=3$ **C.** $x=2$ **D.** $x=4$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi x (cm) là cạnh hình vuông bị cắt $(0 < x < 6)$

Có: V = y = $x(12-2x)^2 = 4x(36-12x+x^2)$

$$y' = 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=6\text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Cách 2:

$$V = x(12-2x)^2 = \frac{1}{4}.4x.(12-2x).(12-2x) \le \frac{1}{4}\left(\frac{4x+12-2x+12-2x}{3}\right)^3 = 128$$

$$V_{\max} = 128 \Leftrightarrow 4x = 12-2x \Leftrightarrow x=2$$

Cách 3: Thử trực tiếp các đáp án để tính V. Sau đó chọn đáp án ứng với V lớn nhất.

Đáp án: **C.**

Câu 11: Tất cả giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \le 0$ hoặc $1 \le m < 2$ **B.** $m \le 0$

C. $1 \le m < 2$ **D.** $m \ge 2$

Hướng dẫn giải

Đặt t = $\tan x$ (t $\in (0;1)$). Do $\tan x$ là hàm đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ nên để thoả mãn đề bài tương đương với $y(t)=\dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên $(0;1)$

$$y'(t)=\frac{-m+2}{(t-m)^2}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m>0 \\ m\neq t \end{cases}$$

Để hàm y(t) đồng biến trên (0;1) thì $\begin{cases} m<2 \\ m\notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 0 \\ 2>m\ge 1 \end{cases}$

Có thể dùng Table để khảo sát. Đáp án: **A.**

Câu 12: Giải phương trình $\log_4(x-1)=3$

A. $x=63$ **B.** $x=65$ **C.** $x=80$ **D.** $x=82$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

Phương trình trở thành $x-1=4^3 \Leftrightarrow x=65$ (thỏa mãn). Đáp án: **B.**

Câu 13: Đạo hàm của hàm số $y=13^x$ là:

A. $y'=x.13^{x-1}$ **B.** $y'=13^x.\ln 13$ **C.** $y'=13^x$ **D.** $y'=\frac{13^x}{\ln 13}$

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=(13^x)'=13^x\ln 13$. (Có thể dùng máy tính Casio tính đạo hàm tại điểm để loại đáp án). Đáp án: **B.**

Câu 14: Giải bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$.

A. $x>3$ **B.** $\frac{1}{3}<x<3$ **C.** $x<3$ **D.** $x>\frac{10}{3}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: BPT $\Leftrightarrow 3x-1>8 \Leftrightarrow x>3$. Đáp án: **A.**

Cách 2: Hàm số là đồng biến nên nghiệm có dạng $x>a$ nên loại B, C. Thử giá trị thuộc tập ở đáp án A mà không thuộc đáp án D thấy thỏa mãn nên chọn **A.**

Câu 15: Tập xác định D của hàm số $y=\log_2(x^2-2x-3)$ là

A. $D=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$ **B.** $D=[-1;3]$

C. $D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ **D.** $D=(-1;3)$

Hướng dẫn giải

$x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-1 \end{array}\right.$ Do đó, tập xác định của hàm số là

$D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Đáp án: **C.**

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=2^x.7^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $f(x)<1 \Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0$ **B.** $f(x)<1 \Leftrightarrow x\ln 2+x^2\ln 7<0$

C. $f(x)<1 \Leftrightarrow x\log_7 2+x^2<0$ **D.** $f(x)<1 \Leftrightarrow 1+x\log_2 7<0$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Với $f(x)<1$, ta có

$$2^x.7^{x^2}<1 \Leftrightarrow \log_2\left(2^x.7^{x^2}\right)<\log_2 1=0 \Leftrightarrow \log_2 2^x+\log_2 7^{x^2}<0 \Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0$$

$$2^x.7^{x^2}<1 \Leftrightarrow \ln\left(2^x.7^{x^2}\right)<\ln 1=0 \Leftrightarrow \ln 2^x+\ln 7^{x^2}<0 \Leftrightarrow x\ln 2+x^2\ln 7<0$$

$$2^x.7^{x^2}<1 \Leftrightarrow \log_7\left(2^x.7^{x^2}\right)<\log_7 1=0 \Leftrightarrow \log_7 2^x+\log_7 7^{x^2}<0 \Leftrightarrow x\log_7 2+x^2<0$$

Vì $x\in\mathbb{R}$ nên khẳng định

$x+x^2\log_2 7<0 \Leftrightarrow x(1+x\log_2 7)<0 \Leftrightarrow 1+x\log_2 7<0$ là sai.

Cách 2: Dùng phương pháp ước lượng.

Cách 3: Dùng phương pháp điểm biên.

Đáp án: **D.**

Câu 17: Cho các số thực dương a,b, với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}\log_a b$ **B.** $\log_{a^2}(ab)=2+2\log_a b$

C. $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{4}\log_a b$ **D.** $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}(\log_a ab)=\frac{1}{2}(\log_a a+\log_a b)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$.

Cách khác: Có thể lấy $a=2$, $b=1$ và thử đáp án. Chú ý dùng phương pháp ***Tổng quát hóa*** để việc thử được tối ưu. Đáp án: **D.**

Câu 18: Đạo hàm của hàm số $y=\frac{x+1}{4^x}$ bằng:

A. $y'=\frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ **B.** $y'=\frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$

C. $y'=\frac{1-2(x+1)\ln 2}{4^{x^2}}$ **D.** $y'=\frac{1+2(x+1)\ln 2}{4^{x^2}}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có $y'=\left(\frac{x+1}{4^x}\right)'=\frac{(x+1)'.4^x-(x+1).(4^x)'}{(4^x)^2}=\frac{4^x-(x+1).4^x.\ln 4}{(4^x)^2}$

$=\frac{1-(x+1).\ln 4}{4^x}=\frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$. **Đáp án: A.**

Cách 2: Do $y=\frac{u}{v}$ nên y' xuất hiện dấu trừ ở tử, ta loại B, D. Mẫu của y' không thể có dạng 4^{x^2} nên ta loại C. **Đáp án: A.**

Cách 3: Dùng máy tính Casio.

Câu 19: Đặt $a=\log_2 3$ và $b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b

A. $\log_6 45=\frac{a+2ab}{ab+b}$

B. $\log_6 45=\frac{2a^2-2ab}{ab}$

C. $\log_6 45=\frac{a+2ab}{ab}$

D. $\log_6 45=\frac{2a^2-2ab}{ab+b}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Biến đổi và dùng các công thức cơ bản và công thức

$$\log_{(ab)} c=\frac{1}{\log_c(ab)}=\frac{1}{\log_c a+\log_c a}$$

Biến đổi ta được đáp án **C.**

Cách 2: Dùng máy tính $\log_2 3\to A$ (Shift + STO+A); $\log_5 3\to B$ (Shift + STO+B)

Sau đó thử vào 4 đáp án A, B, C, D.

Cách 3: Ước lượng: $\log_6 45>\log_6 36=2$

Nhận xét các đáp án để chọn đáp án **C.**

Câu 20: Cho hai số thực a và b, với $1<a<b$.

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\log_a b<1<\log_b a$

B. $1<\log_a b<\log_b a$

C. $\log_b a<\log_a b<1$

D. $\log_b a<1<\log_a b$

Hướng dẫn giải

Cách 1:

$1<a<b\Rightarrow \log_a b>1\Rightarrow \log_b a<1$

+) $A:\log_a b<1\Rightarrow$ loại

+) $B:\log_b a>\log_a b\Rightarrow$ loại

+) $C:\log_a b<1\Rightarrow$ loại

Cách 2: $a = 2$; $b = 3 \Rightarrow$ Tính $\log_b a; \log_a b \Rightarrow$ Nhận xét

Cách 3: Ta có $b > a > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b > \log_a a \Leftrightarrow \log_a b > 1 \\ \log_b b > \log_b a \Leftrightarrow 1 > \log_b a \end{cases} \Leftrightarrow \log_b a < 1 < \log_a b$.

Đáp án: **D.**

Câu 21: Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m = \dfrac{100.(1,01)^3}{3}$ (triệu đồng) **B.** $m = \dfrac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng)

C. $m = \dfrac{100.1,03}{3}$ (triệu đồng) **D.** $m = \dfrac{120.(1,12)^3}{(1,12)^2 - 1}$ (triệu đồng)

Hướng dẫn giải

p = 100 triệu, 12%/năm $\Rightarrow$ 1%/tháng, $r = 0{,}01$, $rp = 1$.

Giả sử các tháng là:

01/03 $\xrightarrow{thang\,1}$ 1/04 $\rightarrow$ Lãi rp; $m = m_1 + rp$
$\rightarrow$ Trả gốc $m_1 \Rightarrow$ Còn nợ $p - m_1$

01/04 $\xrightarrow{thang\,2}$ 1/05 $\rightarrow$ Lãi $r(p - m_1)$ $\rightarrow$ $m = m_2 + r(p - m_1)$
$\rightarrow$ Trả gốc m_2 $\rightarrow$ Còn nợ $p - m_1 - m_2$

01/05 $\xrightarrow{thang\,3}$ 1/06 $\rightarrow$ Lãi $r\,p - m_1 - m_2$ $m = m_3 + r(p - m_1 - m_2)$
$\rightarrow$ Trả nốt gốc $m_3 = p - m_1 - m_2$

Theo đề

$\Rightarrow m_1 + rP = m_2 + r(P - m_1) \Rightarrow m_2 = m_1(1 + r)$; $m_3 = m_2(1 + r) = m_1(1 + r)^2$

$$m_1 + m_2 + m_3 = p \Rightarrow m_1 = \frac{rp}{(1+r)^3 - 1} \Rightarrow m = m_1 + rp = rp.\frac{(1+r)^3}{(1+r)^3 - 1}$$

Đáp án: **B.**

Câu 22: Công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a,\ x=b\ (a<b)$, xung quanh trục Ox là:

A. $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$ **B.** $V=\int_a^b f^2(x)dx.$

C. $V=\pi\int_a^b f(x)dx.$ **D.** $V=\int_a^b |f(x)|dx.$

Hướng dẫn giải

Nhớ công thức (hiểu công thức được lập nên từ gốc là tính tổng vô hạn diện tích các hình tròn)

Có thể nhớ điểm mấu chốt là trong công thức có $\pi,\ f^2(x) \Rightarrow$ loại B, C, D.

Đáp án: **A.**

Câu 23: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}$ là:

A. $\int f(x)dx=\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.$

B. $\int f(x)dx=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.$

C. $\int f(x)dx=-\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+C.$

D. $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C.$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có: $I=\int f(x)dx=\int\sqrt{2x-1}dx.$

Đặt

$$\sqrt{2x-1}=t\Rightarrow x=\frac{t^2+1}{2}\Rightarrow I=\int td\left(\frac{t^2+1}{2}\right)=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.$$

Cách 2: $F'_{A,B,C,D}\mid x=5; f(5)=3\Rightarrow B$

Đáp án: **B.**

Câu 24: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2 m **B.** 2 m **C.** 10 m **D.** 20 m

Hướng dẫn giải

$v = 10 = -5t + 10 \Rightarrow t_1 = 0; v_2 = 0 = -5t + 10 \Rightarrow t_2 = 2$

$$S(t) = \int_0^2 |(-5t+10)|\,dt = 10$$

Cách khác: Ta có công thức $v^2 - v_0{}^2 = 2as$ (trong đó a là gia tốc, v_0 là vận tốc đầu ở đây là bằng 10 m/s, v là vận tốc lúc sau, s là quãng đường đi được).

Trong bài do chuyển động chậm dần đều nên a < 0 lấy a từ công thức của v, $a = -5$ m/s^2.

Đáp án: **C.**

Câu 25: Tích phân $\int_0^{\pi} \cos^3 x \sin x dx$ là:

A. $I = -\frac{1}{4}\pi^4.$ **B.** $I = -\pi^4.$ **C.** $I = 0.$ **D.** $I = -\frac{1}{4}.$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có $I = \int_0^{\pi} -\cos^3 x d(\cos x) = -\frac{\cos^4 x}{4}\Big|_0^{\pi} = 0.$

Cách 2: Bấm máy tính Casio và vận dụng tổ hợp các phím để so sánh đáp án nhanh nhất.

Cách 3: Đặt t = $\cos x$ đưa về công thức đặc biệt có tích phân bằng 0.

Đáp án: **C.**

Câu 26: Tích phân $I = \int_1^e x\ln x dx$ bằng

A. $I = \frac{1}{2}$ **B.** $I = \frac{e^2+1}{2}$ **C.** $I = \frac{e^2+1}{4}$ **D.** $I = \frac{e^2-1}{4}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{x^2 \ln x}{2}\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}.$

Cách 2: $e^2 \approx 7{,}3$; $I \approx 2, \ldots$ (bấm máy), từ đó thấy chỉ có C thỏa mãn để có thể lớn hơn 2.

Đáp án: **C.**

Câu 27: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$ là

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{12}$ **D.** 13

Hướng dẫn giải

$$x - x^2 = x^3 - x \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

$$S = \int_{-2}^{0} |(x^3 + x^2 - 2x)|\,dx + \int_{0}^{1} |(x^3 + x^2 - 2x)| = \frac{37}{12} \text{ (bấm máy)}$$

Đáp án: **A.**

Câu 28: Kí hiệu (*H*) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Thể tích *V* của khối tròn xoay thu được khi quay hình (*H*) xung quanh trục *Ox* là

A. $V = 4 - 2e$ **B.** $V = (4 - 2e)\pi$ **C.** $V = e^2 - 5$ **D.** $V = (e^2 - 5)\pi$

Hướng dẫn giải

$2(x-1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$S = \int_0^1 \left|2(x-1)e^x\right| dx = (e^2 - 5)\pi$$

Đáp án: **D.**

Câu 29: Cho số phức $z = 3 - 2i$. Giá trị phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$ là

A. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng $-2i$.
B. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2.
C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $2i$.
D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2.

Đáp án: **D.**

Câu 30: Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Môđun của số phức $z_1 + z_2$ là

A. $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$. **B.** $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$.
C. $|z_1 + z_2| = 1$. **D.** $|z_1 + z_2| = 5$.

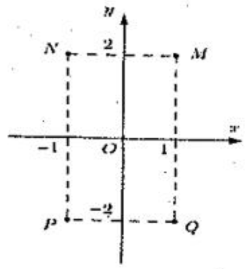
Hướng dẫn giải

$z_1 + z_2 = 3 - 2i \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{13}$

Có thể dùng máy tính Casio khi máy cho môđun là số thập phân thì bình phương lên để biết nó là căn của số nào.

Đáp án: **A.**

Câu 31: Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z=3-i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M,N,P,Q ở hình bên?



A. Điểm P.

B. Điểm Q.

C. Điểm M.

D. Điểm N.

Hướng dẫn giải

$z=\dfrac{(3-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=1-2\mathrm{i}\Rightarrow$ Q(1 ; -2)

(có thể dùng máy tính Casio để tìm z)

Đáp án: **B.**

Câu 32: Cho số phức $z=2+5i$. Giá trị số phức $\mathrm{w}=iz+\overline{z}$ là

A. $w=7-3i.$

B. $w=-3-3i.$

C. $w=3+7i.$

D. $w=-7-7i.$

Hướng dẫn giải

Ta có $w=i(2+5i)+(2-5i)=-3-3i$

Đáp án: **B.**

Câu 33: Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4-z^2-12=0$. Tổng $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ là

A. T = 4

B. $T=2\sqrt{3}$

C. $T=4+2\sqrt{3}$

D. $T=2+2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Đặt $t=z^2\Rightarrow t^2-t-12=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=-3\\t=4\end{array}\right.$

Ta có: $|z_1|=|z_2|;|z_3|=|z_4|$

Trường hợp 1: $z^2=4\Rightarrow|z_1|=|z_2|=2$

Trường hợp 2: $z^2=-3\Rightarrow|z_3|=|z_4|=\sqrt{3}$

Đáp án: **C.**

Câu 34: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $\mathrm{w}=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó bằng:

A. $r=4$ **B.** $r=5$ **C.** $r=20$ **D.** $r=22$

Hướng dẫn giải

$|z| = 4$; $w = (3+4i)z + i$

$\Leftrightarrow |w-i| = |(3+4i)z| = 5.4 = 20$

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(0;1)$; $r = 20$.

Đáp án: **C.**

Câu 35: Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

A. $V = a^3$. **B.** $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. **C.** $V = 3\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = \frac{1}{3}a^3$.

Hướng dẫn giải

Ta có đường chéo của hình hộp chữ nhật 3 kích thước là x, y, z.

$AC' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3a}$, mà $x = y = z \Rightarrow x = a$

$\Rightarrow V = a^3$

Đáp án: **A.**

Câu 36: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V = a^3\sqrt{2}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

$V = \frac{1}{3}\sqrt{2}a.a^2 = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Đáp án: **D.**

Câu 37: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a, AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, BD. Thể tích V của tứ diện $AMNP$ là

A. $V = \frac{7}{2}a^3$. **B.** $V = 14a^3$. **C.** $V = \frac{28}{3}a^3$. **D.** $V = 7a^3$.

Hướng dẫn giải

Cho $a=1$.

$V_{AMNP} = \frac{V_{ABCD}}{4} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.6.7.4 = 7$

Đáp án: **D.**

Câu 38: Cho hình chóp tứ giác *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác *SAD* cân tại *S* và mặt bên (*SAD*) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp S.ABCD bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách *h* từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $h=\frac{2}{3}a$ **B.** $h=\frac{4}{3}a$ **C.** $h=\frac{8}{3}a$ **D.** $h=\frac{3}{4}a$

Hướng dẫn giải

Cách 1: $V_{ABCD}=\frac{1}{3}SH.(\sqrt{2})^2=\frac{4a^3}{3}\Rightarrow SH=2a$

Đặt hệ trục *Oxyz*:

$S(0;0;2)$; $D(-\sqrt{2};\frac{-\sqrt{2}}{2};0)$; $C(\sqrt{2};\frac{-\sqrt{2}}{2};0)$; $B(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0)$

$$d=\frac{|[\overrightarrow{SD};\overrightarrow{SC}].\overrightarrow{SB}|}{|[\overrightarrow{SD};\overrightarrow{SC}]|}$$

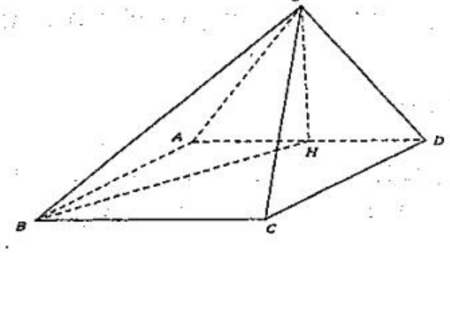
Trong đó: $\overrightarrow{SD}=(-\sqrt{2};\frac{-\sqrt{2}}{2};-2);\overrightarrow{SC}=(\sqrt{2};\frac{-\sqrt{2}}{2};-2);\overrightarrow{SB}=(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2};-2)$

$[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{SC}]=(0;-4\sqrt{2};2)\Rightarrow\frac{|[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{SC}].\overrightarrow{SB}|}{|[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{SC}]|}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

Cách 2: Gọi H là trung điểm AD khi đó có SH là đường cao của chóp S.ABCD

$$SH=\frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}}=\frac{4a^3}{2a^2}=2a\Rightarrow SD=\sqrt{SH^2+\left(\frac{AD}{2}\right)^2}=\sqrt{4a^2+\frac{a^2}{2}}=\frac{3a}{\sqrt{2}}$$

Có: $d\left(B,(SCD)\right)=2d\left(H,(SCD)\right)=2.\frac{SH.HD}{SD}=2.\frac{2a.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{3a}{\sqrt{2}}}=\frac{4a}{3}$



Đáp án: **B.**

Câu 39: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

A. $l = a$. **B.** $l = a\sqrt{2}$. **C.** $l = a\sqrt{3}$. **D.** $l = 2a$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$. Khi quay tam giác ABC quanh trục AB đường sinh của hình nón là đoạn BC do đó $l = 2a$

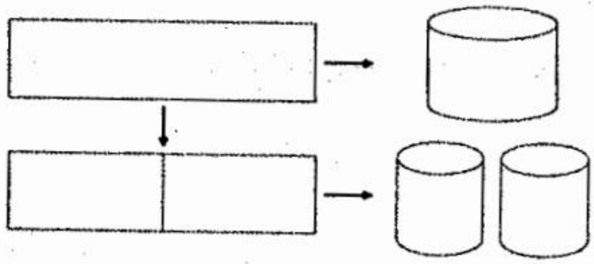
Đáp án : **D.**

Câu 40: Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước 50 cm x 240 cm, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50 cm, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây).

Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo Cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$



A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2} = 1$ **C.** $\frac{V_1}{V_2} = 2$ **D.** $\frac{V_1}{V_2} = 4$

Hướng dẫn giải

Do chiều cao của các thùng là như nhau nên tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng tỉ số tổng diện tích đáy thùng

$S = \pi R^2 = \pi \frac{C^2}{4\pi^2} = \frac{C^2}{4\pi} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{C_1^2}{C_2^2} = 4 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{2S_2} = 2$

Đáp án: **C.**

Câu 41: Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1$ và $AD = 2$. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AD* và *BC*. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục *MN*, ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó

A. $S_{tp} = 4\pi$ **B.** $S_{tp} = 2\pi$ **C.** $S_{tp} = 6\pi$ **D.** $S_{tp} = 10\pi$

Hướng dẫn giải

Hình trụ có diện tích đáy $S_1 = \pi$, có diện tích xung quanh là

$$S_{xq} = AB.2\pi.\frac{BC}{2} = 2\pi$$

Vậy $S_{tp} = 2S_1 + S_{xq} = 4\pi$

Đáp án: **A.**

Câu 42: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên *SAB* là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích *V* của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho là

A. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$ **B.** $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$ **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ **D.** $V = \frac{5\pi}{3}$

Hướng dẫn giải

Gọi *G* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*, *G'* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *SAB*. Dựng đường thẳng d, d' lần lượt qua *G, G'* và song song với *SH, CH*. hai đường d và d' cắt nhau tại I. Khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp cần tìm.

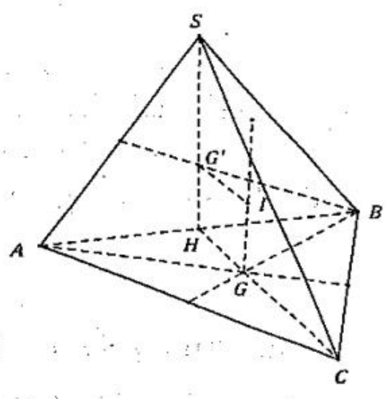
Dễ có:

$IG = \frac{1}{3}SH,\ AG = \frac{2}{3}SH,\ SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow R = \sqrt{AG^2 + IG^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{2}{3}SH\right)^2 + \left(\frac{1}{3}SH\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{6}$

$\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)^3 = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.



Đáp án: **B.**

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Véctơ nào dưới đây là một véctơ pháp tuyến của (*P*)?

A. $\overrightarrow{n_4} = (-1;0;-1)$ **B.** $\overrightarrow{n_1} = (3;-1;2)$

C. $\overrightarrow{n_3} = (3;-1;0)$ **D.** $\overrightarrow{n_2} = (3;0;-1)$

Đáp án: **D.**

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu

$$(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$$

Tọa độ tâm *I* và tính bán kính *R* của (*S*) là

A. $I(-1;2;1)$ và $R = 3$. **B.** $I(1;-2;-1)$ và $R = 3$.

C. $I(-1;2;1)$ và $R = 9$. **D.** $I(1;-2;-1)$ và $R = 9$.

Hướng dẫn giải

Phương trình tổng quát của mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính *R* có dạng

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Vậy $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$ có tâm $I(-1;2;1), R = 3$

Đáp án: **A.**

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1;-2;\ 3)$. Khoảng cách *d* từ *A* đến (*P*) là:

A. $d = \dfrac{5}{9}$ **B.** $d = \dfrac{5}{29}$ **C.** $d = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$ **D.** $d = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Hướng dẫn giải

$d(A,(P)) = \dfrac{|3.1 + 4(-2) + 2.3 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$. Đáp án: **C.**

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng Δ có phương trình:

$$\frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Xét mặt phẳng $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$, m là tham số thực. Tất cả các giá trị của *m* để mặt phẳng (*P*) vuông góc với đường thẳng Δ là

A. $m = -2$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = -52$ **D.** $m = 52$

Hướng dẫn giải

Để (P) vuông góc với đường thẳng Δ thì véctơ pháp tuyến của (P) phải cùng phương với véctơ chỉ phương của Δ ta có: $\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow m = 2$

Đáp án: **B.**

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(0;1;1)$ và $B(1;2;3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB

A. $x + y + 2z - 3 = 0$ **B.** $x + y + 2z - 6 = 0$

C. $x + 3y + 4z - 7 = 0$ **D.** $x + 3y + 4z - 26 = 0$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;1;2)$

Vậy mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB *là:*

$1(x-0) + 1(y-1) + 2(z-1) = 0$ hay $x + y + 2z - 3 = 0$.

Cách 2: Thay tọa độ điểm A vào các đáp án thì chỉ đáp án A là thỏa mãn.

Cách 3: Tìm véctơ AB từ đó có véctơ pháp tuyến của (P) nên loại đáp án C, D. Sau đó thay tọa độ điểm A vào đáp án A hoặc B là thấy đáp án A thỏa mãn.

Đáp án: **A.**

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;\ 1;\ 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1.

Viết phương trình của mặt cầu (S).

A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$ **B.** $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$ **D.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$

Hướng dẫn giải

Dễ dàng ta loại được A, B vì không nhận I làm tâm.

Ta có bán kính mặt cầu $R = \sqrt{r^2 + d^2(I,(P))}$ trong đó r bán kính đường tròn, $d(I,(P))$ là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P)

$$d(I,(P)) = \frac{|2.2 + 1 + 2.1 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3$$

$\Rightarrow R = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$

Đáp án: **D.**

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng *d* có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua *A*, vuông góc và cắt *d*.

A. $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$ **B.** $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$

C. $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$ **D.** $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{1}$

Hướng dẫn giải

Nhận thấy tất cả các phương án khi thay tọa độ điểm A đều thỏa mãn.
Tiếp đến xét tính vuông góc ta loại được đáp án A, C.
Xét tính cắt nhau

Có phương án B: $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}\Rightarrow\begin{cases}x=1+t'\\y=t'\\z=2-t'\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

$$d:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=-1+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$$

Để xét tính cắt nhau ta xét hệ sau có nghiệm hay không $\begin{cases}1+t=1+t'\\t=t'\\-1+2t=2-t'\end{cases}$

Nhận thấy hệ trên có nghiệm. Đáp án: **B.**

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho bốn điểm:

$$A(1;-2;\ 0),\ B(0;-1;1),\ C(2;1;-1)\text{ và }D(3;1;4)$$

Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?

A. 1 mặt phẳng **B.** 4 mặt phẳng

C. 7 mặt phẳng **D.** Có vô số mặt phẳng

Hướng dẫn giải

Kiểm tra 4 điểm A, B, C, D xem có đồng phẳng hay không?

Có $\overrightarrow{AB}=(-1;1;1),\overrightarrow{AC}=(1;3;-1),\overrightarrow{AD}=(2;3;4)$

Xét $\overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=-24\neq0$ vậy 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

Có hai loại mặt phẳng thỏa mãn đề bài là:
Loại 1: Mặt phẳng qua trung điểm của 3 cạnh bên (có 4 mặt phẳng loại này)
Loại 2: Mặt phẳng qua trung điểm của 2 cặp cạnh đối diện (có 3 mặt phẳng loại này)
Có 7 mặt phẳng thỏa mãn đề. Đáp án: **C.**

B. PHÂN TÍCH CẤU TRÚC ĐỀ THI

1. Theo phương án thi THPT quốc gia năm 2017 được Bộ Giáo dục và Đào tạo công bố: Năm 2017, nội dung thi nằm trong Chương trình lớp 12 THPT; năm 2018, nội dung thi nằm trong Chương trình lớp 11 và lớp 12 THPT; từ năm 2019 trở đi, nội dung thi nằm trong Chương trình cấp THPT.
2. Theo đề minh họa do Bộ Giáo dục và Đào tạo công bố, năm 2017 cấu trúc đề thi được phân bổ như sau:

Nội dung kiến thức	**Số câu**
1. Hàm số và các bài toán liên quan	11
2. Mũ và logarit	10
3. Nguyên hàm – Tích phân	7
4. Số phức	6
5. Hình học không gian	4
6. Mặt cầu, mặt trụ, mặt nón	4
7. Hình học tọa độ Oxyz	8
Tổng	50

Cụ thể:

1. Hàm số và các bài toán liên quan (gồm 11 câu)

Các dạng câu hỏi về:
- Đồ thị hàm; tiệm cận
- Tính đơn điệu
- Cực trị
- GTLN – GTNN
- Tương giao

2. Mũ và logarit (gồm có 10 câu)
- Tính đạo hàm; Tìm tập xác định
- Biểu thức logarit
- Phương trình, bất phương trình lôgarit; Bất phương trình mũ
- Bài toán lãi kép

3. Nguyên hàm – Tích phân (7 câu)
- Lý thuyết; Nguyên hàm; Tích phân
- Ứng dụng tích phân

4. Số phức (6 câu)
- Dạng đại số của số phức
- Dạng hình học gồm 2 câu
- Giải phương trình số phức

5. Hình học không gian (4 câu)
- Câu hỏi về lý thuyết về khối đa diện
- Dạng câu hỏi về tính thể tích (khối lập phương, khối chóp, tứ diện, lăng trụ)
- Khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt

6. Mặt cầu, mặt trụ, mặt nón (4 câu)
- Câu hỏi có tính liên hệ thực tế
- Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp

7. Hình học tọa độ Oxyz (8 câu)

Gồm các kiến thức về mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu khoảng cách quen thuộc mà mỗi học sinh bất kì nắm chắc kiến thức cơ bản có thể giải được

PHẦN HAI

PHƯƠNG PHÁP TƯ DUY GIẢI NHANH TOÁN TRẮC NGHIỆM

Chương I. LÝ THUYẾT CHUNG VỀ GIẢI NHANH TOÁN TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Kỹ năng bấm máy tính giải Toán trắc nghiệm

1. Phím CALC

Chức năng (**CALC**) là tính giá trị của một biểu thức

Ví dụ 1. Giải phương trình:

$$\sin 4x + \sin 2x = \cos 4x + \cos 2x$$

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

B. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

C. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

D. $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Hướng dẫn giải

Cách 1: $\sin 4x + \sin 2x = \cos 4x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 3x \cos x = \cos 3x \cos x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin 3x = \cos 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right.$. Đáp án: **C.**

Cách 2 :

(Chú ý: Trong các bài toán chứa hàm lượng giác với các đáp án ở đơn vị radian thì cần chuyển về hệ radian trước khi nhập hàm.)

Thử đáp án $\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}$ trước vì từ phương tình ta thấy có tình huống:

$cosa = sinb$ nên ta nghĩ đến $a+b=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow bx=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}$.

Dùng phím CALC gán giá trị $X=\frac{\pi}{12}$ ta thấy phương trình thỏa mãn.

Tiếp tục gán giá trị $X=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}$ thấy phương trình thỏa mãn. Đáp án: **C.**

Ví dụ 2. Giá trị $\lim\limits_{x\to 0} y=\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$ là:

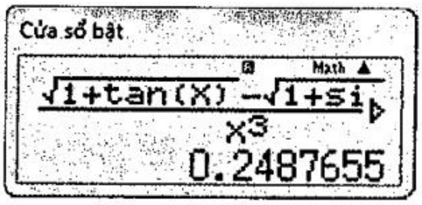
A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 4 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Nhập biểu thức rồi dùng phím CALC gán các giá trị xấp xỉ 0 cho X (như X=0.001; X=0.0001....)

$$\frac{\sqrt{1+\tan(X)}-\sqrt{1+\sin(X)}}{(X)^3} \xrightarrow{CALC} X=0,001$$

Cụ thể ta có các thao tác nhập trên Casio như sau:
Ta được kết quả



Vậy giới hạn là $0,25=\frac{1}{4}$. Đáp án: **A.**

<u>*Chú ý*</u>: Trong nhiều bài toán nếu ta chọn giá trị X không khéo sẽ dẫn tới hiện tượng tràn số cho kết quả không chính xác.
Như bài trên nếu cho $X \le 0.0001$ thì sẽ được kết quả là 0.
Bởi vậy, nếu nghi ngờ đáp án, ta nên thử nhiều giá trị X khác nhau.

Ví dụ 3. Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y+z+1=0$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt (α)

A. $2x-3y-z+1=0$ **B.** $x+y-5z+6=0$

C. $3x-y+2z=0$ **D.** $x-y-z+1=0$

Hướng dẫn giải

Ta có 2 mặt phẳng vuông góc với nhau khi tích vô hướng của 2 véctơ pháp tuyến bằng 0. Để tránh phải tính toán nhiều ta dùng chức năng phím CALC như sau:

Ta có $\overrightarrow{n_\alpha} = (2;3;1)$ nhập biểu thức $2A + 3B + C \xrightarrow{CALC} A = 2, B = -3, C = -1$

(A, B, C là tọa độ tương ứng của các véctơ pháp tuyến trong đáp án A) được kết quả 14.

Tiếp tục nhấn **CALC** và chọn $A = 1, B = 1, C = -5$ (là tọa độ tương ứng của các véctơ pháp tuyến trong đáp án B) được kết quả 0. Đáp án: **B.**

2. Phím SHIFT+ CALC (SOLVE)

Chức năng (SOLVE=SHIFT+CALC) là tìm nghiệm của phương trình bất kì trong một lân cận của x đã chỉ ra.

Như chúng ta đã biết, phím MODE 5 giúp tìm nghiệm của phương trình bậc 2, bậc 3 và hệ phương trình 2 ẩn, 3 ẩn. Với ưu điểm quét toàn bộ các nghiệm của phương trình dạng bậc 2, bậc 3. Nhưng nó có 1 nhược điểm lớn đó là với các loại phương trình vô tỉ thì không giải được.

Bởi vậy, phím SOLVE giúp ta tìm 1 nghiệm hoặc xét sự tồn tại nghiệm của 1 phương trình bất kỳ.

Ví dụ 1. Giao điểm M của đường thẳng $(d): \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{5-y}{2} = \dfrac{2z+1}{5}$ và $(P): 2x - 4y - 3z = -8$ là:

A. $M\left(5;-3;\dfrac{9}{2}\right)$ **B.** $M(1;1;2)$ **C.** $M(7;-1;-7)$ **D.** $M(5;3;2)$

Hướng dẫn giải

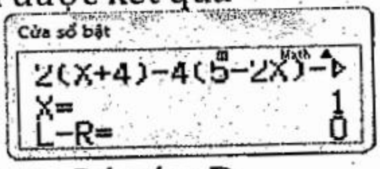
Phương trình dạng tham số của đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = \dfrac{5t-1}{2} \end{cases}$.

Vậy giao điểm là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 5 - 2t \\ z = \dfrac{5t-1}{2} \\ 2x - 4y - 3z = -8 \end{cases}$

Thay 3 phương trình đầu vào phương trình cuối ta được

$$2(t+4)-4(5-2t)-3.\frac{5t-1}{2}+8=0$$

Vậy thao tác chuyển d về dạng tham số rồi nhập vào máy biểu thức sau "$2(X+4)-4(5-2X)-3.\frac{5X-1}{2}+8$" và ấn [SHIFT SOLVE], giá trị khởi đầu X=0; với X chính là ẩn t. Ta được kết quả



Vậy $X=1 \Rightarrow t=1 \Rightarrow M(5;3;2)$. Đáp án: **D.**

3. Phím MODE 7

Chức năng **MODE 7** là tạo bảng giá trị của 1 hàm số $y=f(x)$. Từ bảng giá trị đó ta quan sát, từ đó:

- Tìm nghiệm phương trình khi các đáp án cách nhau 1 khoảng không đổi;
- Dự đoán tính đơn điệu của hàm số;
- Tính giới hạn;
- Dự đoán được min, max hàm số nếu có.

Ví dụ 1. Nghiệm của phương trình $\sin x+\cos x=\cos^2 x$ là:

A. 0 **B.** $\frac{\pi}{2}$ **C.** π **D.** $\frac{3\pi}{2}$

Hướng dẫn giải

Nhận thấy các đáp án đều cách nhau 1 khoảng không đổi là $\frac{\pi}{2}$ dẫn đến việc tạo bảng khá thuận lợi.

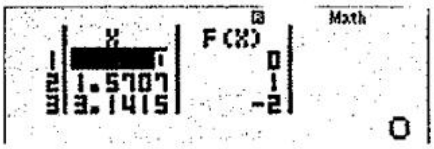
Ta nhấn **MODE 7** nhập hàm $f(X)=\sin(X)+\cos(X)-(\cos(X))^2$

Chọn giá trị khởi đầu **START**: 0 (là giá trị nhỏ nhất trong các đáp án)

Chọn giá trị cuối **END**: $\frac{3\pi}{2}$ giá trị lớn nhất trong các đáp án

Bước nhảy **STEP** là $\frac{\pi}{2}$ (khoảng cách nhỏ nhất giữa các đáp án)

Ta được bảng giá trị



Quan sát thấy giá trị $f(x)=0$ chỉ tại $X=0 \Rightarrow$ nghiệm của $f(x)=0$ l
$X=0$. Đáp án: **A.**

Ví dụ 2. Giới hạn của hàm số $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x+4^x}{4^x-1}$ là...

Hướng dẫn giải

Nếu ta dùng chức năng của phím **CALC** thì nhập hàm $\dfrac{3^x+4^x}{4^x-1}$ CALC rồi gá
giá trị của X là 1 số khá lớn như $X=200$. Khi đó máy báo **MATH ERRO**
đây là 1 nhược điểm của Casio khi máy tính phải xử lý các dữ liệu số to dẫ
tới hiện tượng tràn số máy không tính toán được. Như vậy ta cần chọn gi
trị của X phù hợp trong phạm vi máy tính có thể tính được.

Với tính năng của **MODE 7** ta sẽ xử lý nhẹ nhàng bài toán này như sau

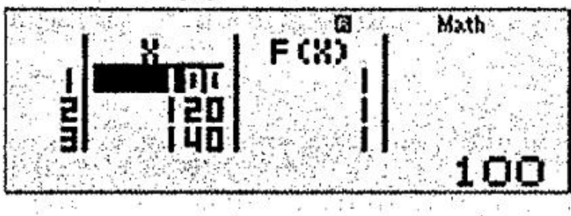
MODE 7 nhập hàm $f(X)=\dfrac{3^X+4^X}{4^X-1}$

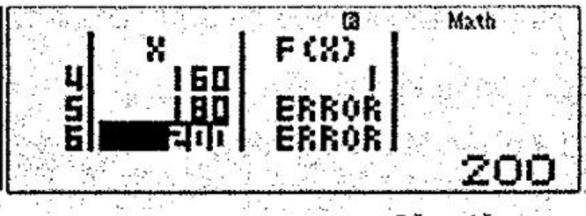
chọn giá trị khởi đầu **START**: 100 (do giới hạn khi $x\longrightarrow\infty$)

chọn giá trị cuối **END**: 200

bước nhảy **STEP**: 20

Ta được bảng giá trị





Quan sát thấy giá trị $f(X)=1$ tại $X=100,120,140,160 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x+4^x}{4^x-1}=1$

Đáp án: **1.**

Nhận xét: Như vậy nếu sử dụng chức năng phím CALC thì nên gán X có gi
trị <160, khi đó máy tính sẽ cho ta đáp án.

Ví dụ 3. Hệ số của x^{26} trong khai triển nhị thức

$\left(x^7+\dfrac{1}{x^4}\right)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i\,x^{7i}\dfrac{1}{x^{4(n-i)}}$ biết tổng ba hệ số của ba hạng tử đầu tiên trong khai triển bằng 56 là:

A. 210 **B.** 126 **C.** 252 **D.** 330

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Trước hết ta cần phải tìm n dựa vào dữ kiện tổng ba hệ số của ba hạng tử đầu tiên trong khai triển bằng 56 $\Leftrightarrow C_n^0+C_n^1+C_n^2=56$

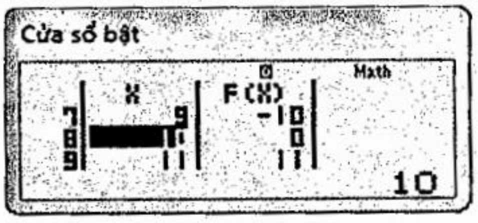
MODE 7 nhập hàm $f(X)=XC0+XC1+XC2-56$

START: 3

END: 13

STEP: 1

Ta được bảng giá trị:



ta thấy $X=10\Rightarrow f(X)=0\Rightarrow n=10$

+ Để xác định hệ số của x^{26}

Với cách thông thường ta cần tìm k thỏa mãn

$$x^{7k}.\frac{1}{x^{4(10-k)}}=x^{26}\Leftrightarrow 7k-4(10-k)=26$$

Giải phương trình trên ta được $k=6$

Vậy hệ số của x^{26} là $C_{10}^6=210$. **Đáp án: A.**

Cách 2:

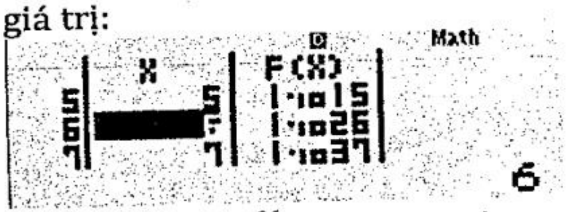
Để xác định hệ số của x^{26} trong khai triển $\left(x^7+\dfrac{1}{x^4}\right)^{10}=\sum\limits_{k=0}^{10}C_{10}^k\,x^{7k}\dfrac{1}{x^{4(10-k)}}$

Ta gán cho $x=10$

Dùng bảng **TABLE** nhập hàm $10^{7k}\dfrac{1}{10^{4(10-k)}}$, cho k chạy từ 0 đến 10 với bước nhảy 1

(X trong bảng được đóng vai trò là k)

Khi đó ta được bảng giá trị:



Nhận thấy tại $X = 6$ thì $f(X) = 10^{26}$ với cách gán $x = 10$ thì $f(X) = 10^{26}$ tương ứng với x^{26}.

Như vậy $k = 6 \Rightarrow$ hệ số cần tìm là $C_{10}^{6} = 210$.

4. Tính tích phân

** Hàm chứa giá trị tuyệt đối:*

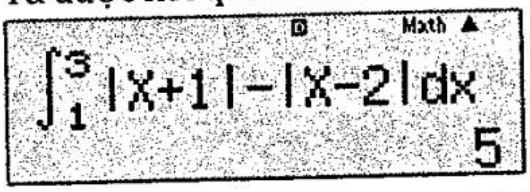
Lưu ý: Để ấn giá trị tuyệt đối ta dùng phím **Shift + Hyp** (hàm Abs)

Ví dụ: Cho tích phân

$$I = \int_1^3 \left(|x+1| - |x-2|\right) dx$$

Giá trị của *I*= ...

Ta được kết quả trên Casio như sau:



**Hàm có mũ bậc cao:*

Ví dụ: Cho tích phân

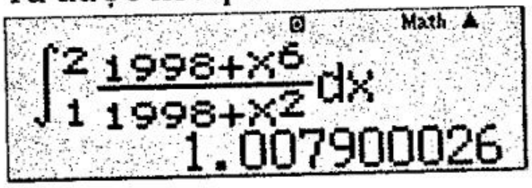
$$I = \int_1^2 \frac{1998 + x^6}{1998 + x^2} dx$$

Hãy tìm khẳng định đúng

A. $I < 1$ **B.** $I > 1998$

C. $I > 1$ **D.** $I < \frac{1}{1998}$

Ta được kết quả trên Casio như sau:



5. Giải phương trình bậc 3 và hệ phương trình thuần nhất (2 ẩn, 3 ẩn)

a) Phương trình bậc ba (MODE +5, 4)

Ví dụ 1. Giá trị của m để đồ thị hàm số y = $x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4$ tiếp xúc v trục hoành là

A. $m = -3$ hoặc $m = 0$ **B.** $m = 3$ hoặc $m = -1$

C. $m \in \mathbb{R}$ **D.** $m = 1$ hoặc $m = \pm 3$

Hướng dẫn giải

Để đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với một đường thẳng $d : y = ax + b$

Thì phương trình $f(x) = ax + b$ phải có nghiệm bội.

Vận dụng lý thuyết đó ta sẽ thử các giá trị của m trong các lựa chọn để tìm đáp án:

Quan sát chọn các giá trị m xuất hiện nhiều nhất trong các đáp án, ở đây có 2 giá trị $m=-3$ xuất hiện ở đáp án A và D, $m=3$ xuất hiện ở đáp án B và D.

Với $m=-3$ ta có $x^3-3x^2-3.3.x-3.3+4=0 \Leftrightarrow x=5, x=-1$ là nghiệm, chứng tỏ 1 trong 2 nghiệm là nghiệm kép. Chọn đáp án A hoặc D.

Với $m=3$ ta có $x^3-3x^2+3.3.x+3.3+4=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=2\pm 3i$ là nghiệm, suy ra phương trình không có nghiệm kép. Loại đáp án D.

Đáp án: **A.**

b) Giải hệ phương trình

Hệ bậc nhất 2 ẩn (MODE+5, 1)

Ví dụ 2. Cho cấp số cộng $\{U_n\}$ thỏa mãn: $\begin{cases} U_3+2U_1=7 \\ U_2+U_4=10 \end{cases}$ giá trị của U_{10} là

A. 20 **B.** 29 **C.** 19 **D.** 11

Hướng dẫn giải

Đặt d là công sai của dãy số trên ta có $U_2=U_1+d; U_3=U_1+2d; U_4=U_1+3d$

hệ $\begin{cases} 3U_1+2d=7 \\ 4d+2U_1=10 \end{cases} \Rightarrow d=2, U_1=1 \Rightarrow U_{10}=19$. Đáp án **C.**

Hệ bậc nhất 3 ẩn (MODE+5, 2)

Ví dụ 3: Đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đi qua 3 điểm $A(0;1), B(1;-1), C(-1;3)$ thì phương trình của hàm số là:

A. y = x^3+4x+1 **B.** y = x^3+2x^2-1

C. y = x^3+3x-1 **D.** y = x^3-3x+1

Hướng dẫn giải

Thay lần lượt tọa độ các điểm A, B, C vào hàm số ta được hệ

$\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=-2 \\ a-b+c=4 \end{cases}$ bằng cách bấm máy ta được $a=0,\ b=-3,\ c=1$.

Đáp án: **D.**

6. Tính toán véctơ

Một thực tế cho thấy việc tính toán các phép tính bằng véctơ đặc biệt trong không gian *Oxyz* dễ làm các bạn tính toán sai. Nên với chức năng trong

MODE 8 và **SHIFT 5** sẽ giúp việc tính toán véctơ như tính tích có hướng, tích vô hướng hay độ dài véctơ trở nên dễ dàng và có kết quả chính xác.

MODE 8 màn hình có hiển thị **1:VctA? 2:VctB? 3:VctC?** thì khi chọn véctơ đầu tiên ta nên nhập là **VctA** (bằng cách bấm 1) hiển thị:

1:3 **2:2**

1:3: là véctơ trong không gian Oxyz

2:2: là véctơ trong hình tọa độ phẳng Oxy

Nếu làm phép tính véctơ trong không gian thì ta bấm 1 và nhập các giá trị hoành độ, tung độ, cao độ cho véctơ A.

Sau khi nhập véctơ A thì bấm **SHIFT 5(VECTOR) 2 (DATA)** để vào nhập véctơ B **(VctB).** Nhập thêm véctơ C thì làm tương tự.

Sau khi nhập hết các véctơ cần nhập thì bấm AC.

Các phép toán trên véctơ bằng phím **SHIFT 5** nó hiện ra **DIM, VctA, VctB, VctC, DOT, DATA, VctAns**

Phép cộng véctơ: ta bấm **SHIFT 5 3:VctA** rồi bấm + rồi **SHIFT 5** rồi bấm 4:**VctB.** Màn hình sẽ hiện thị:

VctA+VctB

bấm = là ra kết quả, đó là **VctAns.**

Phép trừ véctơ: tương tự phép cộng véctơ.

Nhân vô hướng véctơ: Muốn nhân vô hướng **VctA** và **VctB** thì nhấn

SHIFT 5 3:VctA SHIFT 57:DOT SHIFT 5 4:VctB. Màn hình sẽ hiển thị:

VctA·VctBVctA·VctB

bấm = là ra kết quả, đó là một số.

Nhân có hướng véctơ: Muốn nhân có hướng **VctA** và **VctB** ta thực hiện thao tác sau:

SHIFT 5 3:VctA (bấm dấu nhân) SHIFT 5 4:VctB . Màn hình hiển thị:

VctA×VctB

bấm = là ra kết quả và tự động được gán cho véctơ **VctAns.**

VctAns thay đổi khi kết quả của phép tính véctơ (có kết quả là véctơ) thay đổi. Tính toán với **VctAns** cũng như với **VctA** và **VctB** hay **VctC**).

Độ dài của véctơ: Ví dụ muốn tính độ dài của VctA thì nhấn

SHIFT HYP SHIFT 5 3:VctA) màn hình hiển thị: **Abs(VctA)** bấm phím = ra kết quả.

Tính góc của 2 véctơ: Ta đã biết công thức tính góc của 2 véctơ là:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

Bấm **SHIFT COS ((SHIFT 5 3:VctA SHIFT 5 7:DOT SHIFT 5 4:VctB): ((SHIFT HYP SHIFT 5 3:VctA) x (SHIFT HYP SHIFT 5 4:VctB))).**

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ biết $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(1;-2;2)$.
Thể tích của tứ diện $ABCD$ là:

A. 140(đvtt) **B.** 70(đvtt) **C.** $\frac{70}{3}$ (đvtt) **D.** $\frac{70}{6}$ (đvtt)

Hướng dẫn giải

Ta đã biết công thức sau: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right|$ (*)

Gán $\overrightarrow{AB}(2;-2;-3)$ cho VctA; Gán $\overrightarrow{AC}(4;0;6)$ cho VctB; Gán $\overrightarrow{AD}(-1;-5;1)$ cho VctA

Kết quả ra là $\frac{70}{3}$. Đáp án: **C.**

Ví dụ 2. Cho các điểm $A(-1;2;0), B(-3;;2)$, $C(1;2;3)$

a. Tìm khoảng cách giữa OA và BC

b. Tính khoảng cách từ B đến đường thẳng OA.

Hướng dẫn giải

a. $d(\mathrm{OA},\mathrm{BC}) = \dfrac{\left|[\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}].\overrightarrow{OB}\right|}{\left|[\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}]\right|} = \dfrac{26}{\sqrt{105}}$.

b. $d(B,OA) = \dfrac{\left|[\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}]\right|}{\left|[\overrightarrow{OA}]\right|} = \dfrac{2\sqrt{70}}{5}$.

Ví dụ 3. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): x-\sqrt{2}y+z-4=0$; $(\beta): x+y\sqrt{2}-z=0$. Góc tạo bởi (α) và (β) là

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

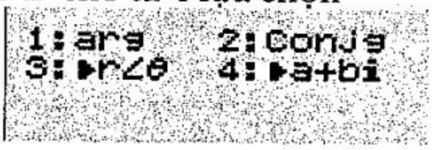
Hướng dẫn giải

Mở **VctA** gán $(1;-\sqrt{2};1)$, mở **VctB** gán $(1;\sqrt{2};-1)$ Biểu thức hiện lên màn hình có dạng $\cos^{-1}\left|(VctA.VctB:(\mathrm{Abs(VctA)}\,\mathrm{Abs(VctB)})\right|$

Kết quả là 60^0. Đáp án: **C.**

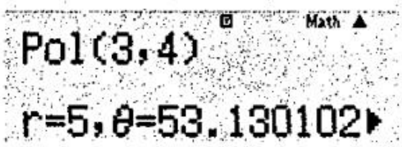
7. Tính toán số phức

Để thực hiên các thao tác tính toán các số phức ta nhấn **MODE 2** để vào môi trường phức. **SHIFT 2** cho ta 4 lựa chọn

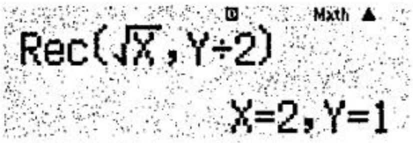


Trong đó:
1: arg*: argument của số phức*
2: conjg*: số phức liên hợp*
3: *Chuyển về dạng lượng giác của số phức*
4: *Chuyển về dạng đại số của số phức*
Tùy vào những yêu cầu bài toán mà ta sử dụng các công cụ tính toán khác nhau. Ngoài làm việc trong môi trường phức (MODE 2) thì ta có thể tính toán trực tiếp qua 2 phím:
Pol: tìm môđun và argument của 1 số phức z
Rec: để tính căn bậc n của 1 số phức z

Ví dụ 1. Tìm môđun và argument của số phức $z=3+4i$
Được kết quả:



Chú ý môđun và argument bên trên sẽ được máy tính tự động lưu vào biến X và Y.
Bởi vậy sử dụng các công thức Moivre về dạng lượng giác lượng giác trong số phức ta dễ dàng tính được căn bậc n của số phức $z=3+4i$, nhờ chức năng của phím *Rec*



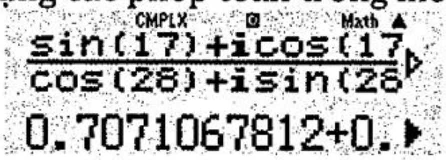
Như vậy căn bậc 2 của $z=3+4i$ là $z=2+i$.

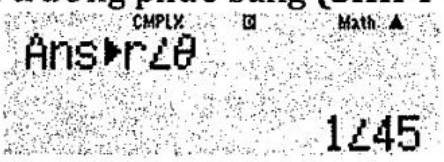
Ví dụ 2. Số phức $z=\dfrac{\sin 17^o+i\cos 17^o}{\cos 28^o+i\sin 28^o}$ có dạng đại số là:

A. 1+i **B.** 1 − i **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Hướng dẫn giải

Nhập biểu thức trên Casio (chú ý các bạn cần phải vào môi trường phức trước bằng cách nhập **MODE 2**).
Sử dụng các phép toán trong môi trường phức bằng **(SHIFT 2)** để giải toán





Đáp án: **D.**

Ví dụ 3. Cho z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2+2(1+i)x+5-10i=0$.

Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. $z_1^2+z_2^2=-10+28i$ **B.** $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=-\frac{66+8i}{25}$

C. $z_1^3+z_2^3=106-46i$ **D.** $z_2z_1^2+z_1z_2^2=-30+10i$

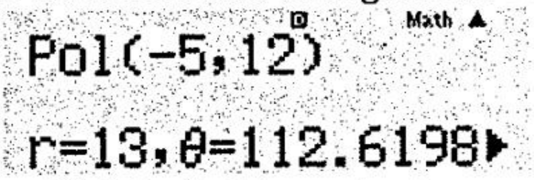
Hướng dẫn giải

Tìm nghiệm z_1, z_2

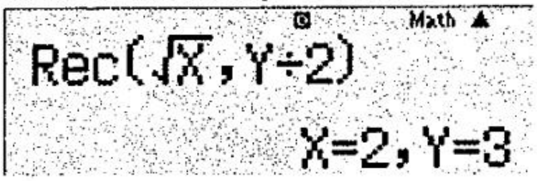
+ Tính $\sqrt{\Delta}$

Có $\Delta=(i+1)^2-5+10i=-5+12i$

Sử dụng chức năng **Pol** để tìm môđun và argument của Δ



Sử dụng chức năng **Rec** để tính căn bậc n của Δ



Do ta đang cần tính căn bậc 2 nên nhập $\sqrt{X}, \frac{Y}{2}$ nếu là căn bậc n thì ta sẽ nhập $\sqrt[n]{X}, \frac{Y}{n}$.

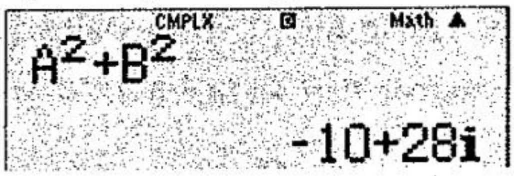
Vậy phương trình có hai nghiệm là

$z_1=-(1+i)+2+3i=1+2i$ và $z_2=-(1+i)-(2+3i)=-3-4i$

Ta gán $z_1 \to A, z_2 \to B$

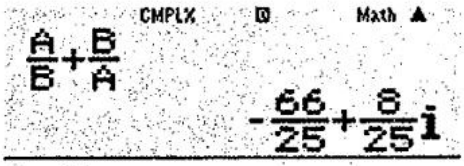
Khi đó ta tính từng đáp án

A. $z_1^2+z_2^2=-10+28i$ được kết quả đúng.



B. $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=-\dfrac{66+8i}{25}$

Được kết quả là



Vậy đáp án này sai. Đáp án **B.**

Bài 2. Phương pháp tư duy loại trừ

Phương pháp này có thể dùng cho mọi dạng bài. Đưa ra các tiêu chí để loạ bớt hai phương án trong lần đầu (có thể lần đầu loại 3 phương án) và loạ bớt 1 phương án cho lần thứ 2. Khi đó ta còn lại phương án cần tìm hoặ tìm được phương án cần tìm sau 2 lần thực hiện tư duy loại trừ.

Ví dụ 1. Phương trình mặt phẳng (P) đối xứng với mặt phẳng (R): $5x-2y+7z+2=0$ qua mặt phẳng Oxz là:

A. $-5x+2y-7z-2=0$ **B.** $5x-2y-7z-2=0$

C. $5x+2y+7z+2=0$ **D.** $-5x-2y-7z+2=0$

Hướng dẫn giải

Cách làm thông thường:

- Tìm giao tuyến d giữa mặt (R) với mặt (Oxz).
- Lấy 1 điểm bất kì M thuộc (R), xác định điểm đối xứng qua mặt $(Oxz$ của M qua (Oxz) là M'.
- Khi đó mặt phẳng qua M' và chứa d là mặt đối xứng cần tìm.

Cách giải nhanh:

- Nhận thấy 1 điểm .. bất kỳ khi lấy đối xứng qua mặt (Oxz) thì được điểm $M'(x;-y;z)$. Ta lấy điểm $M(0;1;0)\Rightarrow$ Điểm đối xứng là $M'(0;-1;0)$.
- Thay $M'(0;-1;0)$ vào các đáp án thì chỉ có đáp án B và C thỏa mãn.
- Tiếp tục ta lấy 1 điểm khác $N(1;0-1)\Rightarrow$ Điểm đối xứng là $N'(1;0;-1)$.
- Thay $N'(1;0;-1)$ vào các đáp án thì chỉ có đáp C thỏa mãn.

Đáp án: **C.**

Vậy để giải quyết nhanh bài toán này ta cần biết:

• *1 điểm $M(x;y;z)$ bất kỳ khi lấy đối xứng qua mặt (Oxz) thì được điểm đối xứng là $M'(x;-y;z)$*

• *1 điểm $M(x;y;z)$ bất kỳ khi lấy đối xứng qua mặt (Oxy) thì được điểm đối xứng là $M'(x;y;-z)$*

• *1 điểm $M(x;y;z)$ bất kỳ khi lấy đối xứng qua mặt (Oyz) thì được điểm đối xứng là $M'(-x;y;z)$*

Cách chọn điểm thuận lợi để tính toán nhanh (thường chọn các điểm mà các thành phần tọa độ chứa nhiều số 0)

Ví dụ 2. Phương trình mặt phẳng (α) qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha_1): x-2y+12z+3=0$, $(\alpha_2): x+3y-7z-2=0$ đồng thời vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x+y+5z-1=0$ là

A. $x+8y-6z-7=0$ **B.** $3x+4y-2z-1=0$

C. $3x-y+17z+4=0$ **D.** $2x+6y-2z-1=0$

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (α) xác định bởi 2 yếu tố qua giao tuyến d và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x+y+5z-1=0$

Việc xét tính vuông góc giữa 2 mặt phẳng khá dễ dàng, ta chỉ cần xét tích vô hướng của 2 VTPT để lựa chọn các đáp án thỏa mãn yếu tố vuông góc.

Loại đáp án A và C vì không vuông góc với (β).

Giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha_1): x-2y+12z+3=0$

$(\alpha_2): x+3y-7z-2=0$ có dạng hệ.

$d: \begin{cases} x-2y+12z+3=0 \\ x+3y-7z-2=0 \end{cases}$ ta lấy 1 điểm thuộc giao tuyến, $M(-1;1;0)$ là điểm thỏa mãn hệ.

Thay tọa độ $M(-1;1;0)$ vào các đáp án B và D ta thấy B thỏa mãn nên chọn

Đáp án: **B.**

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 - \dfrac{b}{2}x + 2 & (x \geq 0) \\ (a+x).e^{-b.x} & (x<0) \end{cases}$.

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x=0$.

A. $a=2, b=\frac{1}{3}$ **B.** $a=-2, b=-\frac{1}{3}$ **C.** $a=1, b=\frac{2}{3}$ **D.** $a=2, b=-\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

Để hàm số có đạo hàm tại $x=0$ thì hàm số phải liên tục tại $x=0$

hay $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \Leftrightarrow a=2$ (loại B, C)

Để tìm ra cụ thể b thì ta tính đạo hàm bên trái cho bằng đạo hàm bên phải

$\Leftrightarrow b=1-ab \Leftrightarrow b=1-2b \Leftrightarrow b=\frac{1}{3}$.

Đáp án: **A.**

Ví dụ 4. Giải bất phương trình: $(2x-1)\sqrt{2x-1}+4x^2+4x\le 3$

A. $\left[\begin{array}{l}\frac{3}{2}\ge x\ge\frac{1}{2}\\ x>3\end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ 0>x>\frac{1}{2}\end{array}\right.$

C. Vô nghiệm

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải

Thay $x=\frac{1}{2}$ vào bất phương trình ta thấy thỏa mãn, suy ra loại đáp án B và C

Tiếp tục chọn x sao cho $\sqrt{2x-1}$ là số chính phương và không thuộc đáp án A

Thay $x=1$ thì bất phương trình không thỏa mãn vậy loại A.

Đáp án: **D.**

Một cách khác:

Từ điều kiện $x\ge\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}(2x-1)\sqrt{2x-1}\ge 0\\ 4x^2+4x-3\ge 0\end{cases}$

$\Rightarrow (2x-1)\sqrt{2x-1}+4x^2+4x\le 3$

$\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{2x-1}+4x^2+4x-3\le 0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(2x-1)\sqrt{2x-1}=0\\ 4x^2+4x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

nên bất phương trình có nghiệm duy nhất $x=0,5$. Đáp án: **D.**

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có $A(0;4)$, $B(-3;0)$, $C(10;4)$, gọi M là chân đường phân giác trong của A. Tọa độ của M là:

A. $\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$ **B.** $\left(-\frac{25}{4};-1\right)$ **C.** $\left(\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$ **D.** $\left(\frac{3}{4};-\frac{3}{4}\right)$

Hướng dẫn giải

Chỉ có A, B thỏa mãn thuộc phương trình đường thẳng BC: $4x-13y+12=0$

Mặt khác, ta có thể vẽ hình ước lượng thấy rằng đáp án B nằm ngoài đoạn thẳng BC.

Đáp án: **A.**

Ví dụ 6. Đường tròn có tâm ở trên đường thẳng $2x-y+1=0$ và đi qua 2 điểm $M(1;2)$ và $N(2;3)$ có phương trình là:

A. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=2$ **B.** $(x-1)^2+(y-3)^2=1$

C. $(x+2)^2+(y-3)^2=16$ **D.** $(x+2)^2+(y+3)^2=25$

Hướng dẫn giải

Thay tọa độ tâm từ các đáp án vào đường thẳng $2x-y+1=0 \Rightarrow$ đáp án B và D thỏa mãn.

Thay tọa độ M vào đáp án B, D. Đáp án: **B.**

Ví dụ 7. Cho $x,y,z\in\mathbb{R}$ sao cho $x-y-z\geq 3$. Giá trị của min $F=x^2+4y^2+z^2$ là

A. 4 **B.** 8 **C.** 2 **D.** 10

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki

$$(x^2+4y^2+z^2)(1+\frac{1}{4}+1)\geq(x-y-z)^2\Rightarrow(x^2+4y^2+z^2)\geq 4.$$

Đáp án: **A.**

Với những bạn không biết cách áp dụng BĐT Bunhiacopxki thì ta có thể sử dụng cách loại trừ bằng việc chọn bộ $(x;y;z)$ thỏa mãn điều kiện:

Chọn bộ $(1;-1;-1)\Rightarrow F=6\Rightarrow$ loại đáp án B, D.

Khi đó việc chọn 1 trong 2 đáp án còn lại cũng làm tăng xác suất chọn đáp án đúng.

Ví dụ 8. Cho ΔABC với $A(2;2)$ và đường cao xuất phát từ B, C có phương

trình $9x-3y-4=0$, $x+y-2=0$. Phương trình đường cao kẻ từ đỉnh
của tam giác là:

A. $5x-7y+4=0$ **B.** $7x-5y-4=0$

C. $5x+7y-24=0$ **D.** $7x+5y+24=0$

Hướng dẫn giải

Cách loại trừ: Do phương trình đường cao kẻ từ đỉnh $A \Rightarrow$ loại D, do tọa độ không thuộc $7x+5y+24=0$. Tìm tọa độ trực tâm H là nghiệm của h
$\begin{cases} 9x-3y-4=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{5}{6};\frac{7}{6}\right)$ chỉ có phương trình $5x-7y+4=0$ đi qua H

Đáp án: **A.**

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+4}{2(x-1)}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) t
$M(0;-2)$ cắt hai đường tiệm cận của (C) tại A và B. Tọa độ của A và B là

A. $A\left(1;-\frac{5}{2}\right), B\left(5;\frac{3}{2}\right)$ **B.** $A\left(-1;\frac{5}{2}\right), B\left(5;\frac{3}{2}\right)$

C. $A\left(-1;-\frac{3}{2}\right), B\left(1;-\frac{5}{2}\right)$ **D.** $A(1;-2)$, $B(-5;2)$.

Hướng dẫn giải

A, B phải thuộc đồ thị 2 đường tiệm cận của đồ thị là $x-2y=2$ và $x=1$ nên loại các đáp án A, B, D Đáp án: **C.**

Bài 3. Phương pháp tư duy đặc biệt hóa – tổng quát hóa

Có hai cách tổng quát hóa là *tổng quát hóa đề bài* và *tổng quát hóa đáp án.* Với những bài toán có đáp án rất tinh vi thì phương pháp này tỏ ra rất hiệu quả, ta cần vận dụng linh hoạt phương pháp này cùng với máy tính Casio và một số phương pháp khác để tăng tính ưu việt.

I. ĐẶC BIỆT HÓA

Trong nhiều bài toán phức tạp, việc lợi dụng đưa bài toán đó về trường hợp đặc biệt giúp việc giải quyết bài toán trở nên đơn giản và dễ dàng hơn.

Ví dụ 1. Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ lên 2 đơn vị theo chiều dương của trục Oy ta được đồ thị hàm số nào dưới đây?

A. $y=-(x-2)^3-3(x-2)$ **B.** $y=x^3-3x+2$

C. $y=-x^3+3x$ **D.** $y=(x+2)^3-3(x+2)$

Hướng dẫn giải

Chọn điểm $O(0;0)$ thuộc đồ thị, tịnh tiến lên trên 2 đơn vị tức là điểm $(0;2)$ phải thuộc đồ thị mới thấy A, B thỏa mãn.

Tiếp tục chọn điểm $(1;-2)$ tịnh tiến được điểm $(1;\ 0)$ thì chỉ có phương án B là hàm số $y=x^3-3x+2$

Đáp án: **B.**

Tổng quát: Cho hàm $y=f(x)$ *khi đó*

+ Nếu tịnh tiến đồ thị theo chiều dương Oy là a đơn vị thì ta được đồ thị hàm số $y=f(x)+a$;

+ Nếu tịnh tiến đồ thị ngược chiều dương Oy là a đơn vị thì ta được đồ thị hàm số $y=f(x)-a$;

+ Nếu tịnh tiến đồ thị theo chiều dương Ox là a đơn vị thì ta được đồ thị hàm số $y=f(x+a)$;

+ Nếu tịnh tiến đồ thị ngược chiều dương Ox là a đơn vị thì ta được đồ thị hàm số $y=f(x-a)$.

Ví dụ 2. Cho họ đường thẳng $(d_m):(1-m^2)x+2my+m^2-4m+1=0$.

Khi tham số m thay đổi, (d_m) luôn tiếp xúc với một đường tròn C cố định. C có phương trình là:

A. $(x-1)^2+y^2=1$ **B.** $x^2+(y-1)^2=1$

C. $x^2+(y-2)^2=1$ **D.** $(x+1)^2+y^2=1$

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Cả 4 đáp án đều có $R=1$ nên $d(I;d)=1$ với I là tâm đường tròn

Đặc biệt hóa: Cho $m=0$, khi đó phương trình d là $x+1=0$

Khi đó ta xét khoảng cách từ tâm I của đường tròn trong 4 đáp án.

Nếu khoảng cách đó không bằng 1 thì ta loại.

Với đường tròn $(x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow I(1;0) \Rightarrow d(I,d)=|1+1|=2\neq 1$

Với đường tròn $x^2+(y-1)^2=1 \Rightarrow I(0;1) \Rightarrow d(I,d)=|0+1|=1$

Với đường tròn $x^2+(y-2)^2=1 \Rightarrow I(0;2) \Rightarrow d(I,d)=|0+1|=1$

Với đường tròn $(x+1)^2+y^2=1 \Rightarrow I(-1;0) \Rightarrow d(I,d)=|-1+1|=0\neq 1$

Như vậy ta loại đáp án A, D.

Tiếp tục cho $m=1$, khi đó phương trình d là: $y-1=0$

Với đường tròn $x^2+(y-1)^2=1 \Rightarrow I(0;1) \Rightarrow d(I,d)=|1-1|=0\neq 1 \Rightarrow$ loại B

Đáp án: **C.**

Lưu ý: Với điểm $M(x_0,y_0)$ thì khoảng cách từ M đến 2 đường thẳng sau

$$(\Delta_1): x+a=0 \Rightarrow d(M,\Delta_1)=|x_0+a|$$

$$(\Delta_2): y+b=0 \Rightarrow d(M,\Delta_2)=|y_0+b|$$

Ví dụ 3. Đạo hàm cấp n của hàm số $y=\dfrac{1}{1-x}$ là:

A. $y^n=\dfrac{n!}{(x-1)^n}$ **B.** $y^n=\dfrac{n!}{(x-1)^{n+1}}$ **C.** $y^n=\dfrac{(n+1)!}{(x-1)^n}$ **D.** $y^n=\dfrac{(n+1)!}{(x-1)^{n+1}}$

Hướng dẫn giải

Nếu làm trực tiếp bài toán này thì nó sẽ rất khó khăn, nhưng dựa vào các đáp án ta chỉ cần xét đạo hàm cấp 1: $y'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ (*)

Thay $n=1$ vào 4 đáp án để xem đáp án nào trùng với (*) ta được ngay

Đáp án: **B.**

Chú ý: Nếu thay $n=1$ mà có nhiều đáp án thỏa mãn thì ta tiếp tục xét đạo hàm cấp 2 rồi thay $n=2$ khi đó sẽ loại bớt được các đáp án.

Ví dụ 4. Giá trị của a, b, c để $f(x)=ax^2+bx+c$ có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f(x)+(x-1)f'(x)=3x^2$ là:

A. $a=b=c=1$

B. $a=b=1;\ c=-1$

C. $a=-1;\ b=c=1$

D. $a=b=c=-1$

Hướng dẫn giải

Thay $x=1$ ta có: $f(1)=3=a+b+c$

Đáp án: **A** (vì có $a+b+c=3$).

Nếu làm khó hơn bài toán bằng cách thay đáp án D thành D. $a=b=2, c=-1$ thì sau khi thay $x=1$ sẽ còn 2 đáp án A, D.

Khi đó ta sẽ thay ngược lại đề bài để tìm được đáp án đúng

Với $a=b=c=1$ ta có $f(x)=x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)=2x+1$

Đáp án: **A.**

Ví dụ 5. Cho tích phân $I_n=\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin x dx, n\in\mathbb{N}$. Giá trị của I_n theo n là:

A. $I_n=2(-1)^{n+1}$

B. $I_n=2(-1)^{n-1}$

C. $I_n=2(-1)^n$

D. $I_n=2(-1)^{2n}$

Hướng dẫn giải

Tính được $I_n=-\cos x\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}=-\cos\left[(n+1)\pi\right]+\cos(n\pi)$

Thay $n=0$ thì $I_0=-\cos\pi+\cos(0\pi)=1+1=2$. Loại A, B

Thay $n=1$ thì $I_0=-\cos(2\pi)+\cos(\pi)=-1-1=-2$. Loại D

Đáp án: **C.**

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, AC đôi một vuông góc. Gọi M nằm trong mặt phẳng(SBC). Gọi d_1, d_2, d_3 là khoảng cách từ M đến các mặt phẳng $(ABC),(SAB),(SAC)$. Khi đó

A. $\frac{d_1}{SA}+\frac{d_2}{AC}+\frac{d_3}{AB}=\frac{1}{2}$

B. $\frac{d_1}{SA}+\frac{d_2}{AC}+\frac{d_3}{AB}=1$

C. $\frac{d_1}{AC}+\frac{d_2}{AB}+\frac{d_3}{SA}=1$

D. $\frac{d_1}{AC}+\frac{d_2}{AB}+\frac{d_3}{SA}=\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Đặc biệt hóa, ta cho điểm M trùng với S (vì M có thể là bất cứ điểm nào trong mặt phẳng (SBC)) khi đó $d_2 = d_3 = 0$, d_1=AS thay vào các đáp án ta thấy đáp án B thỏa mãn $\frac{SA}{SA}+\frac{0}{AC}+\frac{0}{AB}=1$.

Đáp án: **B.**

II. TỔNG QUÁT HÓA

Đặc điểm bài toán có thể dùng được phương pháp tổng quát hóa:

- Khi đề bài dạng các đáp án có cấu trúc tương tự nhau. Qua cấu trúc đó ta tổng quát hóa đáp án.
- Đôi khi ta còn tổng quát hóa đề bài để suy ra dạng của nó.

Ví dụ 1: Tích phân $I=\int_0^4 e^{\sqrt{4-x}}dx$ có giá trị bằng:

A. $2(e^2+e)$ **B.** $2e^2+1$ **C.** $2e(e+2)$ **D.** $2(e^2+1)$.

Hướng dẫn giải

Thông thường ta sẽ dùng máy tính Casio tính tính phân *I*, rồi so kết quả với các đáp án bên dưới. Với cách làm này ta nên dùng 2 máy tính, một máy để tính tích phân, máy còn lại dùng tính các đáp án đưa về dạng số thập phân để so sánh kết quả gần nhất.

Ta có $I=\int_0^4 e^{\sqrt{4-x}}dx \approx 16,778$

Cách 1: Có $2(e^2+e)\approx 10,107$; $2e^2+1\approx 15,778$; $2e(e+2)\approx 25,65$; $2(e^2+1)\approx 16,778$

Đáp án: **D.**

Cách 2: Thấy dạng tổng quát của đáp án là $2(e^2+X)$

Nhập biểu thức $2(e^2+X)$ vào máy tính và nhấn phím CALC, khi máy hỏi X=? thì lần lượt thay X bằng 2e, 1, 4e, 2... và xem tại giá trị nào của X cho ra giá trị biểu thức ở mỗi đáp số bằng *I*. Với cách này sẽ giúp ta thao tác nhanh hơn, khi dò đáp án. Nó sẽ rất hữu ích đặc biệt là trong các bài toán có đáp án cồng kềnh và cấu trúc tương tự nhau.

Cách 3. Viết lại các đáp án

A. $2e^2+2e$ **B.** $2e^2+1$ **C.** $2e^2+4e$ **D.** $2e^2+2$

Nhận thấy các đáp án đều chứa $2e^2$ khi đó ta tính

$J=\int_0^4 e^{\sqrt{4-x}}dx-2e^2$

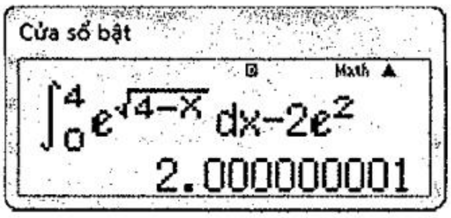
Nếu kết quả là 1 thì chọn B

Nếu kết quả là 2 thì chọn D

Nếu kết quả không là số đẹp trên thì sẽ là A hoặc C. Khi đó ta tính tiếp $\frac{J}{e}$

Nếu ra kết quả 2 thì chọn A, nếu ra kết quả là 4 thì chọn C.

Ta được kết quả



Đáp án: **D.**

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $A(-5;6)$, $B(-4;-1)$, $C(4;3)$. Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác có tọa độ là:

A. $I(1;3)$ **B.** $I(-1;3)$ **C.** $I(3;-1)$ **D.** $I(-1;-3)$

Hướng dẫn giải

Tâm đường tròn ngoại tiếp thỏa mãn $IA=IB=IC$. Gọi $I(x;\ y)$ ta có

$$IA^2=IB^2 \Leftrightarrow (x+5)^2+(y-6)^3=(x+4)^2+(y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+5)^2+(y-6)^3-(x+4)^2-(y+1)^2=0$$

Nếu I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác thì các tọa độ của nó phải thỏa mãn phương trình trên, bởi vậy ta chỉ cần thử tọa độ của I trong các đáp án bằng cách dùng Casio nhập hàm:

$(X+5)^2+(Y-6)^2-(X+4)^2-(Y+1)^2 \xrightarrow{CALC}$

Thay các bộ (X, Y) bằng tọa độ I ở mỗi đáp án, thấy với $I(-1;3)$ thì

$(-1+5)^2+(3-6)^2-(-1+4)^2-(3+1)^2=0$

Đáp án: **B.**

Chú ý: Nếu có trên 2 đáp án thỏa mãn ta cần phải thiết lập thêm mối quan quan hệ.

$IA^2=IC^2$ hoặc $IB^2=IC^2$ để chọn được đáp án cuối cùng.

Ví dụ 3. Phương trình tiếp tuyến của $(C):(x-3)^2+(y+4)^2=169$ tại $A(8;-16)$ thuộc (C) là:

A. $5x+12y-232=0$

B. $5x-12y+232=0$

C. $5x+12y+232=0$

D. $5x-12y-232=0$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Thay tọa độ $A(8;-16)$ vào 4 đáp án loại những đáp án không thỏa mãn là các đáp án A, B, C. Vậy, chọn đáp án **D.**

Nếu có nhiều đáp án thỏa mãn ta xét thêm yếu tố IA vuông góc với tiếp tuyến ở cách 2.

Cách 2: Cho véctơ IA vuông góc với tiếp tuyến (với $I(3;-4)$ là tâm đường tròn (C

Cách 3: Sử dụng tính chất $d(I,d)=R=13$.

Bài 4. Tư duy truy hồi

Trong các bài toán như tìm tập xác định, tập giá trị, tìm min – max với các đáp án được cho dưới dạng khoảng, đoạn. Ta sẽ mất khá nhiều thời gian với những cách giải thông thường, bởi vậy bằng việc lợi dụng các đầu mút của mỗi khoảng, đoạn ta có thể tìm được đáp án một cách nhanh chóng và dễ dàng hơn.

Ví dụ 1. Hàm số $y=\sqrt{x-x^2}$ có tập giá trị là:

A. $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ **B.** $[0;1]$ **C.** $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ **D.** $[0;2]$

Hướng dẫn giải

Cách làm thông thường: Việc tìm tập giá trị với các hàm liên tục, thông thường ta đi tìm min – max của hàm.

Tập xác định: $D=[0;1]$

dễ có $y=\sqrt{x-x^2}\geq 0,\forall x\in D$

$$y=\sqrt{x-x^2}=\sqrt{-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\frac{1}{4}}\leq\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

Đáp án: **C.**

Dùng tư duy truy hồi:

Từ các đáp án ta chọn các đầu mút của các đoạn và sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần $0\rightarrow\frac{1}{4}\rightarrow\frac{1}{2}\rightarrow 1\rightarrow 2$

Ta sẽ xét xem đầu mút nào sẽ thuộc tập giá trị (Một đầu mút a thuộc tập giá trị khi và chỉ khi phương trình $\sqrt{x-x^2}=a\Leftrightarrow x-x^2=a^2$ có nghiệm thuộc tập xác định).

Ta sẽ thử lần lượt từ giá trị từ lớn đến nhỏ

Với $a=2$, dùng máy tính Casio bấm MODE 5 3 (giải phương trình bậc 2)

$x^2-x+4=0\longrightarrow$ vô nghiệm

Với $a=1$, dùng máy tính Casio bấm MODE 5 3 (giải phương trình bậc 2)

$x^2-x+1=0\longrightarrow$ vô nghiệm

Với $a=\frac{1}{2}$, dùng máy tính Casio bấm **MODE 5 3** (giải phương trình bậc 2)

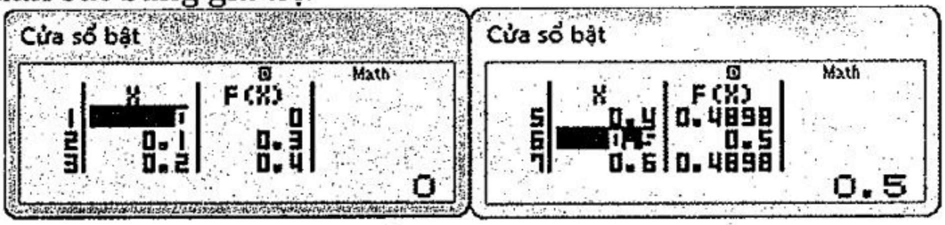
$x^2-x+\frac{1}{4}\longrightarrow x=\frac{1}{2}$

Đáp án: **C.**

Cách khác: dùng chức năng bảng **TABLE** ta nhập hàm $\sqrt{X-X^2}$ với **START**: 0

END:1, **STEP**: 0.1

Khi đó quan sát bảng giá trị:



Dễ dàng dự đoán $\min=0,\max=\frac{1}{2}$.

Đáp án **C.**

Ví dụ 2. Hàm số $y=\sqrt{x-1}+2\sqrt{3-x}$ có tập giá trị là:

A. $\left[\sqrt{2};\sqrt{5}\right]$ **B.** $\left[\sqrt{2};2\sqrt{5}\right]$ **C.** $\left[2\sqrt{2};3\right]$ **D.** $\left[\sqrt{2};\sqrt{10}\right]$

Hướng dẫn giải

Với cách thông thường ta đi tìm min – max trên khoảng tập xác định $[1;3]$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{3-x}}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}=0$$

Dùng Casio nhập hàm $2\sqrt{X-1}-\sqrt{3-X}\xrightarrow{SHIFT+CALC,X=1}X=\frac{7}{5}$

ta tìm được nghiệm $x=\frac{7}{5}$

Tính $y(1)=2\sqrt{2},y(3)=\sqrt{2},y\left(\frac{7}{5}\right)=\sqrt{10}\Rightarrow \min\limits_{[1,3]}y=\sqrt{2},\max\limits_{[1,3]}y=\sqrt{10}$

Đáp án: **D.**

Dùng tư duy truy hồi:

Từ các đáp án ta chọn các đầu mút của các đoạn và sắp xếp chúng theo thứ tự tăng dần

$$\sqrt{2}\to\sqrt{5}\to2\sqrt{2}\to3\to\sqrt{10}\to2\sqrt{5}$$

Ta sẽ xét xem đầu mút nào sẽ thuộc tập giá trị (1 đầu mút a thuộc tập giá trị khi và chỉ khi phương trình $a=\sqrt{x-1}+2\sqrt{3-x}$ có nghiệm thuộc tập xác định).

Ta sẽ thử lần lượt từ giá trị từ lớn đến nhỏ

Dùng Casio nhập hàm $\sqrt{x-1}+2\sqrt{3-x}-a$

Với $a=2\sqrt{5}$ ta có phương trình $\sqrt{x-1}+2\sqrt{3-x}-2\sqrt{5}=0$ vô nghiệm

Với $a=\sqrt{10}$ ta có phương trình $\sqrt{x-1}+2\sqrt{3-x}-\sqrt{10}=0$ có nghiệm

$x=\frac{7}{5}\in[1;3]$

Đáp án: **D.**

Ví dụ 3. Hàm số $y=e^{-x^2+x}$ có tập giá trị là:

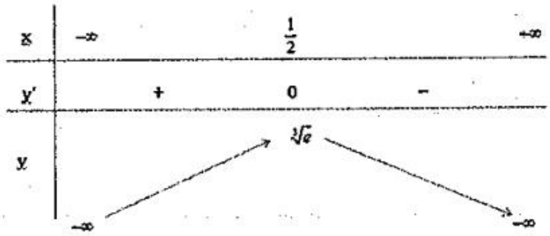
A. $\left[0;\sqrt[4]{e}\right)$ **B.** $\left(0;\sqrt[4]{e}\right]$ **C.** $\left(0;\sqrt{e}\right]$ **D.** $\left(0;\sqrt{e}\right)$

Hướng dẫn giải

Cách làm thông thường

Có $y'=(-2x+1)e^{-x^2+x}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Ta có bảng biến thiên:



Đáp án: **B.**

Dùng tư duy truy hồi: Ta sắp xếp theo thứ tự tăng dần các đầu mút

Do biên trái của các đáp án là 0 nên ta sắp xếp biên phải theo chiều giảm

$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}\rightarrow\sqrt[4]{e}=e^{\frac{1}{4}}$

Với $e^{\frac{1}{2}}$ ta được $e^{\frac{1}{2}}=e^{-x^2+x}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=-x^2+x$ phương trình này vô nghiệm. Ta loại đáp án C, D.

Với $x=0$ ta được $0=e^{-x^2+x}$ (vô nghiệm) nên loại A.

Đáp án: **B.**

Chú ý: Nếu khi ta thay vào mà tất cả phương trình đều vô nghiệm lúc nà chưa thể kết luận được gì và phải chuyển về giới hạn để tìm cận trên và cậ dưới của hàm số.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1)$.

Giá trị của m để hàm số đồng biến trên $[2, +\infty)$ là:

A. $m \le 5$ **B.** $-2 \le m \le \frac{3}{2}$ **C.** $m \ge 2$ **D.** $m \ge -\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2)$

Để hàm số đồng biến trên $[2; +\infty)$ thì $y' > 0, \forall x \in [2; +\infty)$

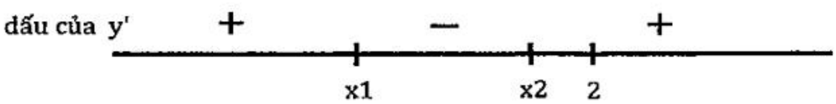
Với cách thông thường sẽ phải xét

$3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2) > 0, \forall x \in [2; +\infty)$ mất nhiều thời gian.

Dùng tư duy truy hồi:

Sắp xếp các đầu mút đáp án: $-2 \to -\frac{3}{2} \to \frac{3}{2} \to 2 \to 5$

Với giá trị nào của m làm cho phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm ≤ 2 thì giá trị m đó sẽ thỏa mãn (do y' có hệ số của x^2 là $3 > 0$ nên nếu $y' = 0$ có nghiệm x_1, x_2 $(x_1 \le x_2)$ thì $y' \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge x_2 \\ x \le x_1 \end{array}\right.$ vậy để $y' > 0, \forall x \in [2; +\infty)$ thì $x_2 \le 2$)



Với $m = -2$ có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\frac{8}{3} \end{array}\right. \longrightarrow$ thỏa mãn, loại đáp án C, D.

Với $m = 5$ có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x - 37 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 - \frac{7}{\sqrt{3}} \\ x = 2 + \frac{7}{\sqrt{3}} > 2 \end{array}\right. \Rightarrow$ không thỏa mãn

Đáp án: **B.**

Các bạn có thể thử với $m=-\dfrac{3}{2}$ để thêm phần chắc chắn

Với có $m=-\dfrac{3}{2}$, $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2+x+11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1<2 \\ x=\dfrac{2}{3}<2 \end{array}\right. \longrightarrow$ thỏa mãn.

Ví dụ 5. Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x^2-6x}$ là:

A. 0 và 9 **B.** 1 và 3 **C.** 0 và 3 **D.** 2 và 6

Hướng dẫn giải

Tập xác định: $D=(-\infty;0]\cup[6;+\infty)$

Ta có nếu a là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số thì điều kiện cần là $\sqrt{x^2-6x}=a$ có nghiệm thuộc tập xác định.

Xét phương trình $\sqrt{x^2-6x}=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=6$ vậy 0 là giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Xét phương trình $\sqrt{x^2-6x}=9 \Leftrightarrow x=3\pm3\sqrt{10}\notin D$, vậy 9 không là giá trị lớn nhất của hàm số.

Đáp án: **C.**

Ví dụ 6. GTNN và GTLN của hàm số $f(x)=2x^3-12x^2+18x-10$ trên đoạn $[0;4]$ là:

A. -10 và -2 **B.** 1 và 3 **C.** -10 và 8 **D.** 1 và 8

Hướng dẫn giải

Phương trình $f(x)=-10 \Leftrightarrow 2x^3-12x^2+18x-10=-10$

$$\Leftrightarrow x=0, x=3\in[0;4] \Rightarrow -10 \text{ là GTNN}$$

Phương trình $f(x)=8 \Leftrightarrow 2x^3-12x^2+18x-10=8$

$$\Leftrightarrow x\approx 4,4\notin[0;4] \Rightarrow 8 \text{ không là GTLN}$$

Đáp án: **A.**

Ví dụ 7. Giá trị của x để tại đó hàm số $y=x^3-3x^2-9x+28$ đạt GTNN trên $[0;4]$ là:

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Hướng dẫn giải

Dùng máy tính Casio nhập hàm $X^3-3X^2-9X+28\xrightarrow{CALC}$

Ta gán X bởi các giá trị mà đáp án đã cho, chọn đáp án tương ứng với X có GTNN

$X=1\longrightarrow 17$ $\qquad$ $X=3\longrightarrow 1$

$X=2\longrightarrow 6$ $\qquad$ $X=4\longrightarrow 8$

Chọn đáp án B ứng với $X=3$.

Đáp án: **B.**

Ví dụ 8. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_x(x^3+1)\log_{x+1}x-2}$ là:

A. $D=[2;+\infty)$ **B.** $D=[1;+\infty)$ **C.** $D=[0;1]$ **D.** $D=\mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

Dùng tư duy truy hồi:

Sắp xếp các đầu mút đáp án: $0\to 1\to 2$

Ta có điều kiện xác định của hàm logarit $\log_x y$, là $x>0, y>0, x\neq 1$.

Dễ thấy với $x=0, x=1$ thì $\log_x(x^3+1)$ không xác định. Loại đáp án B, C, D

Đáp án: **A.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}(x+1)}}{\log_2\left(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)}$ có tập xác định là:

A. $D=[-1;3]$ **B.** $D=(3;5]$ **C.** $D=[-1;5]\setminus\{3\}$ **D.** $D=[-1;5)$

2. Nếu $0\le x\le 1$ thì giá trị cực đại của hàm $y=\left[\lg\left(\dfrac{99999x+1}{1000}\right)\right]^2$ là:

A. 4 **B.** 9 **C.** 25 **D.** 100

3. Bất phương trình $\log_x\log_9\left(3^x-9\right)\le 1$ có nghiệm là:

A. $x<\log_3 10$ **B.** $x\ge\log_3 10$ **C.** $x>\log_3 10$ **D.** $x\le\log_3 10$

4. Bất phương trình $3^{x^2-4}+\left(x^2-4\right)3^{x-2}\ge 1$ có nghiệm là:

A. $D=[2,+\infty)$ **B.** $D=(-\infty;-2]$

C. $D=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ **D.** $D=[-2;2]$

5. Hàm số $y=\sqrt{\dfrac{1-5^x}{7^{-x}-7}}$ có TXĐ là:

A. $(-\infty;-1)\cup[0;+\infty)$

B. $(-\infty;-1]\cup(0;+\infty)$

C. (-1;0]

D. $[-1;+\infty)\setminus\{0\}$

6. Hàm số $y=5\cos 2x-12\sin 2x$ có tập giá trị là:

A. $[-12;5]$ B. $[-5;12]$ C. $[-13;12]$ D. $[-13;13]$

7. Hàm số $y=\cos 2x$ nghịch biến trên đoạn:

A. $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ B. $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ C. $[0;\pi]$ D. $[-\pi;\pi]$

8. TXĐ của hàm số $y=\dfrac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. Các khoảng $\left[k\dfrac{\pi}{2};k\pi\right],k\in\mathbb{Z},k>0$

C. Các khoảng $(k2\pi,\pi+k2\pi),k\in\mathbb{Z}$

D. Các khoảng $(2k,2k+1)$, $k\in\mathbb{Z}$

9. Bất phương trình $\sqrt{x^2-2x}\geq 1-x$ có nghiệm là:

A. $x\geq 0$ B. $x\geq 2$ C. $x>2$ D. $0\leq x\leq 2$.

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. C	4. C	5. A	6. D	7. A	8. C	9. B

Chú ý: Bài 3. C, hướng dẫn: Thử với x bằng 3 giá trị

$$x=\log_3 10, x>\log_3 10, x<\log_3 10.$$

Bài 5. Phương pháp tư duy ước lượng

I. LÝ THUYẾT

Phương pháp tư duy ước lượng có tác dụng lớn đối với loại bài toán tính giá trị, so sánh giá trị trong các phần như tích phân, lượng giác, giá trị min-max, hình học Oxyz, hình học Oxy và hình không gian. Đôi khi có sự biến đổi kết hợp với ước lượng. Nếu dùng được phương pháp này thì sẽ làm bài rất nhanh vì chỉ thực hiện các phép biến đổi nhẹ nhàng hoặc thậm chí không cần đặt bút.

Ví dụ 1. Cho $(C): y=\dfrac{mx-2}{x+m}(m\neq 0)$. Đường thẳng nào sau đây **không** là trục đối xứng của đồ thị hàm số trên:

A. $y=\dfrac{1}{3}-x$ **B.** $y=x+2$ **C.** $y=2x+1$ **D.** $y=x+\dfrac{2}{3}$

Hướng dẫn giải

Ước lượng: Trục đối xứng của hàm phân thức là đường phân giác của 2 đường tiệm cận. Mà (C) có 2 đường tiệm cận là $y=m$ và $x=-m$ nên đường phân giác phải có VTPT là $(1;1)$ hoặc $(1;-1)$. Vậy đường $y=2x+1$ không là trục đối xứng của đồ thị.

Đáp án: **C.**

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3+x^2-2x+1}{x+1}$. Số điểm trên đồ thị hàm số mà tọa độ của chúng đều thuộc $\mathbb{Z}^*$ là:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 0

Hướng dẫn giải

Cách thông thường: Với những hàm số phân thức có bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì để tìm tọa độ nguyên ta cần thực hiện phép chia đa thức

$$y=\frac{x^3+x^2-2x+1}{x+1}=x^2-2+\frac{3}{x+1}$$

khi đó để $y\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(x+1)$ thuộc $Ư(3)=\{-3;-1;1;3\}$.

Với $x+1=1\Rightarrow x=0\notin\mathbb{Z}^*\longrightarrow$ loại

Với $x+1=3\Rightarrow x=2\Rightarrow y=3\longrightarrow$ nhận

Với $x+1=-1\Rightarrow x=-2\Rightarrow y=-1\longrightarrow$ nhận

Với $x+1=-3\Rightarrow x=-4\Rightarrow y=13\longrightarrow$ nhận

Vậy có 3 điểm thỏa mãn. Đáp án: **B.**

Dùng ước lượng: Với cách này ta không cần phải chia đa thức cụ thể, chỉ cần biết khi chia đa thức thì y sẽ có dạng $y = ... + \frac{a}{x+1}$ khi đó để y nguyên thì thì $(x+1) \in Ư(a)$, do 1 luôn là ước $Ư(a)$ khi đó có $x+1=1 \Rightarrow x=0$, mặt khác dùng Casio bấm $x^3+x^2-2x+1=0$ thì luôn có nghiệm lẻ. Vậy với $\forall x \in \mathbb{Z}$ thì $y \neq 0 \Rightarrow$ số điểm thỏa mãn yêu cầu luôn là số lẻ.

Đáp án: **B.**

Ví dụ 3. Cho đường cong $y = \frac{x^2-3}{x+2}(C)$. Tập hợp các giá trị của m để đường thẳng $d: y = -2m$ cắt đường cong tại 2 điểm phân biệt:

A. $m \in (-\infty;2) \cup (3;+\infty)$ **B.** $m \in (1;2)$

C. $m \in (-\infty;3)$ **D.** $m \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$

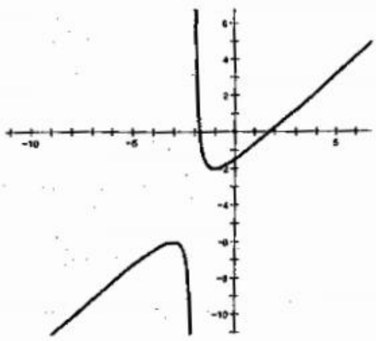
Hướng dẫn giải

Cách thông thường: Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x^2-3}{x+2} = -2m \Leftrightarrow x^2-3 = -2mx-4m \Leftrightarrow x^2+2mx+4m-3=0\,(*)$$

Để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2-4m+3>0 \\ (-2)^2+2m(-2)+4m-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x<1, x>3$$



Đáp án: **D.**

Dùng ước lượng: Dựa vào dạng đồ thị thì khi m tiến đến vô cùng thì đường thẳng d luôn cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt (đồ thị chỉ cần hình dung không cần phải xác định chi tiết), loại đáp án B, C.

Còn A, D thì thử m bằng 1 giá trị thuộc A nhưng không thuộc D dùng Casio tìm nghiệm

$x^2-3+2m(x+2)=0$, ấn máy với giá trị $m=1,5$ thấy vô nghiệm, loại đáp án A

Đáp án: **D.**

Ví dụ 4. Cho $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx,\ n \in \mathbb{N}^*$. Hệ thức đúng là:

A. $I_{n+1} = nI_n$ **C.** $I_{n+1} = (n+1)I_n$

B. $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$ **D.** $I_{n+1} = (n-1)I_n$

Hướng dẫn giải

Ta thấy nếu đáp án A, C, D đúng thì $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ sẽ là số nguyên (vì n là số tự nhiên)

Vậy ta thử thay tại $n = 1$, bấm máy 3 lần tính $I_1, I_2, \frac{I_2}{I_1}$ và thấy $\frac{I_2}{I_1}$ không nguyên nên loại A, C, D.

Vậy đáp án đúng là **B** (cẩn thận hơn nữa: Thử lại thấy $I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1$ là đúng)

Ví dụ 5. Số cặp điểm A, B trên đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$ mà tiếp tuyến tại hai điểm đó vuông góc với nhau:

A. Vô số cặp **B.** 1 cặp **C.** Không tồn tại **D.** 2 cặp

Hướng dẫn giải

Dựa vào dạng đồ thị ta có kết luận cần chú ý sau

+ Với hàm bậc 3 khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt thì tồn tại vô số cặp điểm (A, B) mà tiếp tuyến tại 2 điểm đó vuông góc với nhau.

+ Với hàm bậc 3 khi $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm thì không tồn tại vô cặp điểm. (A, B) mà tiếp tuyến tại 2 điểm đó vuông góc với nhau.

Với lý thuyết trên ta có $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x+1)^2 = 0$

$\Rightarrow y' = 0$ có nghiệm kép. Đáp án: **C.**

Ví dụ 6. Cho $2x + 3y = 10$. Giá trị lớn nhất của $P = x^2y^3$ là:

A. 32 **B.** 55 **C.** 28 **D.** 29

Hướng dẫn giải

Ước lượng: Cho $x = y = 2$ thì $P = 32$ và cho $2x = 3y = 5$ thì $P = \frac{25}{4}.\frac{125}{27} \approx 29$ thấy max $P \geq 32$. Loại đáp án C, D.

ta có $x=\dfrac{10-3y}{2}\Rightarrow P=\dfrac{10-3y}{2}.y^3$

Dùng Casio nhập hàm $f(X)=\left(\dfrac{10-3X}{2}\right)X^3-55$, sử dụng chức năng **CALC** để tìm nghiệm.

Chú ý: $0<y<\dfrac{10}{3}$ thấy không có nghiệm trong khoảng đó $\Rightarrow \max P=32$.

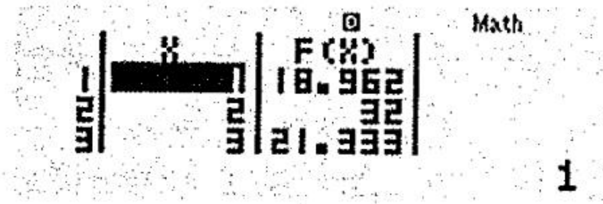
Đáp án: **A.**

Cách khác: Ta có $y=\dfrac{10-2x}{3}\Rightarrow P=x^2\left(\dfrac{10-2x}{3}\right)^3$

Nhận thấy các phương án đều là số tự nhiên nên max P thường đạt được tại x cũng là số tự nhiên. Lợi dụng điều đó ta lập bảng **TABLE**

Với $f(X)=X^2\left(\dfrac{10-2X}{3}\right)^3$, **START**: 1, **END**: 20, **STEP**: 1

Khi đó quan sát các giá trị trong bảng



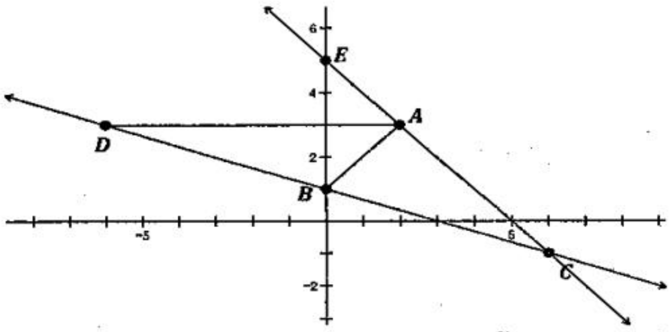
Đáp án: **A.**

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC có $A(2;3)$, $B(0;1)$, $C(6;-1)$. Tọa độ điểm nào sau đây là chân đường phân giác ngoài hạ từ đỉnh A xuống BC?

A. $\left(2;\dfrac{2}{3}\right)$ **B.** $(-6;3)$ **C.** $(-5;-2)$ **D.** $\left(\dfrac{1}{3};-1\right)$

Hướng dẫn giải

Gọi D là chân đường phân giác ngoài hạ từ A xuống BC. Khi vẽ tọa độ A, B, C trên trục tọa độ ta thấy D chỉ có thể nằm ở góc phần tư thứ 2, với tung độ dương và hoành độ âm.



Cách khác: Gọi E là giao điểm AC với Oy, khi đó dễ dàng kiểm tra tam giác ABE cân tại A, khi đó phân giác ngoài góc A sẽ song song với Ox $\Rightarrow y_D = y_A = 3$

Đáp án: **B.**

Ví dụ 8. Cho tích phân $I = \int_0^m \frac{x^6+1}{x^2+1}dx$. Với mọi m thỏa mãn $0 < m < 1$ thì giá trị I:

A. $I > 0$ **B.** $I < m$ **C.** $I > m$ **D.** $I < 1$

Hướng dẫn giải

Định lý $I = \int_a^b f(x)dx$ mà $\left[\begin{array}{l} f(x) \geq M \\ f(x) \leq m \end{array}\right.$ trên đoạn $[a;b]$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} I \geq M(b-a) \\ I \leq m(b-a) \end{array}\right. \qquad (b > a)$$

Ta có $\frac{x^6+1}{x^2+1} < 1, \forall x \in (0;1) \Rightarrow \int_0^m \frac{x^6+1}{x^2+1}dx < 1.(m-0) = m$. Đáp án: **B.**

Ví dụ 9. Tìm số nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{2}{3}$ với điều kiện $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}\right]$?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Hướng dẫn giải

Ta có số nghiệm phương trình $\sin x = \frac{2}{3}$ chính là số giao điểm của 2 đồ thị

$$y = \frac{2}{3} \text{ và } y = \sin x$$

Do đồ thị sinx có dạng sóng và cứ sau chu kì $T = 2\pi$ lại lặp lại hình dạng

Mặt khác $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}\right]$ vừa đủ 2 chu kì, nên đường thẳng $y = \frac{2}{3}$ sẽ cắt sinx tại 4 điểm

Đáp án: **C.**

Cách khác: Sử dụng bảng **TABLE** nhập hàm $f(X) = \sin X - \frac{2}{3}$

Với $\text{START}: -\frac{\pi}{3}, \text{END}: \frac{11\pi}{3}, \text{STEP}: \frac{\pi}{3}$

Ta quan sát số lần mà giá trị $f(X)$ đổi dấu đó chính là số nghiệm của phương trình.

Ví dụ 10. Cho mặt cầu (S) tâm $I(0;-1;0)$ giao với mặt phẳng $(P): x + 2y + z = 4$ theo đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{3}$. Điểm nào sau đây thuộc (S)?

A. $(0;-1;3)$ **B.** $(1;1;0)$ **C.** $(2;0;1)$ **D.** $(-1;0;-2)$

Hướng dẫn giải

Để điểm M thuộc (S) thì $IM > d(I,(P)) = \sqrt{6}$. Thử các đáp án ta thấy chỉ có điểm $M(0;-1;3)$ là thỏa mãn. Đáp án: **A.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Phương trình $\log_2 x + 2\log_7 x - 2 - \log_2 x.\log_7 x = 0$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 7 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 6 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 7 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 4 \end{array}\right.$

2. Phương trình $3.3^{4x} + 2.3^{2x+\sqrt{12x-2}} - 9^{\sqrt{12x-2}} = 0$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{5}{2} \\ x = 1 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{7}{2} \\ x = 2 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$

3. Nghiệm phương trình $x^2 + x + 12\sqrt{x+1} - 36 = 0$ là giá trị thuộc khoảng:

A. $(-3;0)$ **B.** $(-1;2)$ **C.** $(2;4)$ **D.** $(3;5)$

4. Bất phương trình $\frac{2x-1}{\sqrt{4x+1}}+\sqrt{x-1}-\sqrt{3x-2}<0$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l}x>3\\x<2\end{array}\right.$ **B.** $2<x<3$ **C.** $-\frac{1}{4}<x\le 2$ **D.** $1\le x<2$

5. Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(4^x+4)\ge\log_{\frac{1}{2}}(2^{2x+1}-3.2^x)$ có nghiệm là:

A. $x\in[2;+\infty)$ **B.** $x\in[2;5]$ **C.** $x\in(1;5]$ **D.** $x\in(-\infty;3)$

6. Bất phương trình $\frac{4^x+2x-4}{x-1}\le 2$ có nghiệm là:

A. $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$ **B.** $\left[\frac{3}{4};1\right)$ **C.** $\left[\frac{1}{2};1\right)$ **D.** $\left[\begin{array}{l}x>1\\x\le\frac{1}{2}\end{array}\right.$

7. Hệ phương trình $\begin{cases}2x=y^2+y-1\\2y=x^2+x-1\end{cases}$ có nghiệm là:

A. $\begin{cases}x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\y=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$

8. Để hệ $\begin{cases}2x-3y=1\\-\frac{8x}{3}+4y=m\end{cases}$ có vô số nghiệm thì m có giá trị là:

A. -1 **B.** $-\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 1

9. Gọi $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x^2-y^2=3\\\log_2(x+2y)-\log_2(x-y)=2\end{cases}$. Khi đó x_0+y_0 bằng:

A. 1 **B.** 5 **C.** 10 **D.** 25

ĐÁP ÁN

1. C	**2. B**	**3. C**	**4. D**	**5. A**	**6. C**	**7. C**	**8.B**	**9. B**

Bài 6. Tổng hợp công thức 5 giây

I. TỶ SỐ THỂ TÍCH

Công thức 1.1. *Cho hình lăng trụ tam giác* $ABC.A'B'C'$ *có thể tích là V, khi đó thể tích của tứ diện tạo bởi 4 đỉnh bất kỳ trong 6 đỉnh trên có thể tích là* $\frac{V}{3}$.

Ví dụ 1. Khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có thể tích bằng V. Khi đó, thể tích khối tứ diện $ABA'C'$ bằng:

A. $\frac{V}{2}$ **B.** $\frac{2V}{3}$ **C.** $\frac{3V}{4}$ **D.** $\frac{V}{3}$

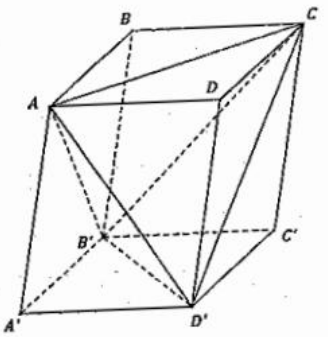
Hướng dẫn giải

Theo công thức 1.1, chọn đáp án: **D.**

Ví dụ 2. Khối hộp ABCD.A'B'C'D' có thể tích V. Khi đó, thể tích khối tứ diện ACB'D' bằng

A. $\frac{V}{3}$ **B.** $\frac{V}{2}$ **C.** $\frac{3V}{4}$ **D.** $\frac{2V}{3}$

Hướng dẫn giải



Nhận thấy:

$$V_{ACB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_{AA'B'D'} - V_{CC'B'D'} - V_{B'ABC} - V_{D'ADC}$$
$$V - \frac{1}{6}V - \frac{1}{6}V - \frac{1}{6}V - \frac{1}{6}V = \frac{1}{3}V.$$

Đáp án: **A.**

Công thức 1.2. *Cho hình chóp S.ABC. Trên 3 đường thẳng SA,SB,SC lấy ba điểm A', B', C' khi đó:*

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}$$

Ví dụ 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi B' và C' lần lượt là trungđiểm AB và AC. Tỉ số thể tích của khối tứ diện AB'C'D và ABCD bằng:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{6}$

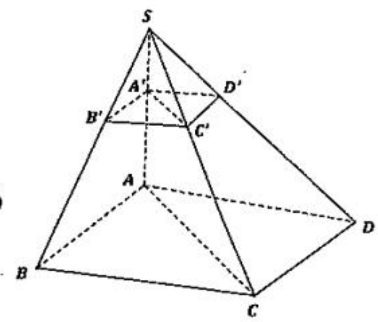
Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức 1.2 ta có $\frac{V_{AB'C'D}}{V_{ABCD}} = \frac{AB'.AC'.AD}{AB.AC.AD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1 = \frac{1}{4}$. Đáp án: **D**

Ví dụ 4. Gọi V là thể tích hình chóp S.ABCD. Lấy A' trên SA sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng qua A' và song song đáy hình chóp cắt SB, SC, SD tại B', C', D'. Thể tích hình chóp S.A'B'C'D' bằng:

A. $\frac{V}{3}$ **B.** $\frac{V}{9}$ **C.** $\frac{V}{27}$ **D.** $\frac{V}{81}$

Hướng dẫn giải



Do mặt (A'B'C'D') //(ABCD)

nên $\frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SA'}{SA} = \frac{1}{3}$

Các bạn chú ý công thức 1.2 chỉ đúng cho chóp có đáy là tam giác. Nên ta không thể áp dụng cho chóp S.ABCD. Bởi vậy 1 cách khôn ngoan ta chia chóp S.ABCD thành 2 chóp đáy là tam giác S.ABC và S.ACD

Ta có:

$$V_{S.ABCD} = V_{S.ABC} + V_{S.ACD}$$

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{27} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{V_{S.ABC}}{27}$$

$$\frac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SD'}{SD}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{27} \Rightarrow V_{S.A'D'C'} = \frac{V_{S.ADC}}{27}$$

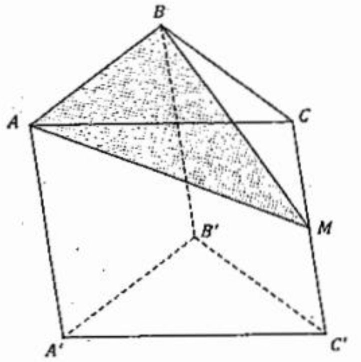
$$\Rightarrow V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'D'C'} = \frac{V_{S.ABC}}{27} + \frac{V_{S.ADC}}{27} = \frac{V_{S.ABCD}}{27} = \frac{V}{27}$$

Đápán : **C.**

Ví dụ 5. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Mặt phẳng đi qua A, B và trung điểm M của cạnh CC' chia lăng trụ thành hai phần. Tỉ số thể tích hai phần đó bằng:

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải



Do M là trung điểm CC'

Sử dụng công thức 1.1 và 1.2 ta có

$$\frac{V_{C'.ABC}}{V_{LT}} = \frac{1}{3}, \frac{V_{M.ABC}}{V_{C'.ABC}} = \frac{C'M}{C'C} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{M.ABC} = \frac{1}{6}V_{LT}$$

$$V_{MC'ABB'A'} = \frac{5}{6}V_{LT}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{M.ABC}}{V_{MC'ABB'A'}} = \frac{1}{5}$$

Đáp án: **B.**

Ví dụ 6. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V. Gọi M là trung điểm cạnh CC'. Thể tích hình chóp $M.ABB'A'$ bằng:

A. $\frac{2V}{5}$ **B.** $\frac{V}{2}$ **C.** $\frac{2V}{3}$ **D.** $\frac{V}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có do $CC' // (ABB'A')$

$$\Rightarrow V_{M.ABB'A'} = V_{C.ABB'A'} = V_{C.ABB'} + V_{C.AA'B'} = \frac{1}{3}V + \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V$$

Đáp án: **C.**

II. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN HÌNH CHÓP

1. Chóp có đáy là tam giác đều

Cho chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, thể tích là V

** Cho* $SA = SB = SC = b$.

- Nếu a=b (tứ diện đều) thì tứ diện có chiều cao $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ *và thể tích* $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

- Nếu a≠b thì tứ diện có chiều cao $h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$ *và thể tích* $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$.

** Cho cạnh bên hợp với đáy góc* α *thì* $V=\tan\alpha.\frac{a^3}{12}$.

** Cho mặt phẳng bên hợp với đáy góc* β *thì* $V=\tan\beta.\frac{a^3}{24}$.

Ví dụ 7. Một khối tứ diện đều có cạnh bằng a thì thể tích của nó bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Hướng dẫn giải

Có chiều cao của tứ diện đều cạnh a là $\frac{a\sqrt{6}}{3}$,

Diện tích đáy là tam giác đều cạnh a: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

Vậy thể tích của tứ diện đều là $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$. Đáp án: **B.**

Ví dụ 8. Một hình tứ diện đều có chiều cao bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}$ thì thể tích của nó bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Hướng dẫn giải

Có chiều cao của tứ diện đều cạnh a là $\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow a=1$

Vậy thể tích của tứ diện đều là $V=\frac{\sqrt{2}}{12}$. Đáp án: **A.**

Ví dụ 9. Một khối chóp, đáy tam giác đều có ba mặt bên là tam giác vuông cân. Cạnh đáy của nó bằng a thì thể tích của nó bằng:

A. $\frac{a^3}{6}$ **B.** $\frac{a^3}{8}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

Hướng dẫn giải

Khi chóp có 3 mặt bên là tam giác vuông cân, cạnh đáy là $a\Rightarrow$ cạnh bên $=\frac{a}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow V=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. Đáp án: **D.**

2. Chóp có đáy là hình vuông

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, thể tích là V

**Nếu SA vuông góc với đáy, SA=b thì* $V = \frac{a^2b}{3}$

**Nếu các cạnh bên có số đo bằng b thì* $V = \frac{a^2}{3}.\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$

**Nếu chóp đều, cạnh bên hợp với mặt đáy góc* β *thì* $V = \tan\beta.\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$

**Nếu chóp đều, mặt bên hợp với đáy góc* β *thì* $V = \tan\beta.\frac{a^3}{6}$

Ví dụ 10. Một khối chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và tam giác SAC vuông. Thể tích của khối chóp đó bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Hướng dẫn giải

Có $AC = a\sqrt{2}$.

Do là chóp đều nên $SA = SC$, tam giác SAC vuông $\Rightarrow SA = SC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a$

Áp dụng công thức $V = \frac{a^2}{3}.\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a^2}{3}.\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. Đáp án: **A.**

III. MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

1. Mặt cầu

a) Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu S(O;R) và mặt phẳng (P), gọi d là khoảng cách từ O tới (P) và H là hình chiếu của O trên (P) có:

+) d<R mp (P) cắt mặt cầu S(O;R) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên (P) và có tâm là H, bán kính r= $\sqrt{R^2 - d^2}$

+) d=R thì mp (P) cắt mặt cầu tại một điểm duy nhất

+) d<R thì mp(P) không cắt mặt cầu

b) Công thức

Mặt cầu bán kính R có diện tích: $S = 4\pi R^2$

Khối cầu bán kính R có thể tích: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Chóp tam giác đều cạnh đáy a; cạnh bên b: $r_{ngoại tiếp} = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}}$

Chóp tứ giác đều cạnh đáy a; cạnh bên b: $r_{ngoại\,tiếp} = \dfrac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{2}}}$

2. Mặt trụ

Công thức

+)Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay có bán kính r, độ dài đường sinh là l: $S_{xq} = 2\pi rl$

+)Thể tích của khối trụ tròn xoay có diện tích đáy là B và chiều cao h:

$$V = Bh$$

3. Mặt nón

+) Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi rl$ (trong đó l là độ dài đường sinh, r là bán kính đường tròn đáy)

+) Thể tích khối nón có chiều cao h, diện tích đáy là *B:* V=$\frac{1}{3}Bh$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có thể tích bằng V. Khi đó thể tích khối chóp A.BCC'B' bằng:

A. $\frac{2V}{3}$ **B.** $\frac{V}{3}$ **C.** $\frac{V}{2}$ **D.** $\frac{3V}{4}$

2. Hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có thể tích bằng V. Khi đó, tứ diện ABA'C' có thể tích bằng:

A. $\frac{2V}{3}$ **B.** $\frac{4V}{3}$ **C.** $\frac{V}{3}$ **D.** $\frac{V}{4}$

3. Cho hình nón (H) có chiều cao h, đường sinh tạo với đáy một góc 60° Thể tích khối cầu nội tiếp (H):

A. $\frac{4}{9}\pi h^3$ **B.** $\frac{2}{9}\pi h^3$ **C.** $\frac{2}{81}\pi h^3$ **D.** $\frac{4}{81}\pi h^3$

4. Cho khối chóp ABCD.A'B'C'D'. Mặt phẳng đi qua A, B và trung điểm cạnh $B'C'$ chia lăng trụ thành hai phần. Tỉ số thể tích hai phần đó bằng:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{5}$

5. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích V và có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Nếu M là trung điểm SB thì thể tích tứ diện $ABCM$ bằng:

A. $\frac{2V}{5}$ **B.** $\frac{V}{4}$ **C.** $\frac{2V}{3}$ **D.** $\frac{V}{2}$

6. Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích V. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$ bằng:

A. $\frac{V}{2}$ **B.** $\frac{V}{3}$ **C.** $\frac{V}{4}$ **D.** $\frac{V}{8}$

7. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm cạnh $A'A$. Mặt phẳng (MBC) chia hình lăng trụ thành hai phần có tỉ số thể tích bằng:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** 1 **D.** $\frac{2}{3}$

8. Cho khối chóp đáy tam giác đều cạnh a và có cạnh bên là $SA = SB = SC = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

9. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy a và $SA = a\sqrt{2}$ thì thể tích V của hình chóp bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{12}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{4}$

10. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với mặt đáy góc 60^0. Thể tích của hình chóp đó bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{10}$

11. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với mặt đáy góc 30^0. Thể tích khối chóp đó bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{10}$

12. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với mặt đáy góc 45^0. Thể tích khối chóp đó bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\frac{a^3}{12}$ **C.** $\frac{a^3}{24}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{10}$

13. Cho hình chóp S.ABC tam giác đều có cạnh đáy bằng a và mặt bên (SBC) tạo với mặt đáy góc 60^0. Thể tích của khối chóp đó bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{10}$

14. Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và mặt bên (SAC) tạo với mặt đáy góc 45^0. Thể tích khối chóp đó bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\frac{a^3}{24}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{10}$

15. Cho hình chóp S.ABC tam giác đều, cạnh đáy bằng 2a, $\widehat{((SAB),(ABC))} = 30^0$. Thể tích khối chóp đó bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{72}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{10}$

16. Một khối chóp S.ABCD có thể tích V. Thể tích khối lăng trụ có đáy là ABCD và một cạnh bên là SA bằng:

A. $2V$ **B.** $\frac{2V}{3}$ **C.** $3V$ **D.** $\frac{3V}{4}$

17. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện đều cạnh a bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

18. Cho hình chóp SABC có đường cao $SA = 2a$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

19. Cho hình chóp SABC có tất cả các cạnh đều bằng a. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính bằng:

A. a **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

20. Mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh a có bán kính bằng:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

21. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng a và cạnh đáy là $a\sqrt{2}$. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính bằng:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

22. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh a. Gọi AH là đường cao của tứ diện và S là trung điểm đoạn thẳng AH. Mặt cầu đi qua bốn điểm S, B, C, D có bán kính bằng:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O và có cạnh bằng a. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $O.ABCD$ có bán kính bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $a\sqrt{2}$ **D.** $\frac{3a}{4}$

24. Cho tứ diện đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện tới mặt phẳng đi qua một mặt của tứ diện bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

25. Cho tứ diện đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện tới đường thẳng chứa một cạnh của tứ diện bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

26. Một tứ diện đều nội tiếp mặt cầu bán kính R thì cạnh của tứ diện đó bằng:

A. $\frac{2\sqrt{6}R}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{6}R}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{6}R}{2}$ **D.** $\frac{2\sqrt{3}R}{3}$

27. Một hình lập phương nội tiếp mặt cầu bán kính R thì cạnh của hình lập phương đó bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}R}{3}$ **B.** $\frac{2\sqrt{3}R}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}R}{6}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}R}{4}$

28. Một hình lập phương nội tiếp mặt cầu bán kính R. Khoảng cách từ tâm mặt cầu tới mặt phẳng chứa một mặt của hình lập phương bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}R}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}R}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}R}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}R}{6}$

29. Số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước là:

A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số

30. Một hình hộp chữ nhật nội tiếp mặt cầu và có ba kích thước là a, b, c. Khi đó bán kính r của mặt cầu là:

A. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ B. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

C. $\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$ D. $\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$

31. Tứ diện SABC có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau trong đó SA = a, SB = b; SC = c. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện:

A. $\frac{2(a+b+c)}{3}$ B. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

C. $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ D. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

32. Mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện đều ABCD cạnh a có bán kính:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ C. $a\sqrt{2}$ D. $2a\sqrt{2}$

33. Một hình cầu có thể tích $\frac{4}{3}\pi$ ngoại tiếp một hình lập phương. Thể tích hình lập phương đó là:

A. $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ B. $\frac{8}{3}$ C. 1 D. $2\sqrt{3}$

34. Tứ diện ABCD có AB = CD = c, AC = BD = b, AD = BC = a. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là:

A. $\frac{\pi}{3}(a^2+b^2+c^2)$ B. $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2+c^2)$

C. $\pi(a^2+b^2+c^2)$ D. $2\pi(a^2+b^2+c^2)$

35. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện đều cạnh a bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

36. Cho hình chóp $SABC$ có đường cao $SA=2a$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

37. Cho hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính bằng:

A. a **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

38. Mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh a có bán kính bằng:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

39. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng a và cạnh đáy là $a\sqrt{2}$. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính bằng:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

40. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh a. Gọi AH là đường cao của tứ diện và S là trung điểm đoạn thẳng AH. Mặt cầu đi qua bốn điểm S,B,C,D có bán kính bằng:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

41. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O và có cạnh bằng a. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $O.ABCD$ có bán kính bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $a\sqrt{2}$ **D.** $\dfrac{3a}{4}$

42. Cho tứ diện đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện tới mặt phẳng đi qua một mặt của tứ diện bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

43. Cho tứ diện đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện tới đường thẳng chứa một cạnh của tứ diện bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

44. Một tứ diện đều nội tiếp mặt cầu bán kính R thì cạnh của tứ diện đó bằng:

A. $\dfrac{2\sqrt{6}R}{3}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{6}R}{3}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{6}R}{2}$ **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}R}{3}$

45. Một hình lập phương nội tiếp mặt cầu bán kính R thì cạnh của hình lập phương đó bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}R}{3}$ **B.** $\frac{2\sqrt{3}R}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}R}{6}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}R}{4}$

46. Một hình lập phương nội tiếp mặt cầu bán kính R. Khoảng cách từ tâm mặt cầu tới mặt phẳng chứa một mặt của hình lập phương bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}R}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}R}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}R}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}R}{6}$

47. Một tứ diện đều cạnh a nội tiếp một khối nón. Thể tích khối nón:

A. $\frac{\sqrt{3}}{27}\pi a^3$ **B.** $\frac{\sqrt{6}}{27}\pi a^3$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi a^3$ **D.** $\frac{\sqrt{6}}{9}\pi a^3$

48. Cho tam giác đều ABC cạnh a quay xung quanh đường cao AH tạo nên một hình nón. Diện tích xung quanh hình nón đó:

A. πa^2 **B.** $2\pi a^2$ **C.** $\frac{1}{2}\pi a^2$ **D.** $\frac{3}{4}\pi a^2$

49. Cho một hình nón sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao. Một mặt cầu có diện tích bằng diện tích toàn phần của hình nón thì có bán kính là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

50. Cho một hình nón sinh bởi một tam giác đều cạnh a khi quay quanh một đường cao. Một khối cầu có thể tích bằng thể tích của khối nón thì có bán kính bằng:

A. $\frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{8}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{8}$

51. Cho hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy và bằng 2. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó là:

A. $\sqrt{3}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

52. Một tứ diện đều cạnh a có một đỉnh trùng với đỉnh của hình nón, ba đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón:

A. $\frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{3}$ **B.** $\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{3}$ **C.** $\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{2}$ **D.** $\pi a^2\sqrt{3}$

53. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với mặt đáy góc 60^o. Diện tích toàn phần của hình nón ngoại tiếp hình chóp:

A. $\frac{3\pi}{2}a^2$ **B.** $\frac{3\pi}{4}a^2$ **C.** $\frac{3\pi}{6}a^2$ **D.** $\frac{3\pi}{8}a^2$

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. A	4. B	5. B	6. D	7. C	8. A	9. B	10. C
11. B	12. B	13. C	14. B	15. C	16. C	17. B	18. B	19. C	20. B
21. B	22. C	23. D	24. A	25. D	26. A	27. B	28. B	29. D	30. A
31. B	32. B	33. A	34. B	35. B	36. B	37. C	38. B	39. B	40. C
41. D	42. A	43. D	44. A	45. B	46. B	47. B	48. C	49. D	50. A
51. D	52. B	53. A							

Bài 7. Phương pháp tư duy dùng điểm thuận lợi và điểm biên

I. TƯ DUY DÙNG ĐIỂM BIÊN

Tư duy phương pháp: Tư duy dùng điểm biên là tư duy dùng các điểm ở đầu mút các đoạn ở đáp án hoặc đề bài. Với những bài mà đáp án hoặc đề có dạng khoảng hoặc nửa khoảng thì chúng ta dùng với điểm biên là điểm rất gần các đầu mút (sai lệch một lượng rất nhỏ) có thể coi nó thay thế cho điểm biên.

Ví dụ 1. Cho $y = 4x^3 - 3x + 1(C)$ với giá trị nào của a thì phương trình $4x^3 - 3x + 1 = 4a^3 - 3a + 1$ có nghiệm đơn duy nhất

A. $a > 0$ **B.** $a < 0$ **C.** $\left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 2 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} a < -1 \\ a > 1 \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Lập bảng biến thiên của hàm $f(t) = 4t^3 - 3t + 1$ (C) rồi dựa vào đó xét các khoảng giá trị của a thỏa mãn đề.

Cách 2: Với đề bài mà tại đầu mút "biên" không có dấu bằng ta có thể thử bằng một giá trị rất gần biên đó. Ví dụ ở đáp án A ta thay a = 2,1 rồi dùng máy tính cầm tay giải phương trình bậc 3 để xem phương trình có thỏa mãn đề hay không. Tương tự như vậy với các đáp án còn lại.

Đáp án: **D.**

Ví dụ 2. Cho $\log_{\frac{1}{2}}(\log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4}) < 0$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} -5 < x < -4 \\ x > 6 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} 4 < x < 5 \\ x < -6 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} -4 < x < -3 \\ x > 8 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} 3 < x < 4 \\ x < -8 \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

Tương tự ví dụ 1 ta nhập hàm $\log_{\frac{1}{2}}(\log_6 \frac{X^2 + X}{X + 4})$ trong máy tính cầm tay rồi dùng phím CALC để thử giá trị theo các đáp án.

Đáp án: **C.**

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 + m + 3$.

Tìm m để hàm số nghịch biến trên $(1;2)$?

A. $0 \le m \le 1$ **B.** $m \le 4$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 4 \end{array}\right.$ **D.** $m \le 1$

Hướng dẫn giải

Cách 1: $y' = -4x^3 + 4mx \le 0$ với mọi x thuộc (1;2) từ đó ta có thể rút sang một bên và lập bảng biến thiên của hàm g(x). Từ đó nhận xét được giá trị của m.

Cách 2: Thử $m = 4$ (loại) nên loại B, C. Thử m = – 1 thấy thỏa mãn nên loại A.

Đáp án: **D.**

II. TƯ DUY DÙNG ĐIỂM THUẬN LỢI

Tư duy phương pháp: Đối với những bài toán chứa tham số và yêu cầu xét một tính chất chung thì ta có thể cho tham số một giá trị thích hợp để đưa bài toán về trường hợp cụ thể. Đối với rất nhiều bài toán (có tham số hoặc không có tham số) thì việc dùng điều kiện cần để loại dần đáp án là một phương án rất hiệu quả. Chúng ta không trực tiếp tìm ra đáp số nhưng chúng ta sẽ loại 3 đáp án để có đáp số cần tìm. Đó là một trong những phương pháp tư duy đặc trưng để giải toán trắc nghiệm.

Ví dụ 1. Cho $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$, tìm m để hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$?

A. $m \le 0$ **B.** $m \le 12$ **C.** $m \ge 12$ **D.** $m \ge 0$

Hướng dẫn giải

Cách 1: $y' = 3x^2 - 12x + m \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -3x^2 + 12x$ với mọi x thuộc $(0;+\infty)$ nên ta lập bảng biến thiên của $-3x^2 + 12x$ rồi nhận xét giá trị của m.

Cách 2: Có thể làm f(0) = 1; f(1) = m – 2; f(1) > f(0) nên m > 3. Tức là ta dựa vào định nghĩa với x tăng thì y phải tăng.

Đáp án: **C.**

Ví dụ 2. Cho $y = -2x^3 - 3(2a+1)x^2 - 6a(a+1)x + 2$ có cực trị tại $x_1; x_2$ thì giá trị của $|x_1 - x_2|$ bằng:

A. $|x_1 - x_2| = a$ **B.** $|x_1 - x_2| = 1$ **C.** $|x_1 - x_2| = 2$ **D.** $|x_1 - x_2| = a - 1$

Hướng dẫn giải

Ta sẽ cho a một giá trị **thuận lợi** để các đáp án A, B, C, D cho các giá trị khác nhau. Lúc đó đề bài cũng sẽ làm với một hàm tường minh. Ở đây có thể cho a = 0 thay vào hàm số ta được:

$y = -2x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = -6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -1$ nên $|x_1 - x_2| = 1$

Đáp án: **B.**

Ví dụ 3. Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x} \ge 0$ là:

A. $1 \le x \le 2$ **B.** $2 \le x \le 3$ **C.** $1 \le x \le 3$ **D.** $0 < x \le 3$

Hướng dẫn giải

Cách 1:

+ Điều kiện $\frac{x^2-3x+3}{x}>0 \Leftrightarrow x>0$

+ Khi đó $\log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2-3x+3}{x}\geq 0$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2-3x+3}{x}\geq \log_{\frac{1}{3}}1 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+3}{x}\leq 1 \Leftrightarrow x^2-3x+3\leq x$

$\Leftrightarrow x^2-4x+3\leq 0 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 3$

+ Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm $1\leq x\leq 3$

Cách 2: Thử các đáp án bằng chức năng **CALC**, nhập hàm $\log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2-3x+3}{x}$.

Ta sắp xếp đáp án với biên theo thứ tự tăng dần $0\to 1\to 2\to 3$

Ta sẽ thử với đáp án có biên nhỏ nhất

Ta có với $x=0,1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}\frac{0,1^2-3.0,1+3}{0,1}<0$ không thỏa mãn, loại D.

Ta có với $x=1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}\frac{1^2-3.1+3}{1}=0$ thỏa mãn, loại B.

Để loại A, C ta thử $x=3$ được $\log_{\frac{1}{3}}\frac{3^2-3.3+3}{3}=0$, loại A.

Đáp án: **C.**

Ví dụ 4 (*Câu 16 đề minh họa THPT quốc gia*).

Cho hàm số $f(x)=2^x.7^x$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $f(x)<1 \Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0$

B. $f(x)<1 \Leftrightarrow x\ln 2+x^2\log 7<0$

C. $f(x)<1 \Leftrightarrow x\log_7 2+x^2<0$

D. $f(x)<1 \Leftrightarrow 1+x\log_7 2<0$

Hướng dẫn giải

Dùng điểm biên. Dễ có x = 0 là nghiệm của phương trình nên để xảy ra bất phương trình thì sẽ có nghiệm rất sát 0 bên trái hoặc bên phải. Thấy ngay với x tiến tới 0 thì không thỏa mãn đáp án D trong khi đó $x\approx 0$ sẽ làm nghiệm của bất phương trình đầu.

Đáp án: **D.**

Ví dụ 5.(*Câu 17 đề minh họa THPT quốc gia*). Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a b$

B. $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$

C. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4}\log_a b$

D. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$

Hướng dẫn giải

Cho b = 1 ta dễ dàng tìm được chỉ có đáp án D thỏa mãn công thức. Có thể cho thêm a = 2 rồi dùng Casio. Đáp án: **D.**

Ví dụ 6. (*Câu 10 đề minh họa THPT quốc gia*). Cho hai số thực a và b, với $1 < a < b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **đúng**?

A. $\log_a b < 1 < \log_b a$

B. $1 < \log_a b < \log_b a$

C. $\log_b a < \log_a b < 1$

D. $\log_b a < 1 < \log_a b$

Hướng dẫn giải

Tương tự như trên ta cho $b = 4; a = 2$ tức cho $b = a^2$ (a,b thỏa mãn đề).
Đáp án: **D.**

CHƯƠNG II. TƯ DUY GIẢI NHANH PHẦN HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Bài 1. Hàm số và tính chất

I. LÝ THUYẾT

1. Tập xác định của hàm số

Cho hàm số $y=f(x)$. Tập xác định (hay còn được gọi là miền xác định) D của hàm số $y=f(x)$ là tập hợp các giá trị của biến số x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Tập xác định của 1 số hàm thường gặp:

$\frac{A}{B}$: điều kiện $B\neq 0$ $\qquad$ $\sqrt{A}$: điều kiện $A\geq 0$

$\frac{A}{\sqrt{B}}$: điều kiện $B>0$ $\qquad$ $\log_A B$: điều kiện $A>0, B>0, A\neq 1$

Ví dụ 1. Miền xác định của hàm số $y=\frac{x^2-1}{\log_3(x^2-4)}+\sqrt{-x^2+3x+4}$

A. $(2;4)$ $\qquad$ **B.** $(-\infty;-2)\cup(-1;2)$

C. $[2;4]$ $\qquad$ **D.** $(2;4]\backslash\{\sqrt{5}\}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có miền xác định của hàm số là tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn

$$\begin{cases} x^2-4>0 \\ -x^2+3x+4\geq 0 \\ \log_3(x^2-4)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, x<-2 \\ -1\leq x\leq 4 \\ x^2-4\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<x\leq 4 \\ x\neq \pm\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<x\leq 4 \\ x\neq \sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy miền xác định của hàm số là: $(2,4]\backslash\{\sqrt{5}\}$

Cách 2: Sử dụng kĩ thuật chọn điểm biên

Thay $x=2$ vào hàm số thì thấy $\log_3(x^2-4)=\log_3 0$ là không xác định, loại đáp án C.

Thay $x = 4$ vào hàm số được $y = \dfrac{4^2 - 1}{\log_3(4^2 - 4)} + \sqrt{-4^2 + 3.4 + 4} \Rightarrow x = 4$ nằm trong miền xác định.

Quan sát chỉ thấy đáp án D có chứa $x = 4$. Đáp án: **D.**

2. Tập giá trị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$. Tập giá trị hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các giá trị có thể có của $f(x)$.

Chú ý: Thông thường ta đánh giá được giá trị hàm số về dạng $a \le y \le b$, khi đó tập giá trị của hàm số là $[a; b]$.

Ví dụ 1. Miền giá trị của hàm số $y = x^2 + x + 3$ là:

A. $[3; +\infty)$ **B.** $[2; +\infty)$ **C.** $\left[\dfrac{11}{2}; +\infty\right)$ **D.** $\left[\dfrac{11}{4}; +\infty\right)$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có $y = x^2 + x + 3 = x^2 + 2.\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4} + \dfrac{11}{4} = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{11}{4} \ge \dfrac{11}{4}$

Vậy tập giá trị của hàm số đã cho là $\left[\dfrac{11}{4}; +\infty\right)$.

Cách 2: Do để y_0 thuộc tập giá trị thì tồn tại $x_0 \in D : y_0 = {x_0}^2 + x_0 + 3$, từ đó ta có:

Xét các y_0 là đầu mút trong từng đáp án và sử dụng giải phương trình bậc 2 bằng Casio (MODE 5 3)

Xét đáp án A có $y_0 = 3 \Rightarrow 3 = {x_0}^2 + x_0 + 3 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 0 \in D$

Xét đáp án B có $y_0 = 2 \Rightarrow 2 = {x_0}^2 + x_0 + 3$ vô nghiệm vậy loại B

Xét đáp án C có $y_0 = \dfrac{11}{2} \Rightarrow \dfrac{11}{2} = {x_0}^2 + x_0 + 3$ có tồn tại nghiệm thuộc TXĐ.

Xét đáp án D có $y_0 = \dfrac{11}{4} \Rightarrow \dfrac{11}{4} = {x_0}^2 + x_0 + 3 \Leftrightarrow {x_0}^2 + x_0 + \dfrac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ thuộc TXĐ.

Như vậy A, B, D đều thỏa mãn. Nên ta sẽ chọn đáp án có y_0 nhỏ nhất.

Đáp án: **D.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}+\log_2\left(|x|-2\right)$ là:

A. $(-\infty;3)\cup[4;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$

C. $(-\infty;-2)\cup[4;+\infty)$ **D.** Một kết quả khác

2. Miền xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x\left(x^2-100\right)}$ là:

A. $(-\infty;\ 0)\cup(0\ ;\ 2]$ **B.** $[\ 3;0)\cup(0;-3]$

C. $[\ -2,\ 0)\cup\ (0\ ;\ 2\ ]$ **D.** $[-3;0]\cup[0;3]$

3. Hàm số $y=\sqrt{4^x+8^{\frac{2}{3}(x-2)}-2^{2(x-1)}-52}$ có tập xác định là:

A. $[0,+\infty)$ **B.** $[1,+\infty)$ **C.** $[2,+\infty)$ **D.** $[3,+\infty)$

4. Chọn kết luận **đúng**. Hàm số $y=log(3x^2-4x+5)$ có tập giá trị là:

A. $\left[\log\dfrac{10}{3};+\infty\right]$ **B.** $\left[\log\dfrac{11}{3};+\infty\right]$

C. $\left[\log\dfrac{12}{3};+\infty\right]$ **D.** $\left[\log\dfrac{14}{3};+\infty\right]$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN

1. Đáp án: **C.**

Lập trục xét dấu cho từng biểu thức sau đó lấy giao.

2. Đáp án: **C.**

Chú ý mẫu khác 0

3. Đáp án: **D.**

Đặt $t=2^x$. Có thể nhập hàm trong dấu căn rồi dùng **CALC** để thử các giá trị thuộc đáp án này mà không thuộc đáp án kia để loại dần. Áp dụng cả cho các câu trên.

4. Đáp án: **B.** $\log(3x^2-4x+5)=\log[3(x-\dfrac{2}{3})^2+\dfrac{11}{3}]\geq\log\dfrac{11}{3}$

Bài 2. Hàm số và Đạo hàm

I. LÝ THUYẾT

1.1. Các quy tắc tính đạo hàm

1/ $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2/ $(uv)' = u'v + uv'$

3/ $(cu)' = cu'$ (c là hằng số)

4/ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

1.2. Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

1/ $(c)' = 0$ (c là hằng số)

2/ $(x^n)' = nx^{n-1}$

3/ $(\sin x)' = \cos x$

4/ $(\cos x)' = -\sin x$

5/ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

6/ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

7/ $(a^x)' = a^x \ln a$

8/ $(e^x)' = e^x$

9/ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

10/ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

11/ $\left(\frac{1}{(ax+b)^n}\right)' = -n\frac{a}{(ax+b)^{n+1}}$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

2.1. Đạo hàm và biểu thức đạo hàm

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = e^{\sin x}$.

Biểu thức rút gọn của $K = y'\cos x - y\sin x - y''$ là :

A. $\cos x.e^{\sin x}$ **B.** $2e^{\sin x}$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải

Cách 1 :

$y' = (\sin x)'e^{\sin x} = \cos x e^{\sin x}$

$y'' = (\cos x)'e^{\sin x} + \cos x\left(e^{\sin x}\right)' = -\sin x e^{\sin x} + \cos^2 x e^{\sin x}$

$K = y'\cos x - y\sin x - y''$

$= \cos^2 x.e^{\sin x} - e^{\sin x}\sin x - \left(-\sin x e^{\sin x} + \cos^2 x e^{\sin x}\right) = 0$

Cách khác: Lấy 1 giá trị bất kỳ của x như $x = 0$; Khi đó ta có

$y = 1, y' = 1, y'' = 1$

$K = 1.\cos 0 - 1.\sin 0 - 1 = 0$.

2. Tính đạo hàm tại một điểm

Để tính đạo hàm tại 1 điểm ngoài cách sử dụng các công thức đạo hàm cơ bản thì ta có thể sử dụng Casio tính đạo hàm tại điểm $x = x_0$ thông qua chức năng của $\frac{d}{dx}(\ )\Big|_{x=}$

Ví dụ 1. Hàm số $y = \sqrt[3]{3x+2}$ có đạo hàm $f'(2)$

A. 0 **B.** 2 **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** -1

Hướng dẫn giải

Bấm SHIFT $+\int \rightarrow \frac{d}{dx}(\ )\Big|_{x=}$ rồi nhập hàm cần tính đạo hàm và giá trị cần tính đạo hàm tại điểm.

Khi đó ta được kết quả

Math ▲

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{3X+2}\right)\Big|_{x=2}$$

0.25

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hàm số $y = xe^x$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

A. $y' = y + e^x$ **B.** $y'' = y + 2e^x$

C. $y''' = y + 3e^x$ **D.** $y'' + y' = y'''$

2. Đạo hàm của $y = (x^2+1)^x$ là:

A. $y' = \ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}$ **B.** $y' = (x^2+1)^x\left[\ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right]$

C. $y' = (x^2+1)^x \ln(x^2+1)$ **D.** $y' = (x^2+1)^x\left[\frac{\ln(x^2+1)+2x^2}{x^2+1}\right]$

3. Đạo hàm của hàm $y = \cos 2x$ là:

A. $y' = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ **B.** $y' = 2\cos(2x+\pi)$

C. $y' = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ **D.** $y' = 2\sin(2x+\pi)$

4. Đạo hàm cấp 2 của hàm $y=\frac{1}{x}$ là:

A. $y''=-\frac{2!}{x^3}$ B. $y''=\frac{2!}{x^2}$ C. $y''=\frac{2!}{x}$ D. $y''=\frac{2!}{x^3}$

5. Đạo hàm cấp 2 của hàm $y=\frac{1}{x^2+3x+2}$ là:

A. $y''=\frac{2x^2-6x+5}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$ B. $y''=-\frac{2x^2+6x+5}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$

C. $y''=\frac{2x^2-6x-5}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$ D. $y''=\frac{2x^2+6x+5}{\left(x^2+3x+2\right)^2}$

6. Cho $f(x)=x^5\sqrt[4]{x^7}$. Đạo hàm $f'(1)$ bằng:

A. $6,25$ B. $6,75$ C. $\frac{13}{2}$ D. 6

7. Cho hàm số $y=\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}}$. Đạo hàm $f'(0)$ bằng:

A. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ B. $\sqrt[3]{2}$ C. $\frac{\sqrt[3]{16}}{8}$ D. $\frac{2\sqrt[3]{4}}{5}$

8. Cho hàm số $f(x)=\ln\left|\sin 2x\right|$. Đạo hàm $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)$ bằng:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

9. Cho hàm số $f(x)=\tan x$. Giá trị của $f'(0)$ là:

A. -1 B. 1 C. 2 D. -2

10. Cho hàm số $f(x)=x^{\pi}.\pi^{x}$. Đạo hàm của $f'(1)$ bằng:

A. $\pi(1+\ln 2)$ B. $\pi(\pi+\ln\pi)$ C. $\pi\ln\pi$ D. $\pi^2\ln\pi$

11. Cho $f(x)=\log_2(x^2+1)$. Đạo hàm của $f'(1)$ bằng:

A. $\frac{1}{\ln 2}$ B. $1+\ln 2$ C. 2 D. $4\ln 2$

12. Hàm số $y=f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$. Tính đạo hàm của hàm số tại $x=0$?

A. $f'(0)=-1$ **B.** $f'(0)=1$ **C.** $f'(0)=0$ **D.** Kết quả khác

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. A	**2. B**	**3. A**	**4. D**	**5. D**	**6. B**	**7. A**	**8. B**	**9. B**	**10. B**
11. A	**12. B**								

1. Đáp án : **D.**

$$y'=e^x+xe^x;\ y''=2e^x+xe^x;\ y'''=3e^x+xe^x$$

2. Đáp án: **B.**

Ta có: $\ln y=x\ln(x^2+1)\Rightarrow(\ln y)'=\left[x\ln(x^2+1)\right]'$

$$\Leftrightarrow\frac{y'}{y}=\ln(x^2+1)+x.\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow y'=(x^2+1)^x\left(\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}\right)$$

3. Đáp án: **A.**

Có $y'=-2\sin 2x=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

4. Đáp án: **D.**

Có $y'=-\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow y''=\dfrac{2}{x^3}$

5. Đáp án: **D.**

Có $y'=-\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}\Rightarrow y''=-\dfrac{2(x^2+3x+2)-(2x+3)^2}{(x^2+3x+2)^2}=\dfrac{2x^2+6x+5}{(x^2+3x+2)^2}$

6. Đáp án: **B.**

Dùng Casio ta có $\left.\dfrac{d}{dx}(x^5\sqrt[4]{x^7})\right|_{x=1}=6,75$

7. Đáp án: **A.**

Dùng Casio ta có $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}}\right)\Bigg|_{x=0} \approx 0.62996 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

Lưu ý: Khi đáp số lẻ ta cần đổi các đáp án ra số thập phân để so khớp kết quả gần nhất. Có thể sử dụng 2 máy tính, một máy bấm đạo hàm và một máy bấm đổi ra số thập phân của các đáp án. Ngoài ra, ta bấm ra giá trị của tích phân rồi gán cho A sau đó nhập A-X rồi dùng CALC thay X bằng các giá trị ở đáp án.

8. Đáp án: **B.** Sử dụng Casio
9. Đáp án: **B.** Sử dụng Casio.
10. Đáp án: **B.** Sử dụng Casio.
11. Đáp án: **A.** Sử dụng Casio.
12. Đáp án: **B.** Sử dụng Casio.

Bài 3. Tính đơn điệu

I. LÝ THUYẾT

Cho hàm số $y = f(x)$, tồn tại đạo hàm trên khoảng $(a;b)$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a,b) \Leftrightarrow y'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$ đồng thời $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm $\in (a,b)$.

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a,b) \Leftrightarrow y'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b)$ đồng thời $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm $\in (a,b)$.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

1. Dạng 1: Khảo sát tính đơn điệu của hàm số

Ví dụ 1. Khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ là:

A. $(0;2)$ **B.** $(-1;2)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(0;3)$

Hướng dẫn giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = x^2 - 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ Chú ý: khi làm ta không cần vẽ bảng biến thiên để tránh làm mất thời gian.

Khi tính với hàm số bậc 3 có $y' = 0$ ra được 2 nghiệm $x_1 < x_2$

Nếu hệ số a của hàm bậc 3 dương thì suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1;x_2)$ và hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;x_1)$, $(x_2;+\infty)$

Nếu hệ số a của hàm bậc 3 âm thì suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$ và hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;x_1)$, $(x_2;+\infty)$

Như bài toán trên ta khi tính được $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$, nhìn thấy hệ số $a = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow y' < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$. Đáp án: **A.**

Ví dụ 2. Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ đồng biến trên:

A. $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ **B.** $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$

C. $(-\infty;0)$ **D.** $(-\infty;-1)$

Hướng dẫn giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$y'=\frac{3}{(x+1)^2}>0,\forall x\in D$$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$. Đáp án: **D.**

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=x^3-5x^2+7x-4$. Biết khoảng nghịch biến của hàm số có dạng $(a;b)$. Khi đó $\max(b-a)$ là:

A. $\dfrac{3}{4}$ **B.** 3 **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 4

Hướng dẫn giải

Với cách cho đề bài như vậy ta cần phải chỉ ra khoảng rộng nhất mà hàm số nghịch biến

Ta có $y'=3x^2-10x+7\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=1,x=\dfrac{7}{3}$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trong khoảng $\left(1;\dfrac{7}{3}\right)$, vậy $\max(b-a)=\dfrac{7}{3}-1=\dfrac{4}{3}$.

Đáp án: **C.**

2. Dạng 2: Tìm giá trị của tham số để hàm đơn điệu trên khoảng xác định

Cách làm chung

Bước 1: Tìm khoảng xác định;

Bước 2: Xây dựng điều kiện để dấu của $y'\ge 0$ $(y'>0, y'\le 0, y'<0)$ trên khoảng xác định.

Bước 3: Giải điều kiện trên tìm m.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=x^3-mx^2+x+5$. Giá trị của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $\sqrt{3}\le m\le 2$ **B.** $-\sqrt{3}\le m\le\sqrt{3}$ **C.** $-\sqrt{3}\le m\le 2$ **D.** $0\le m\le 2$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có $y'=3x^2-2mx+1$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \Delta'=m^2-3\le 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}\le m\le \sqrt{3}$

Đáp án: **B.**

Cách 2: Thử giá trị của m ở các biên để loại dần đáp án.

Ví dụ 2. Cho hàm số sau: $y=f(x)=x^3-3(a-1)x^2+3a(a-1)x+1$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề **sai** là:

A. Hàm số luôn đồng biến với $\forall a\ge 2$

B. Hàm số luôn có cực đại, cực tiểu với $\forall a<-2$

C. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(0;1)$ với $0<a<1$

D. Tồn tại a để hàm số không có cực trị

Hướng dẫn giải

Với dạng toán này nếu ta làm trực tiếp theo cách tự luận sẽ mất nhiều thời gian. Bởi vậy ta nên dựa vào đáp án thử các giá trị để loại

Chọn $a=2$ ta được $y=x^3-3x^2+6x+1 \Rightarrow y'=3x^2-6x+6>0, \forall x \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến. Suy ra dự đoán đáp án A là đúng.

Chọn $a=-3$ ta có $y=x^3+12x^2+36x+1 \Rightarrow y'=3x^2+24x+36 \Rightarrow y'=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt, suy ra hàm số luôn có cực đại cực tiểu, vậy dự đoán B đúng

Chọn $a=0,5$ ta có $y=x^3+\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{3}{4}x+1 \Rightarrow y'=3x^2+3x-\dfrac{3}{4} \Rightarrow y'=0$ dùng máy tính Casio bấm thấy có 2 nghiệm không thuộc khoảng $(0;1) \Rightarrow$ hàm số không nghịch biến trong khoảng $(0;1) \Rightarrow$ Đáp án: **C.**

3. Dạng 3: Tìm giá trị của tham số để hàm đơn điệu trên khoảng $(a;b)$

Cách làm chung

Bước 1: Tính đạo hàm y';

Bước 2: Xây dựng điều kiện để dấu của $y'\ge 0\,(y'>0, y'\le 0, y'<0)$ trên khoảng $(a;b)$;

Bước 3. Giải điều kiện trên tìm m.

Ví dụ 1. Cho hàm số: $y=x^3-mx^2+x+5$. Giá trị của m để hàm số nghịch biến trong khoảng $(1;2)$

A. $m\ge\frac{13}{6}$ **B.** $m\ge\frac{13}{2}$ **C.** $m\ge\frac{13}{5}$ **D.** $m\ge\frac{13}{4}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có $y'=3x^2-2mx+1$ để hàm số nghịch biến trong khoảng $(1;2)$ thì

$y'=3x^2-2mx+1\le 0,\ \forall x\in(1;2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'\ge 0\\ x_1\le 1<2\le x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-3\ge 0\\ \dfrac{m-\sqrt{m^2-3}}{3}\le 1\\ 2\le\dfrac{m+\sqrt{m^2-3}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\sqrt{3},m\le-\sqrt{3}\\ 6\le m+\sqrt{m^2-3}\end{cases}\Leftrightarrow m\ge\frac{13}{4}$$

Cách 2: Để hàm số nghịch biến trong khoảng $(1;2)$ thì

$$y'=3x^2-2mx+1\le 0,\forall x\in(1;2)$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x^2+1}{2x}\le m\ \forall x\in(1;2)$$

$$\Leftrightarrow \underset{[1,2]}{Max}\frac{3x^2+1}{2x}\le m,\ \ g(x)=\frac{3x^2+1}{2x}$$

Ta có

$$g'(x)=\left(\frac{3x^2+1}{2x}\right)'=\frac{6x^2-2}{4x^2}\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-2=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\notin[1;2]$$

$$\underset{[1,2]}{max}\,g(x)=g(2)=\frac{13}{4}\Rightarrow m\ge\frac{13}{4}.$$

Cách 3: Ta thử lần các giá trị $m=\frac{13}{6},m=\frac{13}{5},m=\frac{13}{4}$ vào hàm số $y=x^3-mx^2+x+5$ và xét sự nghịch biến trong khoảng (1; 2) để tìm ra đáp án.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\frac{x+3m-1}{x-m}$ (1). Giá trị m để hàm số (1) nghịch biến trên nửa đoạn $[3;+\infty)$ là:

A. $\frac{1}{4}\le m<3$ **B.** $m\ge\frac{1}{4}$ **C.** $0<m<3$ **D.** $\frac{1}{4}<m<3$

Hướng dẫn giải

TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\{m\}$, $y'=\dfrac{1-4m}{(x-m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên $[3,+\infty)$, ta phải có:

$$\begin{cases} y'\le 0 \ \ \forall x\in[3,+\infty) \\ m<3\left(m\notin[3,+\infty)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4m\le 0 \\ m<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \dfrac{1}{4} \\ m<3 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\le m<3.$$

(m < 3 để đảm bảo hàm số nghịch biến tại mọi điểm trên $[3,+\infty)$, ví dụ: khi m = 4 $\Rightarrow$ điều kiện xác định x khác 4 $\Rightarrow$ hàm số không thể nghịch biến tại 4)

Mặt khác, ta thấy với $m=\dfrac{1}{4}$ thì $y'=0$ trên toàn bộ tập xác định

$\Rightarrow m=\dfrac{1}{4}$ không thoả mãn điều kiện.

Vậy $\dfrac{1}{4}<m<3$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hàm số $y=f(x)=x^4-mx^2+3$ (trong đó m là tham số). Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\forall m\in\mathbb{R}$, hàm số không đơn điệu trên $\mathbb{R}$

B. $\exists m\in\mathbb{R}$ để hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$

C. $\exists m\in\mathbb{R}$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

D. Cả ba đáp án trên đều sai

2. Trong các hàm số sau, hàm số nghịch biến trong khoảng (1; 5) là

A. $y=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x+2$ **B.** $y=\dfrac{x-2}{x^2+x+1}$

C. $y=x+\dfrac{1}{x}$ **D.** $y=x^2-2x+5$

3. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. Khẳng định đúng là:

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

4. Cho hàm số: $y=\frac{2x^2+x+1}{x+1}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề **sai** là:

A. Hàm số đồng biến $(-\infty;-2)$, $(0;+\infty)$

B. Hàm số nghịch biến $(-2;-1)$, $(-1;0)$

C. Hàm số đồng biến $(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$

5. Hàm số: $y=f(x)=x\ln x$ đồng biến trong các khoảng nào sau đây:

A. $(0,+\infty)$ **B.** $(-\infty,0)$ **C.** $(0,e^{-1})$ **D.** $(1,+\infty)$

6. Cho hàm số $y=\frac{e^{2x}-e^x+1}{e^{2x}+e^x+1}$. Trên khoảng nào sau đây thì hàm số không đơn điệu:

A. $(0;+\infty)$ **B.** $(-\infty;0)$ **C.** $(1;2007)$ **D.** $(-1;1)$

7. Giá trị của x để $y'>0$ biết $y=\ln(x^4-2x^2+3)$

A. $x>0\vee 1<x<2$ **B.** $x<0\vee 1<x<2$

C. $-1<x<0\vee x>1$ **D.** $0<x<1\vee x<-1$

8. Hàm số $y=\frac{1}{e^{x^2-2x+3}}$ đồng biến trên khoảng:

A. $(1;+\infty)$ **B.** $(-\infty;1)$ **C.** $(-1;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-1)$

9. Trong các hàm số sau đây, hàm số nghịch biến trên $(0;\pi)$ là:

A. $y=\sin x+\cos x+2x$ **B.** $y=\log_\pi x$

C. $y=\pi^{-x}$ **D.** $y=\cos x+x$

10. Cho hàm số sau $y=f(x)=x^3-3(a-1)x^2+3a(a-1)x+1$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề **sai** là:

A. Hàm số luôn luôn đồng biến với $a\geq 2$

B. Hàm số luôn luôn có cực đại, cực tiểu với $a<-2$

C. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(0;1)$ với $0<a<1$

D. Hàm số luôn luôn đồng biến trên tập với $1<a<2$

11. Giá trị của m để $y=\frac{m(x+1)^3}{x^2-x+1}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$:

A. $m=0$ **B.** $m\neq 0$ **C.** $m>0$ **D.** Một kết quả khác

12. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-2m)x - 1$ (1). Giá trị của m để hàm số (1) nghịch biến trên tập xác định:

A. 1 **B.** 0 **C.** -1 **D.** 2

13. Cho hàm số $y = \left(\frac{m-1}{3}\right)x^3 + mx^2 + (3m-2)x$ (1). Giá trị của m thì hàm số (1) luôn đồng biến:

A. $\frac{1}{2} \le m \le 2$ **B.** $1 < m \le 2$ **C.** $m \ge 1$ **D.** $m \ge 0$

14. Cho hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + (m+1)x + 4m$. Giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$ là:

A. $m = 10$ **B.** $m = -10$ **C.** $m = 2$ **D.** $m = 5$

15. Cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$. Giá trị của m để y nghịch biến trên $(-\infty;1)$ là:

A. $m > 1$ **B.** $m < 1$ **C.** $-2 < m \le -1$ **D.** Đáp án khác

16. Cho hàm số $y = x^3 - 3(a-1)x^2 + 3a(a-2)x + 4$. Để hàm số này đồng biến trên các đoạn $[-2;-1]$ và $[1;2]$ thì giá trị của a thỏa mãn:

I. $a \ge 4$ II. $a \le -2$ III. $a = 1$

Kết luận nào đúng:

A. I ,II **B.** II , II **C.** I , III **D.** I, II , III

17. Để hàm số $y = \frac{-x^3}{3} + (a-1)x^2 + (a+3)x - 4$ đồng biến trong khoảng $(0;3)$ thì giá trị cần tìm của tham số a là:

A. $a > -3$ **B.** $-3 < a < \frac{12}{7}$ **C.** $a \ge \frac{12}{7}$ **D.** $a < -3$

18. Cho hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Giá trị cần tìm của tham số m là:

A. $\frac{-1}{\sqrt{16}} \le m \le \frac{1}{\sqrt{16}}$ **B.** $m > \frac{1}{2}$ **C.** $m < \frac{-1}{\sqrt{6}}$ **D.** $m \le \frac{5}{12}$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN

1. D	2. A	3. D	4. C	5. D	6. D	7. C	8. B	9. C	10. C
11. C	12. A	13. B	14. B	15. B	16. D	17. C	18. D		

1. Đáp án: A đúng, 1 hàm trùng phương thì không thể đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Thật vậy, có $y' = 4x^3 - 2mx = 2x(2x^2 - m)$ suy ra y' là hàm bậc 3 nên không tồn tại $m \in \mathbb{R}$ để hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên $\mathbb{R}$.

B, C đúng. Chọn $m=0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

Đáp án: **D.**

2. Có $y'=x^2-6x+5 \Rightarrow y'\le 0 \Leftrightarrow x^2-6x+5\le 0 \Leftrightarrow 1\le x\le 5$. Đáp án: **A.**

Lưu ý: Với các bài toán cần phải xét đến từng đáp án thì ta nên chọn đáp án có dạng hàm quen thuộc, dễ tính toán trước để xử lý.

3. $y=1-\dfrac{2x}{x^2+x+1} \Rightarrow y'=-\dfrac{2\left(x^2+x+1\right)-2x(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\dfrac{2x^2-2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

$\Rightarrow y'\ge 0 \Leftrightarrow 2x^2-2\ge 0 \Leftrightarrow x\le -1, x\ge 1$

$\Rightarrow y'\le 0 \Leftrightarrow 2x^2-2\le 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1],[1;+\infty)$, nghịch biến trên $[-1;1]$

Đáp án: **D.**

4. $y=\dfrac{2x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{2x^2-2+2+x+1}{x+1}=2(x-1)+\dfrac{2}{x+1}+1$

$\Rightarrow y'=2-\dfrac{2}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow y'\ge 0 \Leftrightarrow 2-\dfrac{2}{(x+1)^2}\ge 0 \Leftrightarrow (x+1)^2\ge 1 \Leftrightarrow x\le -2, x\ge 0$

$\Rightarrow y'\le 0 \Leftrightarrow -2\le x\le 0$

Đáp án: **C.**

5. $y'=\ln x+1 \Rightarrow y'\ge 0 \Leftrightarrow \ln x+1\ge 0 \Leftrightarrow \ln x\ge -1 \Leftrightarrow x\ge \dfrac{1}{e}$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{e};+\infty\right) \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

6. $y=\dfrac{e^{2x}-e^x+1}{e^{2x}+e^x+1}=1-\dfrac{2e^x}{e^{2x}+e^x+1}$

$\Rightarrow y'=-\dfrac{2e^x\left(e^{2x}+e^x+1\right)-\left(2e^{2x}+e^x\right)2e^x}{\left(e^{2x}+e^x+1\right)^2}=\dfrac{2e^{3x}-2e^x}{\left(e^{2x}+e^x+1\right)^2}=\dfrac{2e^x\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+e^x+1\right)^2}$

$\Rightarrow y'\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 0, \quad y'\le 0 \Leftrightarrow x\le 0$

Vậy trên những khoảng nào chứa 0 thì hàm số không đơn điệu.

Đáp án: **D.**

7. Ta có $y'=\dfrac{4x^3-4x}{x^4-2x^2+3}\Rightarrow y'>0\Leftrightarrow \dfrac{4x^3-4x}{x^4-2x^2+3}>0\Leftrightarrow 4x^3-4x>0$ (*)

Đến đây ta có 2 cách xử lý $4x^3-4x>0$

Cách 1: $4x^3-4x>0\Leftrightarrow 4x(x-1)(x+1)>0$ ta thử 1 giá trị $x=2$ thì thấy thỏa mãn nên $4x(x-1)(x+1)>0\Leftrightarrow -1<x<0\vee x>1$

Chú ý dấu của hàm bậc 3 sẽ đan dấu giữa các khoảng nghiệm

Cách 2: Từ các đáp án ta chọn các giá trị của x thử vào (*) để tìm đáp án đúng

Thử với $x=0{,}001$ vào (*) thấy không thỏa mãn $\Rightarrow$ loại đáp án A, D

Thử với $x=2$ vào (*) thấy thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án: **C.**

8. Ta có $y'=-\dfrac{(2x-2).e^{x^2-2x+3}}{e^{2x^2-4x+6}}\Rightarrow y'>0\Leftrightarrow 2x-2<0\Leftrightarrow x<1.$

9. Đối với bài này thì ta có thể dễ dàng nhìn ra đáp án đúng là C nhưng với dạng này, ta hay dùng tính năng TABLE để khảo sát tính biến thiên của các đáp án.

Nếu khảo sát hàm lượng giác ta nên để ở chế độ Radian (Shift + Mode + 4)

Bước 1: Nhấn MODE 7

Bước 2: Nhập hàm cần khảo sát. Nhấn "="

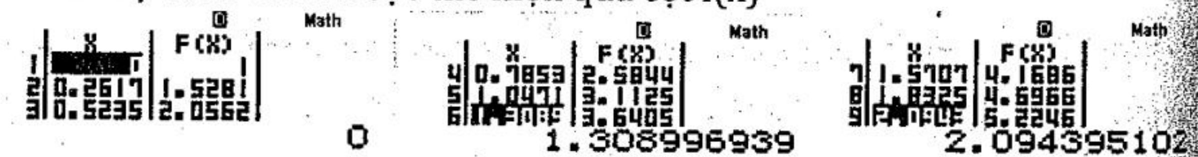
Bước 3: Start? – Nhập giá trị khởi đầu, ở bài này là 0, sau đó nhấn "="

(Nhấn hai lần phím "=" đối với máy Fx570VN hoặc VINACAL 570ES Plus II)

Bước 4: End? – Nhập giá trị kết thúc, ở bài này nhập π

Bước 5: Step? – Nhập bước nhảy của giá trị, thường thường là $\dfrac{\pi}{12}$

Sau đó sự biến thiên được thể hiện qua cột f(x)



Ta thấy giá trị tăng dần chứng tỏ hàm số đồng biến trong $(0;\pi)$. Loại A

Tương tự với các đáp án còn lại.

10. Chọn $a=2$ ta được $y=x^3-3x^2+6x+1\Rightarrow y'=3x^2-6x+6>0,\forall x\Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến. Vậy dự đoán A là đúng.

Chọn $a=-3$ ta có $y=x^3+12x^2+36x+1\Rightarrow y'=3x^2+24x+36\Rightarrow y'=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt. Suy ra hàm số luôn có cực đại cực tiểu. Vậy dự đoán B đúng.

Chọn $a=0,5$ ta có $y=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x+1 \Rightarrow y'=3x^2+3x-\frac{3}{4} \Rightarrow y'=0$ dùng Casio bấm thấy có 1 nghiệm thuộc khoảng $(0;1) \Rightarrow$ hàm số không nghịch biến trong khoảng $(0;1)$.

Xét đáp án D. Có

$$y'=3x^2-6(a-1)x+3a^2-3a \Rightarrow y'>0 \Leftrightarrow \Delta'=-9a+9<0 \Leftrightarrow a>1.$$

Hàm số luôn đồng biến với $a>1$.

Đáp án: **D.**

11. Cách thông thường: để xét tính đồng biến ta cần tính đạo hàm

$y'=\dfrac{3m(x+1)^2\left(x^2-x+1\right)-m(x+1)^3(2x-1)}{\left(x^2-x+1\right)^2}$, nhận thấy y' rất cồng kềnh

Nên ta chọn cách thử đáp án

Với m = 0 dễ thấy y = 0 $\Rightarrow$ loại A. Còn 3 phương án ta chọn giá trị m thuộc B mà không thuộc C

Chọn m = − 1 ta có $y'=\dfrac{-3(x+1)^2\left(x^2-x+1\right)+(x+1)^3(2x-1)}{\left(x^2-x+1\right)^2}$

dùng Casio bấm ta được phương trình $y'=0 \Leftrightarrow x=-1; x=2$ khi có 2 nghiệm y' sẽ đổi dấu trên các khoảng xác định nên không đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ loại B

Với những bài cồng kềnh thì thường sẽ có đáp án cụ thể

Khả năng chọn đáp án C là rất cao. Khi đó ta nên chọn C ngay khi loại 2 đáp án A, B.

12. TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có $y'=-3x^2+6mx+3(1-2m)$

Để hàm số (1) nghịch biến trên tập xác định ta phải có $y'\le 0$ với $\forall x$

$$\Leftrightarrow -3x^2+6mx+3(1-2m)\le 0, \forall x$$

$$\Leftrightarrow x^2-2mx+2m-1\ge 0, \forall x$$

$$\Leftrightarrow \Delta=4(m-1)^2\le 0 \Leftrightarrow (m-1)^2=0 \Leftrightarrow m=1.$$ Đáp án: **A.**

13. $y'=(m-1)x^2+2mx+3m-2$

Để hàm số (1) luôn đồng biến thì ta phải có $y'\ge 0\ \forall x$.

+) Nếu $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$ thì $y'=2x+1$ đổi dấu khi x qua $-\frac{1}{2}$, suy ra hàm số (1) không thể luôn đồng biến.

+) Nếu $m-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1$ thì

$$y'>0\ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ \Delta=-8m^2+20m-8\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m\le 2$$

14. Thử lần lượt từng giá trị vào hàm số rồi dùng TABLE khảo sát hàm trong khoảng $(-1;1)$, Step = 0,1 thì chỉ có m = -10 là thỏa mãn hàm số nghịch biến.

15. Có $y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2} \Rightarrow y'<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<m<2 \\ m\le -1\ ((x+m)\neq 0) \end{array}\right. \Leftrightarrow -2<m\le -1$

16. Có $y'=3x^2-6(a-1)x+3a(a-2)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 3x^2-6(a-1)x+3a(a-2)>0\ \forall x\in[-2;-1]$ và $[1;2]$

$$\Leftrightarrow\ \Delta'=9 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{3(a-1)+3}{3}=a \\ x_2=\dfrac{3(a-1)-3}{3}=a-2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(-\infty;a-2)$ và $(a;+\infty)$

Thử lần lượt các đáp án I, II, III thấy đều thỏa mãn đề bài.

Đáp án: **B.**

17. *Cách 1*: Ta có $y'=-x^2+2(a-1)x+a+3$. Hàm số đồng biến $(0;3)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0, \forall x\in(0;3)$

$\Leftrightarrow -x^2+2(a-1)x+a+3\ge 0, \forall x\in(0;3)$

$\Leftrightarrow a\ge \dfrac{x^2+2x-3}{2x+1}, \forall x\in(0;3)$

$\Leftrightarrow a\ge \max\dfrac{x^2+2x-3}{2x+1}, \forall x\in[0;3]$

Khảo sát hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{2x+1}, x\in[0;3]$ ta thấy $\max f(x)=\dfrac{12}{7}$

Vậy $a\ge\dfrac{12}{7}$. Đáp án: **C.**

Cách 2: Thử lần lượt $m\in\{-2;3;-4\}$, dùng tính năng TABLE để loại các đáp án A, B, D.

18. *Cách 1:* $y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 = m(-12x+12) + 3x^2 - 6x + 5$

$y' > 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \le \dfrac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}, \forall x \in (2;+\infty)$

Khảo sát hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}, x \in (2;+\infty)$ ta thấy $f(x) \ge \dfrac{5}{12} \Rightarrow m \le \dfrac{5}{12}$

Cách 2: Thử những số thuộc những khoảng trong đáp án rồi dùng TABLE khảo sát x trong khoảng $(2;10)$, Step = 1.

Thử lần lượt $m = 0,3$ thấy thỏa mãn. Loại A, B, C.

Bài 4. Tiệm cận

I. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

a. Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty;\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty;\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty;\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty.$$

b. Tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn.

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0;\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0.$$

2. Các trường hợp cụ thể

Hàm số bậc nhất trên bậc nhất (hàm nhất biến) $y = \dfrac{ax+b}{mx+n}(an - bm \neq 0)$

+TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{n}{m}\right\}$;

TCĐ: $\lim\limits_{x \to -\frac{n}{m}} y = \infty \Rightarrow (d): x = -\dfrac{n}{m}$; TCN: $\lim\limits_{x \to \infty} y = \dfrac{a}{m} \Rightarrow (d): y = \dfrac{a}{m}$

3. Tính chất đặc biệt về tiệm cận

+ Tâm đối xứng của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ là giao điểm hai đường tiệm cận có tọa độ $I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$

+ Giao điểm của đồ thị với đường phân giác góc tạo bởi hai tiệm cận là hai điểm có khoảng cách ngắn nhất trên hai nhánh đồ thị).

+ Tiếp tuyến tại điểm M bất kì trên đồ thị cắt hai đường tiệm cận tại A và B thì ta luôn có M là trung điểm AB.

4. Các dạng toán

a. Tìm trực tiếp tiệm cận của hàm số

Ví dụ 1. Tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ là:

A. $y=2,\ x=2$ **B.** $y=2,\ x=2$

C. $y=-2,\ x=2$ **D.** $y=-2,\ x=2$

Hướng dẫn giải

TCĐ: $x=-2$ vì $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$; TCN: $y=2$ vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2$

Đáp án : **C.**

Ví dụ 2. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+2}{x^2-2x}$ là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải

- TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$ nên ta xét các giới hạn tại 0, 2 để tìm tiệm cận ngang.

- Xét : $\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3+2}{x^2-2x}=-\infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng,

$\lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3+2}{x^2-2x}=+\infty \Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng.

Cách làm nhanh:

Ta thấy đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có dạng: $x=a$, thông thường với a là nghiệm của phương trình $x^2-2x=0 \Rightarrow a=0,\ a=2$.

Nhận thấy, với $x=0 \to y$ có dạng $\dfrac{2}{0} \Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng

với $x=2 \to y$ có dạng $\dfrac{10}{0} \Rightarrow x=2$ là tiệm cận đứng.

Đáp án: **B.**

b. Tiệm cận liên quan đến tham số

Ví dụ 1. Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-2x+5}{x(x-1)}$ có tiệm cận ngang đi qua điểm $A(2;-2)$ là:

A. 0 **B.** 1 **C.** -2 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Do $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{mx^2-2x+5}{(x-1)x}=m$. Nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=m$, mà tiệm cận ngang đi qua điểm $A(2;-2) \Rightarrow m=-2$.

Ví dụ 2. Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(n^2-1\right)x-3}{x+1}$ cắt nhau tại điểm $A\left(-1;3\right)$ khi tham số n nhận giá trị trong tập:

A. $\varnothing$ **B.** $\{2\}$ **C.** $\{-2\}$ **D.** $\{-2;2\}$

Hướng dẫn giải

Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị cắt nhau tại điểm $A\left(-1;3\right)$ suy ra TCĐ: $x=-1$ và TCN: $y=3$

Chú ý về điều kiện tồn tại tiệm cận $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ là: $ad\neq bc$, với bài toán này ta có điều kiện là

$n^2-1\neq -3$ điều này luôn đúng với mọi n.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(n^2-1)x-3}{x+1}=3\Leftrightarrow n^2-1=3\Leftrightarrow n=\pm 2$.

Đáp án: **D.**

Cách khác: Ta nhập biểu thức $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(A^2-1)X-3}{X+1}\to CALC$, gán A là các giá trị trong các phương án, X bằng 1 số to như X=100000. Nếu phương án nào ra kết quả 3 thì đó là phương án đúng.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hàm số $y=\dfrac{5mx^2-8mx+2}{7x-3}$ với m là tham số. Với mọi giá trị của m tập hợp các giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là:

A. $\varnothing$

B. Đường thẳng $y=\dfrac{5m}{7}x+\dfrac{41}{49}m$

C. Đường thẳng $x=3$

D. Đường thẳng $x=\dfrac{3}{7}$.

2. Cho hai hàm số $y=\dfrac{-x-3}{x+m^2-4}$ và $y=\dfrac{-x-7}{x+5}$. Tập hợp các giá trị của tham số m để hai đường tiệm cận của hai đồ thì đó trùng nhau là:

A. $\pm\dfrac{5}{2}$ **B.** $\pm\dfrac{23}{5}$ **C.** 0 **D.** ± 3

3. Cho hàm số $y=\dfrac{5x-3}{x^2-2mx+1}$ với m là tham số. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng khi m bằng:

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $-1<m<1$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right.$

4. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}(C)$ là:

A. $I(-1;2)$ **B.** $I(2;-1)$ **C.** $I(1;-2)$ **D.** $I(-2;1)$

5. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+3}$. Trục đối xứng của đồ thị hàm số là:

A. $x=-y$ **B.** $x+y=-2$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x-y=-4 \\ x+y=-2 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y=2 \end{array}\right.$

6. Cho hàm số $y=\dfrac{2(x-1)}{x+1}(C)$. Tìm trên hai nhánh của (C) hai điểm A, B sao cho AB ngắn nhất. Hai điểm A, B lần lượt là:

A. $(1;0),(-3;4)$ **B.** $(-1;0),(3;4)$

C. $(1;0),(3;4)$ **D.** $(-1;0),(-3;4)$

7. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}(C)$. Tiếp tuyến tại điểm $M(0;-1)$ cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm:

A. $(1;2),(-1;-4)$ **B.** $(-1;2),(-1;4)$

C. $(1;-2),(1;4)$ **D.** $(-1;-2),(1;4)$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. D	**2. D**	**3. C**	**4. A**	**5. C**	**6. A**	**7. A**

1. Với mọi m ta luôn có tiệm cận đứng $x=\dfrac{3}{7}$

2. Có thể là trùng 2 đường TCĐ hoặc 2 đường TCN.

Điều kiện tồn tại tiệm cận của $y=\dfrac{-x-3}{x+m^2-4}$ là:

$$-1.\left(m^2-4\right)\neq -3 \Leftrightarrow m\neq \pm\sqrt{7}$$

Khi đó dễ thấy 3 đồ thị hàm số đã trùng tiệm cận ngang với nhau

Ta chỉ cần tìm điều kiện để cho 2 TCĐ trùng nhau $\Leftrightarrow m^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow m = \pm 3$

3. Không có tiệm cận đứng khi $x^2 - 2mx + 1 > 0, \forall x$

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$$

4. Ta có TCĐ : $x = -1$, TCN : $y = 2 \Rightarrow I(-1; 2)$

Tính chất: Tâm đối xứng của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ là giao điểm hai đường tiệm cận.

5. Ta có TCĐ: $x = -3$, TCN : $y = 1$.

Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai tiệm cận trên là

$$|x+3| = |y-1| \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -4 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

Tính chất: Trục đối xứng của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ là hai đường phân giác của các cặp góc tạo bởi hai đường tiệm cận.

6. Ta có TCĐ: $x = -1$, TCN: $y = 2$.

Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai tiệm cận trên là

$|x+1| = |y-2| \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -3 \ (d_1) \\ x + y = 1 \quad (d_2) \end{cases}$. Ta tìm giao điểm của d_1, d_2 với đồ thị.

Tính chất: Giao điểm của đồ thị với đường phân giác góc tạo bởi hai tiệm cận là hai điểm có khoảng cách ngắn nhất trên hai nhánh đồ thị.

7. Từ tính chất trên ta sẽ dùng phương pháp thử đáp án.

Thấy phương án A thỏa mãn tọa độ M là trung điểm của $(1;2),(-1;-4)$

Tính chất: Tiếp tuyến tại điểm M bất kì trên đồ thị cắt hai đường tiệm cận tại A và B thì ta luôn có M là trung điểm AB.

Bài 5. Cực trị hàm số

Điều kiện cần để hàm số có cực trị

Nếu hàm số f có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại điểm đó thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý: Hàm số f có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó không có đạo hàm.

Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Định lí 1: Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên $(a;b)\setminus\{x_o\}$

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **âm** sang **dương** khi x đi qua x_0 thì $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **dương** sang **âm** khi x đi qua x_0 thì $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.

Định lí 2: Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

Nếu $f''(x_0) < 0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.

Nếu $f''(x_0) > 0$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

1. Cực trị hàm đa thức bậc 3: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

Đạo hàm: $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Điều kiện tồn tại cực trị

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ $y = f(x)$ có cực đại và cực tiểu

$\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac > 0$

(*Để hàm số không có cực trị* $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0$)

khi đó hàm số đạt cực trị tại $x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$ là nghiệm của $f'(x) = 0$

Nếu hệ số $a > 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_1, đạt cực tiểu tại x_2

Nếu hệ số $a < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_2, đạt cực tiểu tại x_1

Đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu có phương trình

$y = \frac{2}{3}\left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x + \left(d - \frac{bc}{9a}\right)$ chính là phần dư của phép chia $y : y'$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ b3}}{f(x)} = q(x).\underset{\substack{\downarrow \\ b2}}{f'(x)} + \underset{\substack{\downarrow \\ b1}}{r(x)}$$

2. Cực trị hàm đa thức bậc 4: $y = ax^4 + bx^2 + c\left(a \neq 0\right)$

$y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$, đặt $g(x) = 2ax^2 + b$

+ Để hàm có CĐ, CT thì $2ax^2 + b = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases}$$

+ Hàm trùng phương chỉ có 3 cực trị hoặc có 1 cực trị.

+ Để hàm số không có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ không đổi dấu

+ Để hàm số có 2 CĐ, 1 CT $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ y'(x) = 0 \end{cases}$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ Để hàm số có 1 CĐ, 2 CT $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ y'(x) = 0 \end{cases}$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ Để hàm số chỉ có CT mà không có CĐ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ y'(x) = 0 \end{cases} \text{có 1 nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \left[\begin{array}{l} g(x) = 0 \text{ vô nghiệm} \\ g(0)=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

+ Để hàm số chỉ có CĐ mà không có CT:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ y'(x) = 0 \end{cases} \text{có 1 nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \left[\begin{array}{l} g(x) = 0 \text{ vô nghiệm} \\ g(0)=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

+ Để hàm số có CĐ, CT thoả mãn điều kiện cho trước

Cách giải thông thường (sẽ mất nhiều thời gian)

- Điều kiện có CĐ, CT
- Sử dụng định lý Viét, dấu tam thức bậc 2...trong từng bài toán cụ thể
- Với dạng toán này cách làm nhanh ta thường dựa vào các đáp án thế ngược lại...

3. Các dạng toán

a. Dạng toán 1. Tìm cực trị của hàm số

Phương pháp:

- Tính y', tìm các giá trị x làm cho $y' = 0$ hoặc y' không xác định
- Sử dụng định lý 1, hoặc định lý 2 để xác định cực trị

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=(x+1)(x-2)^2$

a. Cực trị hàm số trên là:

A. $x=0, x=-1$ **B.** $x=0, x=2$ **C.** $x=1, x=2$ **D.** $x=0, x=1$

b. Số cực trị của hàm số là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

c. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của hàm số là:

A. $2\sqrt{5}$ **B.** 2 **C** .4 **D.** $5\sqrt{2}$

d. Gọi $x_1, x_2\left(x_1 < x_2\right)$ là 2 cực trị của hàm số khi đó giá trị x_1-2x_2 là:

A. -4 **B.** 0 **C.** 4 **D.** 2

Hướng dẫn giải

$y'=(x-2)^2+2(x+1)(x-2)=3x(x-2)$ vậy hàm số có 2 cực trị là

$x=0, x=2;\ x=0 \to y=4;\ x=2 \to y=0$

Vậy khoảng cách giữa 2 điểm cực trị là $\sqrt{(0-2)^2+(4-0)^2}=2\sqrt{5}$.

Ví dụ 2 *(Câu 4 – đề minh họa THPT quốc gia 2017).* Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định đúng là:

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D. Hàm số đạt cực đạt tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Hướng dẫn giải

A sai vì hàm số có hai cực trị.

B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1.

C sai vì hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

D đúng

Đáp án: **D.**

Câu 3 *(Câu 5 – đề minh họa THPT quốc gia 2017).* Giá trị cực đại $y_{CĐ}$ của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ là:

A. $y_{CĐ} = 4$ **B.** $y_{CĐ} = 1$ **C.** $y_{CĐ} = 0$ **D.** $y_{CĐ} = -1$

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Với hàm bậc 3 có hệ số của x^3 dương thì hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ (nghiệm bé của $y' = 0$)

$y_{CĐ} = y(-1) = 4$. Đáp án: **A.**

b. Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số liên quan đến cực trị

Ví dụ 1. Tìm m để hàm số $y = x^3 + mx + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $m = -1$ **B.** $m = -2$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = -3$

Hướng dẫn giải

Do hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ nên ta thử trường hợp

$$\begin{cases} f'(x_0) = f'(1) = 0 \\ f''(x_0) = f''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 = 0 \\ 6.1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$$

Khi $m = -3$ ta có: $y = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Xét dấu y' ta dễ có hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Vậy với $m = -3$ thì thỏa mãn điều kiện bài toán.

Chú ý khi đề cho các phương án chỉ chứa 1 giá trị của m như trên thì ta có thể chọn D sau khi giải điều kiện $f'(x) = 0$, mà không cần thử lại giá trị m.

Ví dụ 2. Biết rằng hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + m^2$ có giá trị cực đại.

Khẳng định đúng là:

A. m > 2 **B.** m < 1 **C.** $m \geq 3$ **D.** m > 3

Hướng dẫn giải

Thử các giá trị với $m = 0$ ta thấy $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$

luôn có 2 nghiệm phân biệt nên luôn có cực đại và cực tiểu. Đáp án: **B.**

Nếu đề cho các đáp án chặt hơn, thì ta lựa chọn thêm giá trị m phù hợp để loại như:

A. $m < 3$ **B.** $m < 1$ **C.** $m \geq -1$ **D.** $m > 3$

Do $m = 0$ thảo mãn nên loại D

Chọn $m = 1$ khi đó ta có $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$ nên hàm số chỉ có 1 cực tiểu $\Rightarrow m = 1$ không thỏa mãn.

Đáp án: **B.**

Ví dụ 3 *(Câu 8 – trích đề minh họa THPT quốc gia 2017).* Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ **D.** $m = 1$

Hướng dẫn giải

Thử đáp án ta sẽ ưu tiên thử các giá trị nghiệm trước, khi đó được đáp án đúng là **B.**

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + (m^2 - 3)x$. Giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu đồng thời $x_{CĐ}, x_{CT}$ là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{\frac{5}{2}}$ là:

A. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ **D.** $m = \sqrt{\frac{7}{2}}$

Hướng dẫn giải

$$y' = x^2 - mx + m^2 - 3$$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx + m^2 - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 12 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ (*)

Để $x_{CĐ}$, x_{CT} là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{\frac{5}{2}}$ ta phải có:

$$\begin{cases} x_{CĐ} > 0; x_{CT} > 0 \\ x_{CĐ}^2 + x_{CT}^2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{CĐ}.x_{CT} > 0, x_{CĐ} + x_{CT} > 0 \\ (x_{CĐ} + x_{CT})^2 - 2x_{CĐ}.x_{CT} = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0, m^2 - 3 > 0 \\ m^2 - 2(m^2 - 3) = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Thử đáp án thấy chỉ có D thỏa mãn. Đáp án: **D.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hàm số $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$. Khẳng định đúng là:

A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-4;4]$ là 30

B. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-4;4]$ là $-\frac{1}{4}$

C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=\frac{3}{2}$

D. Hàm số đạt cực tiểu tại hai điểm $x=1$ và $x=2$

2. Hàm số $f(x)=x^2\ln x$ đạt cực trị tại điểm:

A. $x=e$ **B.** $x=\sqrt{e}$ **C.** $x=\frac{1}{e}$ **D.** $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$

3. Số điểm cực trị của hàm số $y=x^2(2-x^2)$ là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

4. Cho hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+1-2m$. Giá trị của m để đồ thị hàm số chỉ có một điểm cực trị là:

A. $m\le 0; m\ge 1$ **B.** $m\le 0; m\ge 2$

C. $m\le 1; m\ge 2$ **D.** $m\le -1; m\ge 2$

5. Cho hàm số: $y=\frac{x^4}{2}-mx^2+\frac{3}{2}$. Giá trị của m để đồ thị hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại là:

A. $m\ge -3$ **B.** $m\ge -2$ **C.** $m\le 0$ **D.** $m\le 2$

6. Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-(3m+1)x^2+2(m+1)$ (Cm). Tất cả các giá trị m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại là:

A. $m\le -\frac{1}{3}$ **B.** $m<-\frac{1}{4}$ **C.** $m<-1$ **D.** $m\le 0$

7. Giá trị của m để hàm số $y=\left(\frac{m}{2}-2\right)x^3+3x^2-2mx-1$ có cực đại, cực tiểu là:

A. $m\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty)\setminus\{4\}$ **B.** $m\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$

C. $m\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$ **D.** $m\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)\setminus\{4\}$

8. Giá trị m để hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ có 3 điểm cực trị là:

A. $\left[\begin{array}{l} 0 < m < 3 \\ m < -3 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} 0 < m < 3 \\ m < -4 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} 0 < m < 4 \\ m < -3 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} 0 < m < 4 \\ m < -4 \end{array}\right.$

9. Giá trị m để hàm số $y = x^4 + (m^2 - 9)x^2 + 3$ có 3 điểm cực trị là:

A. $-3 < m < 3$ **B.** $-3 < m < 4$ **C.** $-2 < m < 3$ **D.** $-2 < m < 4$

10. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$. Để hàm số nhận điểm $A(1;-5)$ làm điểm cực trị thì giá trị của m là:

A. $m = -1$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = 0$ **D.** $m = \frac{1}{2}$

11. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 - 1)x + 2$. Giá trị của m để hàm số đạt cực đại tại x = 2 là:

A. $m = 8$ **B.** $m = -5$ **C.** $m = 12$ **D.** $m = 11$

12. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$. Khoảng cách giữa hai điểm cực đại, cực tiểu là không đổi là:

A. $|m|$ **B.** $|m-2|$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 2

13. Cho $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$. Giá trị của m để hàm số có 3 cực trị thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$ là:

A. $m = \frac{8}{5}$ **B.** $m = -\frac{4}{3}$ **C.** $m = \frac{4}{5}$ **D.** $m = \frac{3}{2}$

14. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 4$ (C_m). Các giá trị của m để hàm số có 3 điểm cực trị của (C_m) đều nằm trên các trục toạ độ là:

A. $m = 5$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 4$ **D.** $m = -\sqrt{5}$

15. Giá trị của m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$ là:

A. $m = \frac{3}{4}$ **B.** $m = \frac{3}{2}$ **C.** $m = \frac{4}{3}$ **D.** $m = \frac{2}{3}$

16. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x+1$ (C_m). Tất các các giá trị m để hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{CĐ}+y_{CT}>2$ là:

A. $\left[\begin{array}{l}-1<m<0\\ m>2\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}-2<m<0\\ m>1\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}-1<m<0\\ m>1\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}-1<m<1\\ m>1\end{array}\right.$

17. Cho hàm số: $y=x^4-2m(m-1)x^2+m+1$. Giá trị m để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân là:

A. $m=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$ **B.** $m=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

C. $m=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ **D.** $m=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

18. Cho hàm số $y=-x^3+3x-1$. Xác định m ($m\in\mathbb{R}$) để đường thẳng d: $y=mx-2m-3$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt trong đó có đúng một điểm có hoành độ âm.

A. $m\le 1$ **B.** $m\le -2, m\ne -9$

C. $m\le 0$ **D.** $m\le -1, m\ne -9$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. A	**2. D**	**3. D**	**4. A**	**5. C**	**6. A**	**7. D**	**8. A**	**9. A**	**10. B**
11. D	**12. C**	**13. D**	**14. B**	**15. D**	**16. C**	**17. C**	**18. D**		

1. Dùng Mode 7 khảo sát hàm số f(x) thấy ngay A đúng.

2. $y'=2x\ln(x)+x\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\frac{1}{\sqrt{e}}\end{array}\right.$. Đáp án: **D.**

Ngoài ra có thể dùng tính năng tính đạo hàm tại 1 điểm bằng máy tính Casio (Tổ hợp Shift + phím tích phân), đáp án nào cho đạo hàm tại đó bằng 0 thì chọn.

3. Có $y'=4x-4x^3\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 1\end{array}\right.$. Có 3 cực trị

4. Nếu m = 0 thì $y=-x^2+1$

$\Rightarrow y'=-2x, y'=0\Leftrightarrow x=0$. Nên hàm số chỉ có một điểm cực trị.

Vậy với m = 0 thỏa mãn.

Nếu $m\ne 0$ thì $y'=4mx^3+2(m-1)x=2x(2mx^2+m-1)$. Để đồ thị hàm số chỉ có cực trị thì y' = 0 chỉ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow 2mx^2+m-1=0$ phải vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=0$.

Đáp án: **A.**

5. $y' = 2x^3 - 2mx = 2x(x^2 - m)$. Do hệ số của x^4 dương nên đồ thị đi từ trên đi xuống dưới nên đồ thị chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

Khi và chỉ khi $y' = 2x(x^2 - m) = 0$ chỉ có 1 nghiệm

$\Leftrightarrow x^2 - m = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \le 0$

Đáp án: **C.**

6. Có $y' = x^3 - 2(3m+1)x = x\left(x^2 - 2(3m+1)\right)$

Do hàm trùng phương chỉ có 1 cực trị tại $x = 0$ hoặc 3 cực trị khi đó hàm số có cực đại mà không có cực tiểu tương đương với hàm số có cực đại tại $x = 0$.

$\Leftrightarrow y' = 0$ có duy nhất nghiệm $x = 0$ và tại $x = 0$ thì y' đổi dấu từ (-) sang (+)

$y' = 0$ có duy nhất nghiệm $\Leftrightarrow 2(3m+1) \le 0 \Leftrightarrow m \le -\dfrac{1}{3}$

Ta có với $m \le -\dfrac{1}{3}$ thì y' đổi dấu từ (-) sang (+) tại $x = 0$.

Vậy $m \le -\dfrac{1}{3}$. Đáp án: **A.**

7. Ta có $y' = 3\left(\dfrac{m}{2} - 2\right)x^2 + 6x - 2m$. y có cực đại, cực tiểu thì trước hết

$\dfrac{m}{2} - 2 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne 4$. (1)

Khi đó y' là tam thức bậc hai có $\Delta' = 9 + 2m.3\left(\dfrac{m}{2} - 2\right) = 3\left(m^2 - 4m + 3\right)$.

y có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 > 0 \Leftrightarrow m < 1, m > 3$. (2)

Kết hợp với (1) và (2) ta có những giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty) \setminus \{4\}$.

8. Để hàm số có ba điểm cực trị thì trước hết hàm số đã cho phải là hàm bậc 4, tức là $m \ne 0$. Ta có:

$$y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x = 4mx\left(x^2 + \frac{m^2 - 9}{2m}\right).$$

$$t(x) := \left(x^2 + \frac{m^2 - 9}{2m}\right)$$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi

y' có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $t(x)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 - 9}{2m} < 0 \Leftrightarrow m(m^2 - 9) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 3 \\ m < -3 \end{array}\right..$$

9. Ta có $y' = 4x^3 + 2(m^2 - 9)x = 2x(2x^2 + m^2 - 9)$. Đặt $t(x) := (2x^2 + m^2 - 9)$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi

y' có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $t(x)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow$ $m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

10. Có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$

Hàm số nhận $A(1;-5)$ là cực trị khi

$y'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 + 6(m-1) + 6(m-2) = 0 \Leftrightarrow m = 1$

11. Hàm đạt cực đại tại x = 2 nên y'(2)=0

$$\Leftrightarrow 3.2^2 - 6m.2 + (m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 12m + 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 11 \end{array}\right.$$

Dựa vào các phương án ta chọn đáp án **D.**

12. $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$

Xét phương trình: $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m = 0$

Ta có $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 + m) = 1 > 0 \Rightarrow y' = 0$ luôn có 2 nghiệm.

Hàm số luôn có cực đại, cực tiểu với mọi m. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = m+1 \end{array}\right.$

Các điểm cực trị là $A(m;\ 2m^3 + 3m^2 + 1)$, $B(m+1;\ 2m^3 + 3m)$

$\Rightarrow AB = \sqrt{2}$. **Đáp án: C.**

Cách khác: Chọn $m = 0$, tìm điểm cực trị của đồ thị hàm số ứng với $m = 0$. Rồi tính khoảng cách giữa 2 điểm cực trị.

13. Ta có:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1;\ f'(x) = 3x^2 - 6x + m = 0;\ \Delta' = 9 - 3m$$

Để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$

Viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = \dfrac{m}{3} \end{cases}$

$x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow 4 - 2.\dfrac{m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$

Đáp án: **D.**

14. Ta có: $y' = -4x^3 + 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Với $m > 0$ thì (C_m) có 3 điểm cực trị

$A(0;-4)$, $B(-\sqrt{m}; m^2 - 4)$, $C(\sqrt{m}; m^2 - 4)$.

Để A, B, C nằm trên các trục toạ độ thì $B, C \in Ox \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

15. Ta có $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1) = 2(x^2 - mx - 3m^2 + 1)$,

$t(x) = x^2 - mx - 3m^2 + 1$ là tam thức bậc hai có $\Delta = 13m^2 - 4$.

Do đó hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $t(x)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $\Delta > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$. (1)

x_1, x_2 là các nghiệm của $t(x)$ nên theo định lý Viét, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}.$$

Do đó:

$$x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{2}{3} \end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m = \dfrac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách khác: Sử dụng cách thử các đáp án

Đáp án: **D.**

16. Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 1$. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m+1 \\ x = m-1 \end{array}\right.$.

$$y_{CĐ} + y_{CT} > 2 \Leftrightarrow 2m^3 - 2m + 2 > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right..$$

Đáp án: **C.**

17. $y' = 4x^3 - 4m(m-1)x = 4x(x^2 - m^2 + m)$

Để hàm số có CĐ, CT thì $y' = 4x(x^2 - m^2 + m) = 0$ phải có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 0 \cup m > 1$

$A(0; m+1)$; $B\left(\sqrt{m^2 - m}; -m^2(m-1)^2 + m + 1\right)$; $C\left(-\sqrt{m^2 - m}; -m^2(m-1)^2 + m\right.$

Tam giác ABC vuông cân $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -\left(m^2 - m\right) + m^4(m-1)^4 = 0$;

$m = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Cách khác: Sử dụng tính chất với hàm bậc 4 trùng phương thì 3 điểm cực trị tạo thành 1 tam giác vuông cân thì ta có hệ số b của x^2 bằng -2 $(b = -2)$.

Khi đó ta có $-2m(m-1) = -2 \Leftrightarrow m(m-1) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Đáp án: **C.**

18. Cho phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$x^3 + (m-3)x - 2 - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + m + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 + 2x + m + 1 = 0 (*) \end{array}\right.$$

YCBT tương đương với (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và có đúng 1 nghiệm âm

Ta xét 2 trường hợp:

+ (*) có 1 nghiệm âm và 1 nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} P = m + 1 = 0 \\ S = -2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

+ (*) có 2 nghiệm trái dấu và khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} P = m + 1 < 0 \\ 2^2 + 2.2 + m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m \neq -9 \end{cases}$

Kết luận: $m \leq -1$, $m \neq -9$.

Đáp án: **D.**

Bài 6. Sự tương giao của đồ thị hàm số

1. Tương giao giữa đồ thị hàm đa thức với đường thẳng

Cho hai đồ thị $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$.

Để tìm hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) ta giải phương trình (gọi là phương trình hoành độ giao điểm): $f(x) = g(x)$ (*)

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của hai đồ thị.

Số giao điểm của đồ thị (C) của hàm số bậc ba: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với trục hoành bằng số nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (1)

Một số dạng câu hỏi thường gặp

a. Tìm điều kiện để đồ thị (C) và trục hoành có 1 điểm chung duy nhất

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f \text{ không có cực trị} \\ \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có 1 nghiệm duy nhất.}$$

b. Tìm điều kiện để đồ thị (C) tiếp xúc với trục hoành

(C) tiếp xúc với Ox $\Leftrightarrow$ y có 2 cực trị và $y_{CĐ}.y_{CT} = 0 \Leftrightarrow$ Phương trình (1) có đúng 2 nghiệm

c. Tìm điều kiện để đồ thị (C) và trục hoành có 3 điểm chung phân biệt

(C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ y có 2 cực trị và $y_{CĐ}.y_{CT} < 0$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt

Số giao điểm của (C): $y = ax^4 + bx^2 + c$ *với trục Ox bằng số nghiệm của*

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \ (1)$$

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2,\ t \ge 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \ (2) \end{cases}$$

Để xác định số nghiệm của (1) ta dựa vào số nghiệm của (2) và dấu của chúng.

$$(1) \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \textit{ vô nghiệm} \\ (2) \textit{ có nghiệm kép âm} \\ (2) \textit{ có 2 nghiệm âm} \end{array}\right.$$

$$(1) \text{ có 1 nghiệm} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \textit{ có nghiệm kép bằng } 0 \\ (2) \textit{ có 1 nghiệm bằng 0, nghiệm còn lại âm} \end{array}\right.$$

$$(1) \text{ có 2 nghiệm} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \textit{ có nghiệm kép dương} \\ (2) \textit{ có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm âm} \end{array}\right.$$

(1) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) *có 1 nghiệm bằng 0, nghiệm còn lại dương*

(1) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) *có 2 nghiệm dương phân biệt*

Ví dụ 1. Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ điểm đó, gia trị của y_0 là:

A. $y_0=4$ **B.** $y_0=0$ **C.** $y_0=2$ **D.** $y_0=-1$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm:

$$-2x+2=x^3+x+2 \Leftrightarrow x^3+3x=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=2$$

Cách 2: Dùng chức năng Table trên máy tính:

Nhập $f(X)=-2X+2; g(X)=X^3+X+2$

START : -4; END : 5; STEP : 0,5

Nhìn bảng ta thấy tại $x=0$ thì $f(x)=g(x)=2$ nên giao điểm của hai đồ thị hàm số là $(0;2) \Rightarrow y_0=2$

Đáp án: **C.**

Ví dụ 2. Cho hàm số: $y=x^3-(2m+1)x^2+(m-1)x+m+1$ (C_m). Tìm m để (C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt.

A. $m>1$ **B.** $m\neq 0$ **C.** $m>0$ **D.** $m<-1$

Hướng dẫn giải

+ Để (C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt thì phương trình:

$$x^3-(2m+1)x^2+(m-1)x+m+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2mx-m-1)=0$$

phải có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2-2mx-m-1=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2+m+1>0 \\ 1^2-2m.1-m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq 0.$$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m\,(C_m)$. Giá trị của m để (C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt là:

A. $-4\le m\le 21$

B. $m>1$

C. $-6<m$

D. $-5<m<27$

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox:

$$x^3-3x^2-9x+m=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2-9x=-m$$

Xét hàm số $y=x^3-3x^2-9x\,(C)$ có $y'=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)$

$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow (-1;5),(3;-27)$ là 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số (C)

(C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -27<-m<5 \Leftrightarrow -5<m<27$.

Đáp án: **D.**

2. Tương giao giữa đồ thị hàm phân thức và đường thẳng

Ví dụ. Giá trị của m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C): $y = \dfrac{x}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt:

A. $m \in \mathbb{R}$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 4 \end{array}\right.$ **C.** $0 < m < 4$ **D.** $m \neq 1$

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C)

$$\frac{x}{x-1} = -x + m \Leftrightarrow f(x) = -x^2 + mx - m = 0, x \neq -1 \ (1)$$

(d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m > 0 \\ f(-1) = -1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 4 \end{array}\right.$$

Đáp án: **B.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho (P) là đồ thị của hàm số $y = -\dfrac{x^2}{4} - x + 2$. (d) là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-1)$ và có hệ số góc bằng k. Giá trị thích hợp của k để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt là:

A. $k < -1;\ k > 2$ **B.** Với mọi k **C.** $-1 < k < 2$ **D.** $-2 < k < 1$

2. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - m + 2\ (C_m)$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $0 < m < 6$ **B.** $-1 < m < 6$

C. $2 < m < 6$ **D.** Kết quả khác

3. Gọi (C_a) là đồ thị của hàm số $y = x^3 + ax^2 - 4$. Để (C_a) chỉ cắt trục hoành tại duy nhất một điểm, giá trị cần chọn của a là:

A. $a > 3$ **B.** $a > -3$ **C.** $a < 3$ **D.** $a < -3$

4. Hàm số $y = (4-x)(1-x)^2$ có đồ thị (C). Gọi (d) là đường thẳng đi qua giao điểm của (C) với trục Oy và có hệ số góc là k. Để (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt, giá trị thích hợp của k là:

A. $k < 0$ **B.** $k > 0;\ k \neq 9$ **C.** $k < 1;\ k - 4$ **D.** $k > 1;\ k - 3$

5. Cho phương trình $x^4 + 3x^2 + 5 - m = 0$. Giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

A. $m < -5$ **B.** $m > 4$ **C.** $m < 4$ **D.** $m > 5$

6. (H) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-4}{x+2}$, còn (d) là đường thẳng $y=kx-2$. Để (d) cắt (H) tại hai điểm phân biệt, hệ số góc k của (d) phải thỏa đều kiện:

A. $k<-\dfrac{1}{2}$; $k>2$ **B.** $k<-2;k>\dfrac{1}{2}$ **C.** $\begin{cases}k\neq 0\\ k\neq \dfrac{3}{2}\end{cases}$ **D.** $k\neq -2$; $k>\dfrac{-1}{2}$

7. Cho đường cong $y=\dfrac{x}{x-1}$ cắt đường thẳng $y=-x+m$ tại hai điểm phân biệt với m là:

A. $m<0 \vee m>4$ **B.** $0<m<4$ **C.** $m\in\mathbb{R}$ **D.** $m>0$

8. Hàm số $y=\dfrac{2x^2-2x-2}{x-1}$ (C) và đường thẳng $(d): y=kx+1$ cắt (C) tại hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau thì giá trị k là:

A. $k>1$ **B.** $k<1$ **C.** $k>2$ **D.** $k<2$

9. Cho $(C): y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$; $(d): y=a(x+1)+1$. Giá trị của a để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu:

A. $a<\dfrac{1}{2}$ **B.** $a=\dfrac{1}{2}; a=1$ **C.** $a>1$ **D.** $\dfrac{1}{2}<a<1$

10. Đường thẳng $y=-x+m$ luôn cắt đồ thị $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm P và Q. Để độ dài đoạn PQ ngắn nhất, gía trị thích hợp cho m là:

A. $m=-1$ **B.** $m=1$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=2$.

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. B	2. C	3. C	4. A	5. D	6. C	7. A	8. D	9. D	10. B

1. Dùng phương pháp loại trừ

Trường hợp 1: Thử với k = 3 $\Rightarrow d: y=3x-4$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$-\frac{x^2}{4}-x+2=3x-4 \Leftrightarrow x^2+16x-24=0 \ (*)$$

Ta thấy $\Delta'=64+24=88>0$ => (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ k = 3 thỏa mãn $\Rightarrow$ Loại C, D

Trường hợp 2: k = 0 $\Rightarrow d: y=-1$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$-\frac{x^2}{4}-x+2=-1 \Leftrightarrow x^2+4x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-6\\ x=2\end{array}\right.$$

Vậy k = 0 thỏa mãn. Loại A.

Đáp án: **B.**

2. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Hàm số có 2 cực trị và $y_{CT}.y_{CĐ} < 0$ (*)

Có $y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y_{CT} = 2 - m \\ x = -2 \Rightarrow y_{CĐ} = 6 - m \end{array}\right.$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow (2-m)(6-m) < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 6$

3.

$$y' = 3x^2 + 2ax \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -4 \\ x = \dfrac{-2a}{3} \Rightarrow y = \dfrac{-8a^3}{27} + \dfrac{4a^3}{9} - 4 \end{array}\right.$$

(C_a) chỉ cắt trục hoành tại duy nhất một điểm

$$\Leftrightarrow y_{CT}.y_{CĐ} > 0 \Leftrightarrow \frac{-8a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} - 4 < 0 \Leftrightarrow a < 3$$

Đáp án: **C.**

4. (C) cắt Oy tại A(0 ; 4) $\Rightarrow d : y = kx + 4$

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$(4-x)(1-x)^2 = kx + 4 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + (9+k)x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 6x + 9 + k = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$(*) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow k < 0;\ k \neq 9 \Leftrightarrow k < 0$$

5. Lập bảng biến thiên hàm $y = x^4 + 3x^2 + 5$. (biện luận số nghiệm bằng đồ thị).

Có thể thử giá trị đặc biệt của m ứng với các đáp án để xem có thỏa mãn đề (ở đây ta đưa về phương trình bậc 2 biến t rồi bấm máy tính Casio)

6. Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x-4}{x+2} = kx - 2 \Leftrightarrow kx^2 + (2k-3)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3-2k}{k} \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3-2k}{k} \neq -2 \\ \dfrac{3-2k}{k} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq \dfrac{3}{2} \end{cases}$

7. Tương tự bài tập 6. Đáp án: **A.**

8. Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x^2-2x-2}{x-1}=kx+1 \Leftrightarrow (2-k)x^2+(k-3)x-1=0 \quad (*)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1, x_2 \neq 1$ và $x_1 < 1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-k+k-3-1 \neq 0 \\ (x_1-1)(x_2-1)<0 \\ k \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2-(x_1+x_2)+1<0 \\ k \neq 2 \end{cases} \quad (**)$$

Theo định lí Viét ta có $\begin{cases} x_1x_2=\dfrac{1}{k-2} \\ x_1+x_2=\dfrac{3-k}{2-k} \end{cases}$ thay vào (**) và giải hệ được k < 2

9. Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x^2+3x+3}{x+2}=a(x+1)+1 \Leftrightarrow (a-1)x^2+(3a-2)x+2a-1=0 \quad (*)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$(*) có 2 nghiệm phân biệt trái dấu và khác − 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(3a-2)^2-4(a-1)(2a-1)>0 \\ \dfrac{2a-1}{a-1}<0 \\ f(-2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<a<1$$

Đáp án: **D.**

10.

Cách 1: Ta chứng minh được PQ ngắn nhất thì đường y = − x + m phải đi qua tâm I(− 1;2) lúc đó m = 1. Đáp án: **B.**

Cách 2: Dùng phương pháp thử đáp án ở bài này cũng khá thuận tiện.

Bài 7. GTLN, GTNN của hàm số

I. LÝ THUYẾT

1. Tìm GTLN - GTNN của hàm số trên khoảng (a;b)

Bước 1. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm trên khoảng (a;b), tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2. Lập bảng biến thiên

Bước 3. Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{(a;b)} f(x)$ và $\min\limits_{(a;b)} f(x)$

2. Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ như sau

Bước 1. Tính đạo hàm $f'(x)$

Bước 2. Giải phương trình: $f'(x)=0$, tìm các nghiệm $x_1;x_2;...;x_n \in (a;b)$ (nếu có)

Bước 3. Tính các giá trị : $f(a);f(x_1);f(x_2);...;f(x_n);f(b)$.

Bước 4. Kết luận:

$$\max\limits_{[a;b]} f(x)=M=\max\{f(a);f(x_1);f(x_2);...;f(x_n)\}$$

$$\min\limits_{[a;b]} f(x)=m=\min\{f(a);f(x_1);f(x_2);...;f(x_n)\}$$

Lưu ý:

- Trên khoảng (a;b) thì $\max\limits_{(a;b)} f(x)$ và $\min\limits_{(a;b)} f(x)$ có thể không tồn tại

- Với nhiều bài toán ta có thể đặt ẩn phụ để đưa bài toán về dạng tính toán đơn giản hơn như các bài toán chứa hàm lượng giác (sinx, cosx...), hàm mũ (a^x ...).

Ví dụ 1. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1;3]$ lần lượt là:

A. 5; 4 **B.** 5; $\dfrac{13}{3}$ **C.** 4; $\dfrac{13}{3}$ **D.** 6; $\dfrac{13}{3}$

Hướng dẫn giải

$f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}$ trên $[1;\ 3]$ ta có : $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

$f(1)=5;\ f(2)=4;\ f(3)=\dfrac{13}{3}$.

Vậy $\min\limits_{[1;3]} f(x)=4$; $\max\limits_{[1;3]} f(x)=5$. Đáp án: **A.**

Ví dụ 2. Giá trị lớn nhất $y=\sqrt{x^2+3}-x\ln x$ trên đoạn $\left[1;2\right]$ là:

A. 3 **B.** $\sqrt{7}-\ln 2$ **C.** $\sqrt{7}$ **D.** 2

Hướng dẫn giải

$$y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\ln x-1=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-1\right)-\ln x<0\,\forall x\in[1;2]$$

Suy ra, hàm số đã cho là hàm nghịch biến

nên $\min\limits_{[1;2]} y=y(2)=\sqrt{7}-2\ln 2;\ \max\limits_{[1;2]} y=y(1)=2$

Đáp án: **D.**

Ví dụ 3. Giá trị nào của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $\left[0;1\right]$ bằng -2 là:

A. $m=-1, m=-2$ **B.** $m=-1, m=2$

C. $m=1, m=-2$ **D.** $m=1, m=2$

Hướng dẫn giải

$$f'(x)=\frac{1-m+m^2}{(x+1)^2}>0,\ \forall m.$$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\left[0;1\right]$ với mọi m.

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[0;1]} f(x)=f(0)=-m^2+m$

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -m^2+m=-2 \Leftrightarrow m=-1,\ m=2.$

Cách khác:

Thay $m=-1$ ta có $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0\Rightarrow \min f(x)=f(0)=-2$

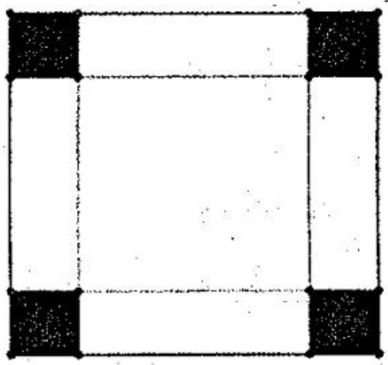
Vậy loại C, D.

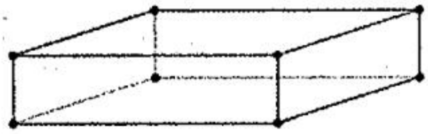
Thay $m=-2$ ta có $f(x)=\dfrac{x-6}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{7}{(x+1)^2}>0$

$\Rightarrow \min f(x)=f(0)=-6$. Vậy loại **A.**

Đáp án: **B.**

Ví dụ 4 *(Câu 10 đề minh họa THPT quốc gia 2017)*. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.





A. x = 6 **B.** x = 3 **C.** x = 2 **D.** x = 4

Hướng dẫn giải

$V = x(12-x)^2; x \in (0;6)$ khảo sát hàm bậc 3 trên (0;3) ta được giá trị lớn nhất của V đạt tại x=2. Đáp án: **C.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x^3 - x^2 - 7x + 1$ trên đoạn $[0;2]$ là:

A. 5 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

2. Tích GTNN và GTLN của hàm số $y = f(x) = -x + 1 - \dfrac{4}{x+2}$ trên đoạn $[-1;2]$ là:

A. -2 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

3. Giá trị nào của m để hàm số $y = (x+m)\sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị lớn nhất là $3\sqrt{3}$

A. -2 **B.** -1 **C.** 1 **D.** 2

4. Giá trị nào của m để hàm số $y = (3-x)\sqrt{1+x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{5}$ trên khoảng $[0;m]$ là:

A. 1 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** 2 **D.** $\sqrt{5}$

5. Tổng bình phương giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[-1;2]$ là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 4

6. Tìm a để GTNN của $f(x)=2x+\frac{a}{x}$ trên khoảng $(0;3)$ bằng $\sqrt{2}$ là:

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{1}{4}$

7. GTLN của $f(x)=2\ln\frac{x}{1-x}-9x$ trên khoảng $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ tại:

A. $x=\frac{1}{3}$ **B.** $x=0$ **C.** $x=\frac{1}{2}$ **D.** $x=\frac{1}{e}$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. D	2. B	3. D	4. C	5. B	6. D	7. A

1. Đáp án: **D.**

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow 9x^2-2x-7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{7}{9}\notin[0;2]\end{array}\right.$; $\begin{cases}f(1)=-4\\f(0)=1\\f(2)=7\end{cases}$

Vậy $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=7$; $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)=-4$

2. Đáp án: **B.**

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow -1+\frac{4}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\notin[-1;2]\\x=0\end{array}\right.$; $\begin{cases}f(-1)=-2\\f(0)=-1\\f(2)=-2\end{cases}$

Vậy $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(0)=-1$; $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=f(-1)=f(2)=-2$

3. Đáp án: **D.** Thử giá trị của m sau đó cho đạo hàm bằng 0 tìm nghiệm rồi sau đó thử nghiệm đó vào y xem có thỏa mãn đề.

Cách khác: Để y= $3\sqrt{3}$ nhẩm thấy có $\sqrt{3}$ nên trong căn có x=1 từ đó nhẩm thấy m=2 thì y= $3\sqrt{3}$.

4. Đáp án: **C.**

Cách 1: Xét phương trình $\sqrt{5}=(3-x)\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow x=2$

Ta có: $y'=0\Leftrightarrow -\sqrt{1+x^2}+\frac{x(3-x)}{\sqrt{1+x^2}}=0\Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$f(1)=2\sqrt{2}; f(0)=3; f(2)=\sqrt{5}; f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5\sqrt{5}}{4}$

Cách 2: Thử thấy x = 2 thì y = $\sqrt{5}$ nên ta chọn C hoặc D. Thử D thì sẽ y xấp xỉ 1,8< $\sqrt{5}$ tại x= $\sqrt{5}$ nên không thể nhận giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{5}$.

5. Đáp án: **B.**

Ta có $y' = \dfrac{1-x}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}$. Ta xét giá trị $y(-1)=0, y(1)=\sqrt{2}, y(2)=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

Từ đó y đạt giá trị lớn nhất là $\sqrt{2}$ (tại $x=1$), đạt giá trị nhỏ nhất là 0 (tại $x=-1$)

Vậy tổng bình phương cần tìm là: 2.

6. Đáp án: **D.**

Cách 1:

Ta có $f(x)=2x+\dfrac{a}{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x^2-a}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ $(x\in(0;3); a>0)$

Do xác định trên khoảng nên nếu tồn tại giá trị lớn nhất, nhỏ nhất thì nó sẽ là ở điểm cực trị. Để GTNN của $f(x)=2x+\dfrac{a}{x}$ trên khoảng $(0;3)$ là $\sqrt{2}$ thì:

$$\begin{cases} 0<\sqrt{\dfrac{a}{2}}<3 \\ \sqrt{2}=2\sqrt{\dfrac{a}{2}}+\dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{a}{2}}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<\sqrt{\dfrac{a}{2}}<3 \\ \sqrt{2}=2\sqrt{2a} \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$$

Cách 2: Dùng phím CALC với ẩn x và a (ở đây sử dụng $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$).

7. Đáp án: **A.**

Cách 1: Dùng CALC bấm các giá trị ở đáp án rồi chọn.

Cách 2: $f(x)=2\ln\dfrac{x}{1-x}-9x$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{x(1-x)}-9=\frac{9x^2-9x+2}{x(1-x)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3}\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right) \\ x=\dfrac{2}{3}\notin\left(0;\dfrac{1}{2}\right) \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên trên $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ ta thấy:

$$\max f(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)=-2\ln 2-3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}.$$

Bài 8. Đồ thị và điểm đặc biệt

1. Điểm đối xứng

a. Hàm số chẵn – lẻ và tính đối xứng

Cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$.

+ Nếu f(x) là hàm số lẻ thì (C) nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
+ Nếu f(x) là hàm số chẵn thì (C) nhận trục tung làm trục đối xứng.

b. Công thức tổng quát về tâm đối xứng

Đồ thị (C) nhận điểm I(a, b) làm tâm đối xứng khi:

$f(a + x) + f(a - x) = 2b$, với mọi x.

c. Công thức tổng quát về trục đối xứng

Đồ thị (C) nhận đường thẳng x = a làm trục đối xứng khi:

$f(a + x) = f(a - x)$, với mọi x.

Một số lưu ý về điểm đối xứng của một số hàm hay gặp:

+ Hàm bậc ba: Tâm đối xứng của đồ thị hàm số chính là điểm uốn.
+ Hàm phân thức có dạng $\frac{ax+b}{cx+d}$; $\frac{ax^2+bx+c}{px+q}$. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là giao điểm hai đường tiệm cận.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{-x^3}{m^2} + 3m^4x^2 - 2m^2, C_m$ với $m = 1$, $m = -1$ thì tâm đối xứng của C_m lần lượt là:

A. (1;0) và (1;0) | **B.** (1;0) và (-1;2)
C. (-1;2) và (0;1) | **D.** (-1;2) và (1;0)

Hướng dẫn giải

Với $m = 1$, $m = -1$ có $y = -x^3 + 3x^2 - 2$; $y' = -3x^2 + 6x; y'' = -6x + 6$

$y'' = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Có $y(1) = 0$.

Vậy tâm đối xứng của C_m trong 2 trường hợp đều là (1; 0).

Đáp án: **A.**

2. Điểm cố định

a. Tìm điểm cố định của họ đồ thị

Cho họ đồ thị (C_m) có phương trình $y = f(x;\ m)$ với m là tham số.

Tìm điểm cố định mà mọi đồ thị (C_m) đều phải đi qua.

Phương pháp giải

– Biến đổi phương trình y = f(x; m) ra dạng một đa thức theo biến m như sau :

$A(x; y).m^2 + B(x; y).m + C(x; y) = 0$ (tùy thuộc vào bậc của m).

– Giải hệ $\begin{cases} A(x;\ y)=0 \\ B(x;\ y)=0 \\ C(x;\ y)=0 \end{cases}$ để tìm tọa độ điểm cố định của họ đồ thị.

b. Tìm điểm M mà có đúng 0, 1, 2, ... đồ thị (C_m) đi qua

Phương pháp giải

– Biến đổi phương trình y = f(x; m) ra thành một phương trình mà m là ẩn số.

– Để có đúng một (hai, ba,...) đồ thị (C_m) đi qua điểm $M\left(x_0;\ y_0\right)$ thì phương trình $y_0 = f\left(x_0;\ m\right)$ có đúng một (hai, ba,...) nghiệm (ở đây m là nghiệm số).

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = x^3 + (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 2$ (C_m) m là tham số. Điểm cố định mà đồ thị luôn đi qua là:

A. $M(1;4)$ **B.** $M(-1;-4)$ **C.** $M(-1;4)$ **D.** $M(1,-4)$

Hướng dẫn giải

Xét phương trình

$x^3 + (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 2 - y = 0 \Leftrightarrow m(x^2-2x+1) + x^3 - x^2 - 2x - y - 2 = 0$

Phương trình nghiệm đúng mọi m khi:

$$\begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ x^3-x^2-2x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$$

Vậy (Cm) luôn đi qua điểm cố định $M(1,-4)$.

Cách khác: Lấy 2 giá trị m bất kì như m = 0, m = 1 khi đó ta được 2 đồ thị hàm số (C_1,C_2)

Nếu tọa độ M nào trong 4 phương án đều thuộc C_1, C_2 thì đó là đáp án.

3. Điểm có tọa độ nguyên

Những dạng toán này thường đối với các hàm hữu tỉ

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1}; y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Cách giải thông thường:

Ta biến đổi dạng $y=q(x)+\frac{A}{a'x+b'}$ trong đó q(x) là một đa thức.

Khi đó để $y\in\mathbb{Z}$ thì $a'x+b'\in$ Ư(A)

- Tìm tất cả các Ư(A)
- Tìm tất cả các giá trị $x\in\mathbb{Z}$ sao $a'x+b'\in$ Ư(A)

Cách giải nhanh: đối với các dạng toán trắc nghiệm thì khi đã biết các đáp án thì chỉ cần thay ngược lại các đáp án vào hàm số đã cho xem có thỏa mãn hay không.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\frac{x^2-5x+5}{x-3}$. Tìm điểm trên đồ thị sao cho tọa độ các điểm đó là các số nguyên. Điểm đó là:

A. (4;1) và (2;1) **B.** (-4;0) và (-2;1)

C. (4;3) và (2;-1) **D.** (-4;0) và (-2;0)

Hướng dẫn giải

Ta sẽ thay hoành độ các điểm trong các đáp án để tìm kết quả.

Lần lượt thay:

$$x_0=4\to y_0=1;x_0=2\to y_0=1;x_0=-4\to y_0=-\frac{41}{7};x_0=-2\to y_0=-\frac{19}{5}.$$

Đáp án: **A.**

4. Điểm đặc biệt liên quan đến tiệm cận của đồ thị hàm số

a. Một số kết quả quan trọng về đồ thị của hàm nhất biến $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (C)

1. (C) nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
2. (C) nhận hai đường phân giác của các cặp góc tạo bởi hai đường tiệm cận làm trục đối xứng.
3. Tiếp tuyến của (C) tại một điểm M bất kì cắt hai tiệm cận lần lượt là A và B tạo thành một tam giác có diện tích không phụ thuộc vào vị trí của M, ngoài ra M là trung điểm đoạn AB.
4. Nếu đường thẳng y=kx+m ($k\neq 0$) cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B và cắt hai đường tiệm cận tại M và N thì hai đoạn AB, MN có cùng trung điểm.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hàm số $y=x^3-x^2-x$ Xác định cặp điểm thuộc đồ thị hàm số và đối xứng nhau qua trục Oy:

A. (0,0) và (1,0) **B.** (1,−1) và (−1, −1)

C. (−1,1) và (1,1) **D.** (2,0) và (−2,0)

2. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 9x + 2$ Xác định m để đồ thị hàm số có đúng một cặp điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ O(0;0) là:

A. $m < 0$ **B.** $m > 0$ **C.** $m > -4$ **D.** $m < -4$

3. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Cặp điểm trên đồ thị hàm số đối xứng nhau qua đường phân giác thứ hai là:

A. (1,-1) và (-1,1) **B.** (1,0) và (0,1) **C.** (1,0) và (0,-1) **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn: Không tồn tại cặp điểm thỏa mãn

4. Cho hàm số $y = (1-2m)x^4 + 3mx^2 + (m+1)$ Số điểm cố định mà đồ thị luôn đi qua là:

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

5. Cho hàm số $y = (m+3)x^3 - 3(m+3)x^2 - (6m+1)x + m + 1$ (H)

Tìm kết luận đúng :

A. (H) luôn đi qua đúng 2 điểm cố định $\forall m \in \mathbb{R}$

B. (H) luôn đi qua đúng 3 điểm cố định và ba điểm đó thẳng hàng với nhau $\forall m \in \mathbb{R}$

C. (H) không đi qua điểm cố định nào $\forall m \in \mathbb{R}$

D. (H) đi qua đúng một điểm cố đinh $\forall m \in \mathbb{R}$

6. Cho hàm số $y = x^3 + (m + |m|)x^2 - 4x - 4(m + |m|)$, $\forall m \in \mathbb{R}$, đồ thị luôn đi qua điểm cố định:

A. (0,0) và (2,0) **B.** (2,0) và $(-2,2)$

C. $(-2,0)$ và (2,0) **D.** $(2,-2)$ và $(-2,-2)$

7. Cho hàm số $y = \frac{mx+a}{bx+m-1}, (H_m)$. Giá trị của a, b để (H_m) luôn đi qua hai điểm cố định $(-1;-1);(2;2)$ là:

A. a = 2, b = 1 **B.** a = 1, b = 2 **C.** a = −2, b = −1 **D.** a= −1, b= −2

8. Cho hàm số $y = \frac{mx+a}{bx+m-1}, (b \neq 0)$. Điều kiện của a, b để đồ thị hàm số có một điểm cố định duy nhất là:

A. $a+b=1$ **B.** $ab=-4$ **C.** $a+b=-4$ **B.** $ab=-\frac{1}{4}$

9. Cho hàm số $y = x^3 + (m-2)x^2 - 2mx + m\ (C_m)$. Mệnh đề đúng là:

A. (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = x$ tại điểm $A(-1;-1)$

B. (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = -x$ tại điểm $B(-1,1)$

C. (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = x$ tại điểm $C(1,1)$

D. (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = -x$ tại điểm $D(1,-1)$

10. Số điểm cố định mà họ đường cong $y = (1-2m)x^2 - (3m-1)x + 5m - 2(2)$ luôn đi qua với mọi m là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

11. Các giá trị của a để đồ thị hàm số $y = x^4 - mx^2 + 3$ có cực đại là:

A. $m \le 0$ **B.** $-1 < m < 1$ **C.** $m > 0$ **D.** $m \le -1$

12. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}(C)$. Tìm $M \in (C)$ sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất. Tọa độ điểm M là:

A. $(\sqrt{2}-1; 1-\sqrt{2})$ **C.** $(1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$

B. $(1-\sqrt{2}, \sqrt{2}+1)$ **D.** $(-1-\sqrt{2}; -1-\sqrt{2})$

13. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Mệnh đề sai là:

A. Đồ thị hàm số luôn luôn có tâm đối xứng

B. Đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành

C. Hàm số luôn luôn có cực trị

D. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

14. Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 1$ có đồ thị (C).

Các mệnh đề sau, mệnh đề đúng là

A. Hàm số có 3 điểm cực trị **B.** (C) có một trục đối xứng

C. (C) có 2 điểm uốn **D.** (C) có một tâm đối xứng

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. B	**2. A**	**3. D**	**4. A**	**5. B**	**6. C**	**7. A**	**8. B**	**9. D**	**10. B**
11. C	**12. A**	**13. C**	**14. B**						

1. Đáp án: **B.** Hai điểm đối xứng qua Oy có dạng M(x;y) và M'(−x;y).

2. Đáp án: **A.** Hai điểm đối xứng qua O có dạng M(x;y) và M'(−x; −y).

3. Đáp án: **D.** Hai điểm đối xứng qua phân giác thứ 2 có dạng M(x;y) và M'(−y;-x). Qua phân giác thứ nhất có dạng M(x;y) và M'(y;x)

4. Đáp án: **A.**

Xét phương trình: $(1-2m)x^4+3mx^2+m+1-y=0$

$$\Leftrightarrow (1+3x^2-2x^4)m+x^4+1-y=0$$

Phương trình đúng với mọi m khi $\begin{cases}1+3x^2-2x^4=0\\ x^4+1-y=0\end{cases}$

Hệ trên có 2 nghiệm nên sẽ có 2 điểm cố định mà đồ thị luôn đi qua.

5. Đáp án: **B.**

Xét phương trình: $(m+3)x^3-3(m+3)x^2-(6m+1)x+m+1-y=0$

$$\Leftrightarrow (x^3-3x^2-6x+1)m+3x^3-9x^2-6x+1-y=0$$

Phương trình đúng với mọi m khi $\begin{cases}x^3-3x^2-6x+1=0\\ 3x^3-9x^2-6x+1-y=0\end{cases}$

Hệ trên có 3 nghiệm nên sẽ có 3 điểm cố định mà đồ thị luôn đi qua.

6. Đáp án: **C.**

Làm tổng quát giống câu 9 hoặc

Chọn $m=1$ có $y=x^3+2x^2-4x-4$ (C). Ta thấy rằng điểm $(0;0),(-2,2),(2;-2)$ không thuộc đồ thị hàm số (C).

7. Đáp án: **A.**

$y=\dfrac{mx+a}{bx+m-1}$

$\Leftrightarrow bxy+my-y-mx-a=0$

$\Leftrightarrow m(y-x)+bxy-y-a=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=x\\ bxy-y-a=0(1)\end{cases}$

Thay tọa độ hai điểm (-1;1) và (2;2) vào phương trình (1) được hệ giải ra a và b.

8. Đáp án: **D.**

$$y=\frac{mx+a}{bx+m-1}\Leftrightarrow bxy+my-y-mx-a=0\Leftrightarrow m(y-x)+bxy-y-a=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=x\\ bxy-y-a=0\end{cases}\Rightarrow by^2-y-a=0;\Delta=1+4ab=0\Leftrightarrow ab=-\frac{1}{4}$$

9. Đáp án: **D.** Thay tọa độ điểm tìm m rồi dùng Casio xét tiếp tuyến.

10. Đáp án: **B.**

$$(2) \Leftrightarrow (-2x^2-3x+5)m+(x^2+x-2-y)=0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(-2x^2-3x+5)=0\\(x^2+x-2-y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{-5}{2}\\y=\dfrac{7}{4}\end{cases}\end{array}\right.$$

11. Đáp án: **C.** Do a = 1>0 nên để hàm số có cực đại thì 1.(-m)<0 nên $m>0$

$y'=4x^3-2mx; y''=12x^2-2m; y''=0 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{m}{6}(1)$

Để hàm số có 2 điểm uốn thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$

12. Đáp án: **A.** Thử M vào hàm số, tính tổng khoảng cách từ các điểm thỏa mãn đến hai trục rồi lấy kết quả nhỏ nhất.

13. Đáp án: **C.**

Hàm bậc 3 có thể không có cực trị, ví dụ: $y=-x^3+3x^2-4x+2$

14. Đáp án: **B.**

Đồ thị hàm trùng phương nhận 0y làm trục đối xứng .

CHƯƠNG III. TƯ DUY GIẢI NHANH PHẦN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bài 1. Các vấn đề về góc

I. LÝ THUYẾT

1. Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau

Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là góc $\alpha\,(0^0 \le \alpha \le 90^0)$ tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau lần lượt cùng phương với a và b.

Để xác định góc ta có 2 cách thường dùng sau:

Cách 1: $\widehat{(a;b)} = \widehat{(a';b')}$ trong đó a', b' là hai đường thẳng cắt nhau và lần lượt song song với a và b. Tức là, chọn ra hai đường thẳng cắt nhau và lần lượt song song với a và b.

Cách 2: $\widehat{(a;b)} = \widehat{(a;b')}$ trong đó b' là đường thẳng cắt đường thẳng cắt a và song song với b. Tức là chọn trên a (hoặc b) một điểm A rồi từ đó chọn một đường thẳng qua A và song song với b (hoặc a).

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = a\sqrt{3}, SA \perp BC$. Góc giữa hai đường thẳng SD và BC là:

A. 60^0 **B.** 30^0 **C.** 45^0 **D.** 90^0

Hướng dẫn giải

Ta có: $\begin{cases} BC // AD \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{SAD} = 90^o$

Do đó: $\widehat{(SD, BC)} = \widehat{(SD, AD)} = \widehat{SDA}$

Xét tam giác vuông SAD vuông tại A ta có:

$\tan \widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^0$

Vậy góc giữa hai đường thẳng SD và BC bằng 60^0.

Đáp án: **A.**

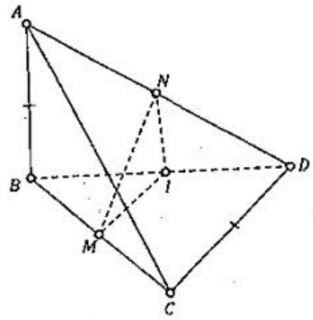
Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD, $MN = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD là:

A. 60^0 **B.** 30^0 **C.** 45^0 **D.** 90^0

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của BD.

Ta có $\left.\begin{matrix} IN//AB \\ IM//CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow (\widehat{AB,CD}) = (\widehat{IM,IN})$



Xét tam giác IMN có IM = IN = a, MN = $a\sqrt{3}$

Do đó, $\cos\widehat{MIN} = \dfrac{2a^2 - 3a^2}{2a^2} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \widehat{MIN} = 120^o$

Vậy $(\widehat{AB,CD}) = 180^0 - 120^0 = 60^0$.

Đáp án: **A.**

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cách xác định góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P):

+ Tìm $I = d \cap (P)$

+ Tìm A thuộc d, kẻ AH vuông góc với (P)

+ $(\widehat{d,(P)}) = \widehat{AIH}$

Ngoài ra, góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) cũng chính là góc giữa hai đường thẳng a' và b' trong đó a' cùng phương với a, b' cùng phương với hình chiếu của a lên mặt phẳng (P).

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp (ABCD)$, đáy ABCD là hình vuông cạnh a; $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa SD và mặt phẳng (SAC) là:

A. $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{14}}$ **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{14}}$

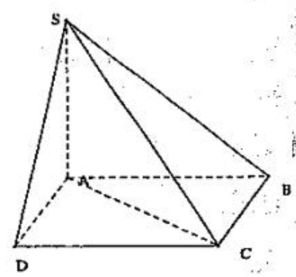
Hướng dẫn giải

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp OD$

$\Rightarrow$ SO là hình chiếu của SD trên mặt phẳng (SAC).

$\Rightarrow$ góc giữa SD và mặt phẳng (SAC) là góc hợp bởi SD và SO.

DO = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$, SD = $\sqrt{7}a$



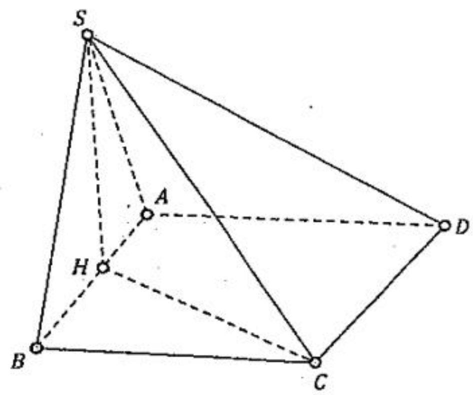
$\Rightarrow \sin\widehat{DSO} = \dfrac{DO}{SD} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{7}a} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$. Đáp án: **B.**

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $(SAB) \perp (ABCD)$, H là trung điểm của AB, SH = HC, SA = AB, tan góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$, SA = AB = a.



Cách 1. $SH = HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vì $SA^2 + AH^2 = \frac{5a^2}{4} = SH^2$

nên tam giác SAH vuông tại A hay $SA \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ do đó $SA \perp (ABCD)$

và AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (ABCD).

+ Ta có $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCA}$, tan $\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) có tan bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cách 2. Cho a = 1 và tính trực tiếp trên hình (không trình bày ra giấy quá nhiều). Có thể dùng phương pháp tọa độ hóa để giải quyết bài toán theo công thức.

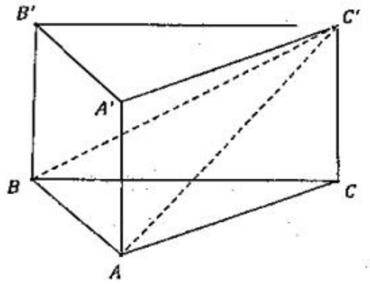
Đáp án: **D.**

Ví dụ 3. Cho lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60°$, biết AC' = 3a. Góc hợp bởi BC' với (AA'CC') là:

A. 45° **B.** 90° **C.** 30° **D.** 60°

Hướng dẫn giải

Tính góc hợp bởi BC' với $(AA'C'C)$.



$\left.\begin{matrix} BA \perp AA' \\ BA \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BA \perp (AA'C'C)$

AC' là hình chiếu của BC' lên $(AA'C'C)$

$\widehat{BC'A}$ là góc tạo bởi BC' với $(AA'C'C)$

$\tan \widehat{BC'A} = \dfrac{AB}{AC'} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{BC'A} = 30^o$. Đáp án: **C.**

3. Góc giữa hai mặt phẳng

+ Góc giữa hai mặt phẳng được xác định bằng số đo góc giữa hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng và **vuông góc với giao tuyến** hoặc góc giữa hai đường thẳng lần lượt *vuông góc với hai mặt phẳng*.

+ Cách xác định:

- *Tìm giao tuyến* $(P) \cap (Q) = \Delta$

- *Trong mặt phẳng (P) tìm a vuông góc với Δ, trong mặt phẳng (Q) tìm b vuông góc với Δ và a, b cắt nhau tại I.* $\widehat{((P),(Q))} = \widehat{(a,b)}$

+ Trong trường hợp xác định góc gặp khó khăn ta có thể sử dụng công thức diện tích hình chiếu: $S' = S.\cos\alpha$

Lưu ý: Ta có thể tính góc trực tiếp bằng cách sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông hoặc định lý côsin trong tam giác.

Định lý hàm số côsin trong tam giác ABC $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khi đó số đo của góc giữa $(BA'C)$ và $(CA'D)$ là:

A. 90^0 **B.** 45^o **C.** 60^o **D.** 30^o

Hướng dẫn giải

+ Kẻ $BH \perp A'C$, $(H \in A'C)$ (1)

+ Mặt khác, ta có $BD \perp AC$ (gt), $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AA' \perp BD$

$\Rightarrow BD \perp (ACA') \Rightarrow BD \perp A'C\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A'C \perp (BDH) \Rightarrow A'C \perp DH$.

Do đó $(\widehat{(BA'C),(DA'C)}) = (\widehat{HB,HD})$.

+ Xét tam giác vuông BCA′ có:

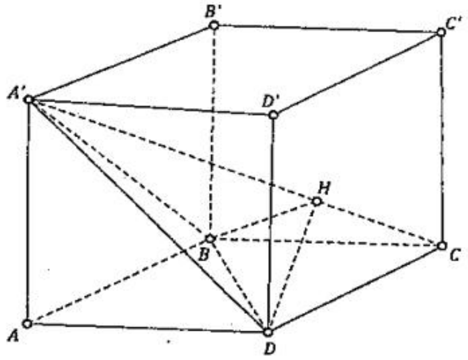
$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BA'^2} = \frac{3}{2a^2}$$

$$\Rightarrow BH = a.\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow DH = a.\sqrt{\frac{2}{3}}$$

+ Ta có

$$\cos\widehat{BHD} = \frac{2BH^2 - BD^2}{2BH^2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \widehat{BHD} = 120^o.$$

Vậy $(\widehat{(BA'C),(DA'C)}) = 60^o$.

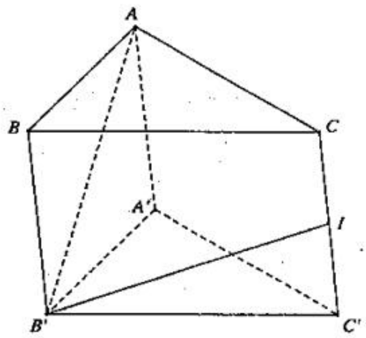


Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^o$, $BB' = a$, I là trung điểm của CC′, côsin của góc giữa hai mặt (ABC) và $(AB'I)$ là:

A. $\sqrt{\frac{1}{10}}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\sqrt{\frac{3}{10}}$ **D.** $\sqrt{\frac{3}{5}}$

Hướng dẫn giải

+ Ta thấy tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác AB′I lên mặt phẳng (ABC). Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.



Theo công thức hình chiếu ta có $\cos\varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{AB'I}}$.

+ Ta có : $S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin 120^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = a\sqrt{2}$,

$IB' = \sqrt{B'C'^2 + IC'^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Tam giác AB'I vuông tại A nên $S_{AB'I} = \frac{1}{2}.AB'.AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

Vậy $\cos\varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{AB'I}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng:

A. 60^0 **B.** 30^0 **C.** 45^0 **D.** 90^0

2. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng a. Một mặt nón có SA, SB, SC là những đường sinh thì góc ở đỉnh của mặt nón có giá trị bằng:

A. 90^o **B.** 120^o **C.** 60^o **D.** 135^o

3. Cho tứ diện ABCD, I, J, H, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, AD, BD. Trong trường hợp IJHK là hình thoi có đường chéo IH = $\sqrt{3}$ IJ, góc giữa đường thẳng AB, CD là:

A. 60^0 **B.** 30^0 **C.** 45^0 **D.** 90^0

4. Cho tứ diện ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Khi đó côsin góc giữa CD và AG là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. Cho tứ diện ABCD, gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD và AC. Cho AB = 2a, CD = $2a\sqrt{2}$, MN = $a\sqrt{5}$. Góc giữa AB và CD bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

6. Cho tứ diện ABCD có AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c, côsin của góc hợp bởi các đường thẳng AC và BD là:

A. $\cos(AC,BD) = \frac{|c^2+a^2|}{b^2}$ **B.** $\cos(AC,BD) = \frac{|c^2-a^2|}{a^2}$

C. $\cos(AC,BD) = \frac{|c^2-a^2|}{c}$ **D.** $\cos(AC,BD) = \frac{|c^2-a^2|}{b^2}$

7. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng a. Hình nón ngoại tiếp hình chóp có góc ở đỉnh bằng:

A. 90° **B.** 60° **C.** 120° **D.** 135°

8. Cho hình chóp đều S.ABC có ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc và một hình nón ngoại tiếp hình chóp đó. Nếu gọi α là góc ở đỉnh của hình nón thì:

A. $\cos\alpha = \frac{-1}{3}$ **B.** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ **C.** $\alpha = 125^\circ$ **D.** $\alpha = 135^\circ$

9. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có tất cả các cạnh đều bằng a và các góc $\widehat{BAD}, \widehat{BAA_1}, \widehat{A_1AD}$ bằng 60°. Góc giữa BD và CD_1 là:

A. 60° **B.** 120° **C.** 45° **D.** 90°

10. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Góc giữa AC_1 và đường cao AH của mặt bên (ABC) là:

A. 45° **B.** 90° **C.** 30° **D.** 60°

11. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M là trung điểm AA', côsin của góc α giữa BM và AD' là:

A. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{10}}$ **B.** $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

C. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ **D.** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

12. Cho hình lăng trụ đều ABCD.A'B'C'D', $AC' = a$, góc giữa AC' và (ABCD) là 30^0. Độ dài cạnh đáy hình lăng trụ bằng:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $2a\sqrt{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **D.** $\frac{a}{3}$

13. Cho hình chóp S.EFK có ΔEFK cân tại F; $SE \perp (EFK)$ và $SE = a\sqrt{3}$, FE = FK = a. Góc giữa SF và (EFK) bằng:

A. 45^0 **B.** 30^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

14. Cho hình chóp S.IJKL có đáy là hình vuông tâm O, $SI \perp (IJKL)$, góc giữa SK và (SJL) là:

A. $\widehat{SKI}$ **B.** $\widehat{SOK}$ **C.** $\widehat{KSO}$ **D.** $\widehat{KSI}$

15. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và D'C'. Góc giữa hai đường thẳng DA và IJ bằng:

A. 60^0 **B.** 30^0 **C.** 90^0 **D.** 45^0

16. Cho hình tứ diện đều ABCD cạnh a. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng:

A. 60^0 **B.** 30^0 **C.** 90^0 **D.** 45^0

17. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC đều cạnh a, cạnh $AA' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Hình chiếu của A' trên (ABC) là trung điểm I của BC.

Góc giữa AA' và (ABC) bằng:

A. 60^0 **B.** 30^0 **C.** 90^0 **D.** 45^0

18. Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa đáy lục giác đều với AB = BC = CD = a, AD = 2a, SA $\perp$ (ABCD) và SA = a. Góc giữa SB và (ABCD) bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 90^0 **D.** 75^0

19. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm tam giác ABC. Biết SO = 2a. Góc giữa SA và (ABCD) bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

20. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $2a$. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

21. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, $CD = 2a$, $AB = AD = 2a$, SD vuông góc với đáy và SB tạo với đáy một góc α, tan của góc φ giữa SA và đáy theo α có giá trị là:

A. $\tan\varphi = \sqrt{2}\ \tan\alpha$ **B.** $\tan\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \tan\alpha$

C. $\tan\varphi = \sqrt{2}\ \sin\alpha$ **D.** $\tan\varphi = \sqrt{2}\ \cos\alpha$

22. Cho hình chóp S.ABC có đáy (ABC) là tam giác vuông cân tại B $AB = a, SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Góc α giữa SB và mặt (SAC) có giá trị là:

A. 90^o **B.** 45° **C.** 60° **D.** 30°

23. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA = SB = SC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Góc α giữa SA và mặt (ABC) bằng:

A. 90° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 30°

24. Cho tứ diện S.IMN có $SI \perp (IMN)$ và ΔIMN đều. Góc giữa hai mặt phẳng (SIM) và (SIN) là:

A. 60^0 **B.** 90^0 **C.** 30^0 **D.** 45^0

25. Cho hình chóp S.MNPQ có $SM \perp (MNPQ)$ và MNPQ là hình vuông cạnh 3a, $SM = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SNP) và (SMQ) là:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 90^0

26. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng 2a, chiều cao bằng a. Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng:

A. 30^0 **B.** 45^0 **C.** 60^0 **D.** 75^0

27. Cho hình lăng trụ đều ABCD.A'B'C'D' cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Góc giữa (A'BD) và (ABCD) bằng :

A. 30^o **B.** 45^o **C.** 60^o **D.** 75^o

28. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng (α) tạo với (ABC) một góc 30^0 và cắt tất cả các cạnh bên tại M,N, P. Khi đó diện tích tam giác MNP bằng:

A. $\frac{a^2}{2}$ **B.** a^2 **C.** $\frac{2a^2}{3}$ **D.** $2a^2$

29. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình chữ nhật. $AB = a$ $BC = 2a$. Mặt phẳng (α) tạo với (ABCD) một góc 60^0 và cắt tất cả các cạnh bên. Diện tích thiết diện của (α) và lăng trụ bằng:

A. a^2 **B.** $2a^2$ **C.** $3a^2$ **D.** $4a^2$

30. Cho tứ diện đều ABCD. Gọi α là góc giữa (ABC) và (ABD). Giá trị $\cos\alpha$ là:

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{2}{5}$

31. Cho tứ diện S.ABCD có $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC đều. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Mặt phẳng (α) qua MN cắt SA tại P. Diện tích ΔMNP bằng $4a^2$. Biết góc giữa (α) và (ABC) là 60^0. Diện tích ΔABC bằng:

A. $2a^2$ **B.** $4a^2$ **C.** $6a^2$ **D.** $8a^2$

32. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật có AB = a, AD = $a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt (ABCD) và SA=a. Góc α giữa (SCD) và (ABCD) có giá trị là:

A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $30°$

33. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đáy ABCD có AB = 4, BC = 3. Mặt phẳng (ACD_1) tạo với đáy một góc $60°$. Chiều cao của hình hộp chữ nhật bằng:

A. $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ **B.** $\frac{12\sqrt{3}}{5}$ **C.** $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

34. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$, ABC là tam giác vuông tại C, AB = a, góc B bằng $30°$. Mặt phẳng (C_1AB) tạo với mặt đáy (ABC) góc $45°$. Chiều cao của lăng trụ bằng:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

35. Cho hình hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{A}$ bằng $30°$, cạnh AA_1 bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc α giữa (ADC_1B_1) và (ABCD) bằng:

A. 30^0 **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $90°$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

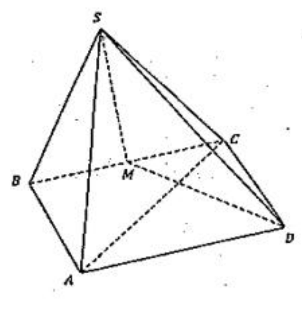
1. A	**2. C**	**3. A**	**4. A**	**5. B**	**6. D**	**7. A**	**8. A**	**9. A**	**10. D**
11. D	**12. C**	**13. C**	**14. C**	**15. D**	**16. C**	**17. D**	**18. B**	**19. B**	**20. C**
21. A	**22. C**	**23. C**	**24. A**	**25. C**	**26. B**	**27. C**	**28. A**	**29. D**	**30. A**
31. D	**32. D**	**33. D**	**34. D**	**35. C**					

1.

Ta có :

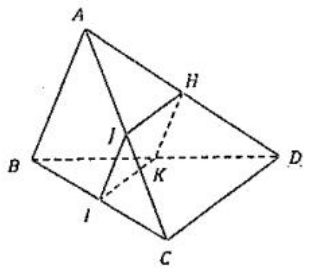
$MD = \frac{a}{\sqrt{2}}; SH = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow SD = a \Rightarrow \widehat{SCD} = 60^0$



2. $CA = a\frac{\sqrt{3}}{3}$, $SO = a \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^0$, suy ra góc gở đỉnh bằng 60^0

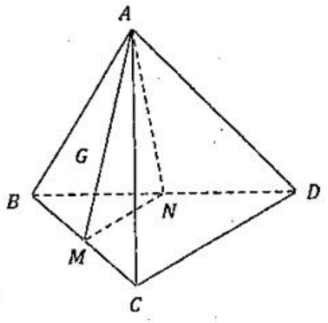
3. Ta có $\left(\widehat{\overline{AB},\overline{CD}}\right) = \left(\widehat{\overline{IK},\overline{HK}}\right)$ mà $\widehat{IHK} = 120^0 \Rightarrow \left(\widehat{\overline{AB},\overline{CD}}\right) = \left(\widehat{\overline{IK},\overline{HK}}\right) = 60^0$



4.

$\cos\left(\widehat{\overline{CD},\overline{AG}}\right) = \cos\left(\widehat{\overline{AM},\overline{MN}}\right) = \cos\widehat{AMN}$

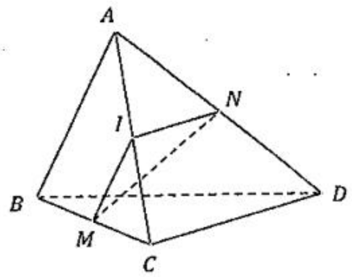
$= \frac{a}{4} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$



5.

$\cos\widehat{MIN} = \frac{a^2 + 2a^2 - 5a^2}{2a^2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \widehat{MIN} = 135^0 \Rightarrow \left(\widehat{\overline{AB},\overline{CD}}\right) = 45^0$



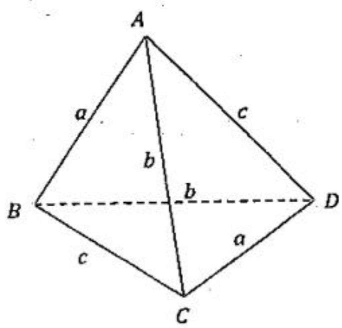
6.

$\overrightarrow{AC}.BD = \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = c^2 - a^2$

$\Rightarrow b.b.\cos\left(\widehat{AC,BD}\right) = \left|c^2 - a^2\right|$

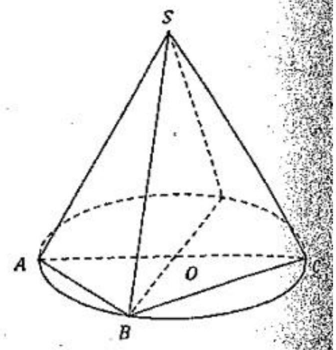
$\Rightarrow \cos\left(\widehat{AC,BD}\right) = \frac{\left|c^2 - a^2\right|}{b^2}$



7. Có $SA = SC = a, AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{ASC} = 90^0$.

Vậy góc ở đỉnh bằng 90^0.

8.



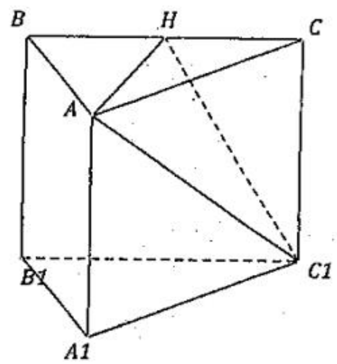
Do hình nón nội tiếp có đáy là ABC nên ta có $SA = SB = SC$

$\alpha = \widehat{SCD}, OD = R = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow BD = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}$

$$\cos\alpha = \frac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2SB.SD} = \frac{2a^2 + 2a^2 - \left(\dfrac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2}{2.2.a^2}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

9.

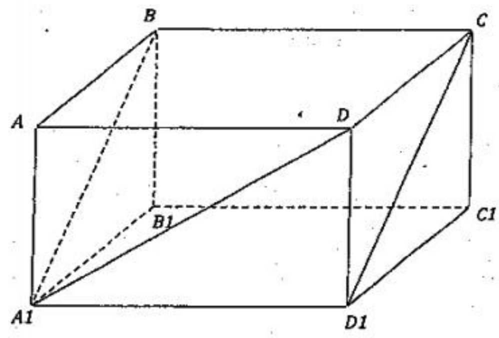


Có $\left(\widehat{BD, CD_1}\right) = \left(\widehat{BD, BA_1}\right)$.

Có tam giác BA_1D đều $\left(\widehat{BD, BA_1}\right) = 60^0$

$\left(\Delta BAA_1 = \Delta A_1AD = \Delta DAB\right)$

10.



$AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, HC_1 = \dfrac{3a}{2}, AC_1 = a\sqrt{3}$

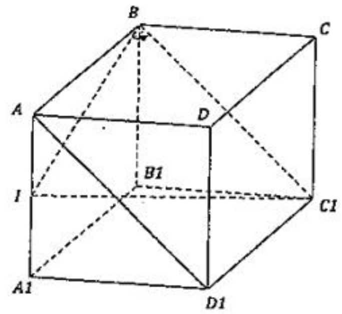
$\Rightarrow AH^2 + HC_1{}^2 = AC_1{}^2$

$\Rightarrow \Delta AHC_1$ vuông tại H

$\cos\widehat{HAC_1} = \dfrac{AH}{AC_1} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{HAC_1} = 60^0$.

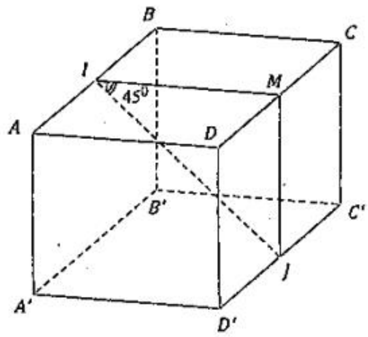
11.



$$BC_1 = \sqrt{2},\ BM = \frac{\sqrt{5}}{2},\ C_1M = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{BC_1^{\,2} + BM^2 - C_1M^2}{2.BC_1.BM} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

12. $A'C' = a\sqrt{3} \Rightarrow A'D' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



13. $\left(\widehat{SF,(EFK)}\right) = \widehat{SFE} = 60^0$

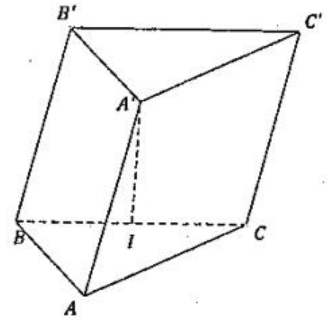
14. $\left(\widehat{SK,(SJL)}\right) = \widehat{KSO}$

15.

16. Áp dụng bài 6 ta có

$$\cos\left(\widehat{AB,CD}\right) = \frac{\left|a^2 - a^2\right|}{a^2} = 0$$

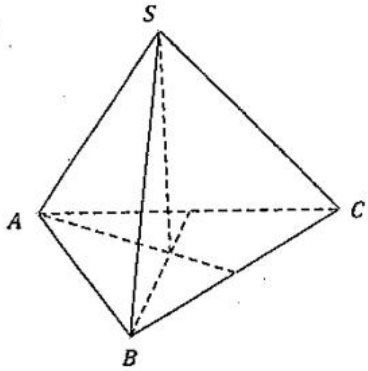
$$\Rightarrow \left(\widehat{AB,CD}\right) = 90^0$$



17. $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2};$

$$\left(\widehat{AA',(ABC)}\right) = \widehat{A'AI} = 45^0$$

18. $\left(\widehat{SB,(ABCD)}\right) = \widehat{SBA} = 45^0$.

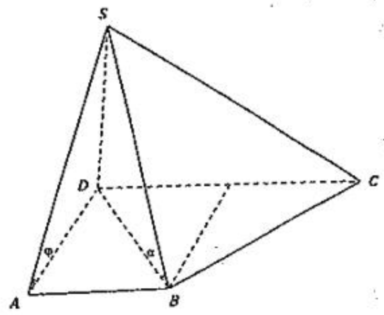


19. $OA = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2a$

$$\Rightarrow \left(\widehat{SA,(ABCD)}\right) = \widehat{SAO} = 45^0$$

20. $\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = 60^0$

21. $\tan\varphi = \dfrac{SD}{AD} = \dfrac{SD}{a}$



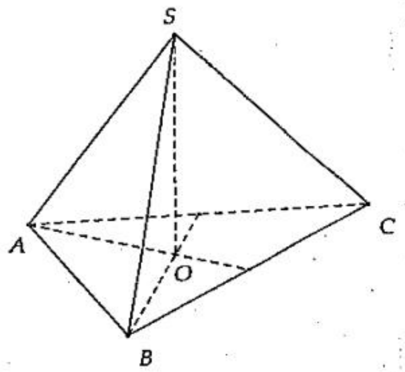
$\tan\alpha = \dfrac{SD}{BD} = \dfrac{SD}{a\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \tan\varphi = \sqrt{2}\tan\alpha$

22. $SB = a\sqrt{2}, BM = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{BM}{SB} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha = 60^0$



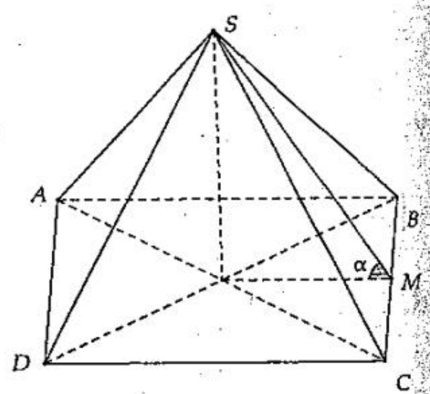
23.

$OA = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{3}} : \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0$

24. $\widehat{(SIM),(SIN)} = \widehat{NIM} = 60^0$

25. $\tan\widehat{NSM} = \dfrac{MN}{SM} = \dfrac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{NSM} = 60^0$

$\widehat{(SNP),(SMQ)} = \widehat{NSM} = 60^0$



26. Có $SO = a$, $OM = a \Rightarrow \Delta ABC$ vuông cân

tại $O \Rightarrow \alpha = 45^0$

27.

$\widehat{(A'BD),(ABCD)} = \widehat{AOA'}$

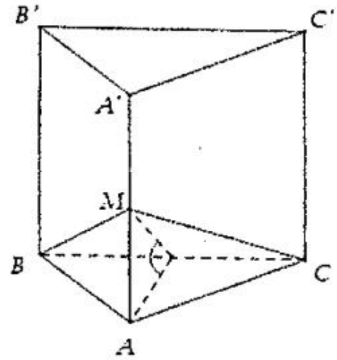
$\Rightarrow \tan\widehat{AOA'} = \dfrac{AA'}{OA}$

$= \dfrac{a\sqrt{6}}{2} : \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{AOA'} = 60^0$

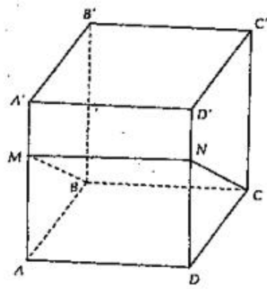
28.

Lấy trường hợp đặc biệt mặt phẳng (α) qua B, C.



$$S_{MNP} = S_{MBC} = \frac{S_{ABC}}{\cos 30^0} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{a^2}{2}$$

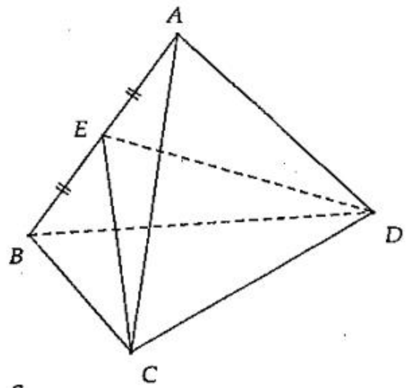
29.



$$NC = \frac{a}{\cos 60^0} = 2a$$

$$\Rightarrow S_{BMNC} = 2a.2a = 4a^2$$

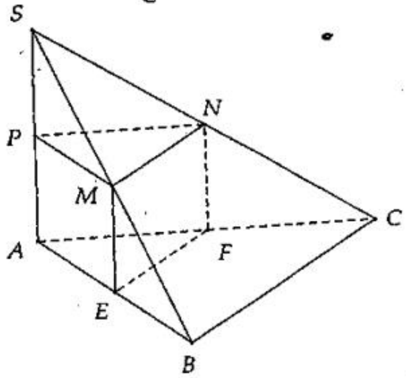
30.



$$\alpha = \widehat{((ABC),(ABD))} = \widehat{DEC}$$

$$\cos\alpha = \frac{2.\frac{3a^2}{4} - a^2}{2.\frac{3a^2}{4}} = \frac{1}{3}$$

31.



$$S_{MNP} = \frac{S_{AEF}}{\cos 60^0} = \frac{1}{4}S_{ABC}.2$$

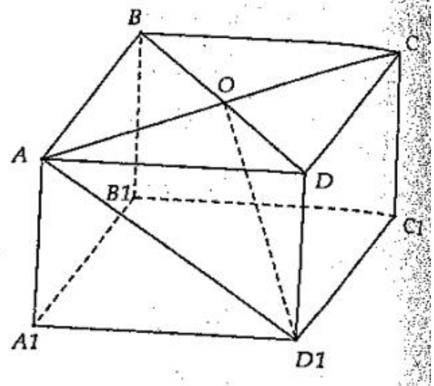
$$\Rightarrow 4a^2 = \frac{S_{ABC}}{2} \Rightarrow S_{ABC} = 8a^2$$

32.

Có $\tan\alpha = \frac{SA}{DA} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^0$

33.

$$BD = 5, DD_1 = OD.\tan 60^0 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

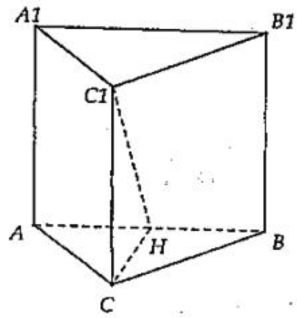


34.

$$AB = a \Rightarrow BC = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AC = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow CH = \frac{BC.AC}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow CC_1 = CH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$



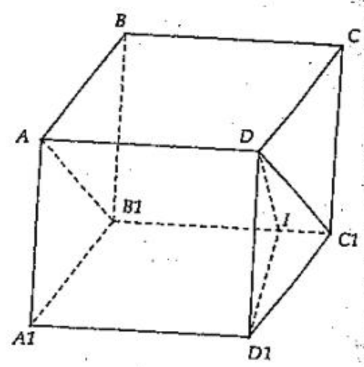
35.

$$D_1I \perp B_1C_1 \Rightarrow \widehat{DID_1} = \left(\overline{(ADC_1B_1), (ABCD)}\right)$$

$$D_1I = a\sin 30^0 = \frac{a}{2}$$

$$\tan\widehat{DID_1} = \frac{DD_1}{D_1I} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \widehat{DID_1} = 60^0$$



Bài 2. Khoảng cách

I. LÝ THUYẾT

1. Khoảng cách từ một điểm O tới một đường thẳng d

Phương pháp: Dựng trực tiếp đoạn vuông góc từ O đến d, kết hợp dữ kiện đề bài tính toán.

Ví dụ 1. Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc hợp bởi cạnh bên với mặt đáy bằng 30^0

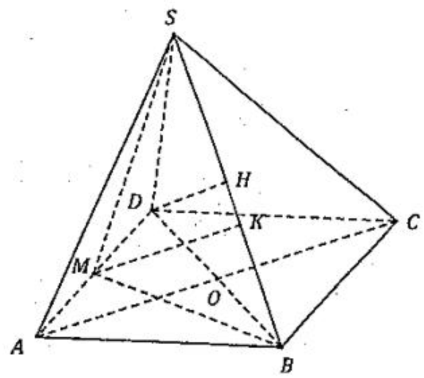
a) Khoảng cách từ D đến SB bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

b) Gọi M là trung điểm AD. Với $a=1$ thì khoảng cách từ M đến AB có giá trị gần đúng là:

A. 0.612 **B.** 0.734 **C.** 0.637 **D.** 0.654

Hướng dẫn giải



Để tính toán nhanh ta gán a = 1, khi đó ta có:

$$BD=\sqrt{2},\quad SB=\frac{OB}{\cos 30^0}=\frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

a) Dựng DH vuông góc với SB tại H

$DH=BD.\sin 30^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Đáp án: **A.**

b)

$$SM=\sqrt{SD^2-MD^2}=\sqrt{\frac{2.1^2}{3}-\frac{1^2}{4}}=\sqrt{\frac{5}{12}};MB=\sqrt{AM^2+AB^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\frac{P}{2}=\frac{SM+SB+BM}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{5}{12}}+\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

Khi đó ta có $MK=\frac{2S_{SMB}}{SB}=\frac{2\sqrt{p\left(p-\sqrt{\frac{5}{12}}\right)\left(p-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(p-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\approx 0,637$

2. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng

2.1. Phương pháp tính trực tiếp

Xác định hình chiếu H của M trên (α)

Phương pháp chung: Dựng mặt phẳng (P) chứa M và vuông góc với (α).

Giao tuyến d của (P) và (α): Kẻ $MH \perp d\left(H \in \Delta\right)$. Khi đó $d(M,(\alpha)) = MH$.

Đặc biệt:

+ Trong hình chóp đều, thì chân đường cao hạ từ đỉnh trùng với tâm đáy.

+ Hình chóp có một mặt bên vuông góc với đáy thì chân đường vuông góc hạ từ đỉnh sẽ thuộc giao tuyến của mặt bên đó với đáy.

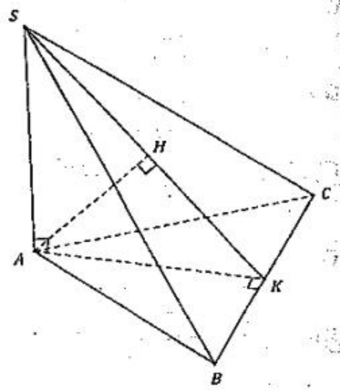
+ Hình chóp có 2 mặt bên vuông góc với đáy thì đường cao của chóp là giao tuyến của hai mặt bên này.

+ Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau (hoặc tạo với đáy những góc bằng nhau) thì chân đường cao là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.

+ Hình chóp có các mặt bên tạo với đáy những góc bằng nhau và hình chiếu của đỉnh nằm trong mặt đáy thì chân đường cao là tâm đường tròn nội tiếp đáy. Nếu chiếu của đỉnh nằm ngoài mặt đáy thì chân đường cao của hình chóp trùng với tâm đường tròn bàng tiếp của đáy (đáy là tam giác).

+ Mô hình khoảng cách:

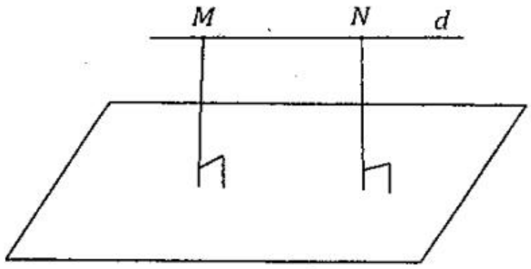
$$\left.\begin{array}{l} SA \perp \left(ABC\right) \\ AK \perp BC \\ AH \perp SK \end{array}\right\} \Rightarrow AH = d\left(A,\left(SBC\right)\right)$$



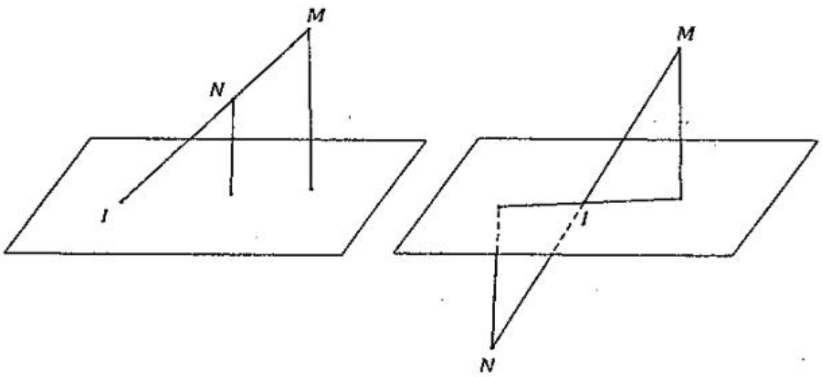
2.2. Phương pháp sử dụng công thức đổi điểm

Chuyển tính $d(M,(\alpha))$ về việc tính $d(M',(\alpha))$, trong đó việc tính $d(M',(\alpha))$ là dễ dàng hơn. Thường chuyển điểm M về điểm M' là chân đường vuông góc. Đối với khoảng cách giữa hai mặt, hai đường thẳng và giữa đường thẳng với mặt phẳng thì ta đưa về khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng.

Nếu đường thẳng d qua M, N và song song với mặt phẳng (α) thì $d(M,(\alpha)) = d(N,(\alpha))$



Nếu đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) tại điểm I và $M, N \in d$ (M, N không trùng với I) thì $\dfrac{d(M,(\alpha))}{d(N,(\alpha))} = \dfrac{MI}{NI}$



Đặc biệt, nếu N là trung điểm của MI thì $d(M,(\alpha)) = 2d(N,(\alpha))$

Nếu I là trung điểm của MN thì $d(M,(\alpha)) = d(N,(\alpha))$

2.3. Phương pháp sử dụng công thức thể tích

Thể tích của khối chóp $V = \dfrac{1}{3}S.h \Leftrightarrow h = \dfrac{3V}{S}$. Theo cách này, để tính khoảng cách từ đỉnh của hình chóp đến mặt đáy, ta đi tính V và S.

2.4. Phương pháp sử dụng công thức của tứ diện vuông

Cơ sở của phương pháp này là tính chất sau:

Giả sử OABC là tứ diện vuông tại O ($OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$) và H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Khi đó đường cao OH được tính bằng công thức:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

Chú ý: Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng song song sẽ được quy về bài toán tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt.

Ví dụ 1. Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a, góc $\widehat{BAD}=60^0$, có SO vuông góc mặt phẳng (ABCD) và SO = a.

a) Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC).

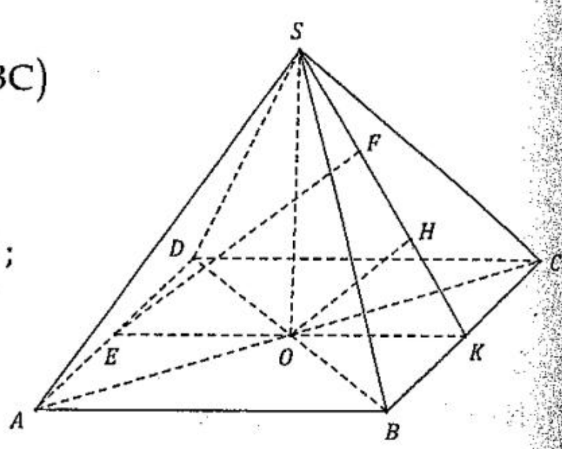
A. $\frac{a}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{57}}{19}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

b) Khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{57}}{19}$

Hướng dẫn giải

a) Hạ $OK\perp BC\Rightarrow BC\perp(SOK)$



Trong (SOK) kẻ $OH\perp SK\Rightarrow OH\perp(SBC)$

$\Rightarrow d(O,(SBC))=OH$.

Ta có ΔABD đều $\Rightarrow BD=a\Rightarrow BO=\frac{a}{2}$;

$AC=a\sqrt{3}\Rightarrow OC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông OBC có

$\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{16}{3a^2}\Leftrightarrow OK=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Trong tam giác vuông SOK có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OK^2}=\frac{19}{3a^2}\Leftrightarrow OH=\frac{a\sqrt{57}}{19}$

Vậy $d(O,(SBC))=OH=\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

b) Ta có $AD//BC\Rightarrow AD//(SBC)\Rightarrow d(AD,(SBC))=d(E,(SBC))$ $AB=a\sqrt{2}$

Kẻ $EF//OH$ $(F\in SK)$. Do $OH\perp(SBC)\Rightarrow EF\perp(SBC)$

$\Rightarrow d(AD,(SBC))=d(E,(SBC))=EF=2OH=\frac{2a\sqrt{57}}{19}$

Ví dụ 2. Tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc, OA = 2a, OB = 3a, OC = 4a. Khoảng cách từ O đến (ABC) bằng:

A. $\frac{12a}{\sqrt{65}}$ **B.** $\frac{3a}{2}$ **C.** $\frac{12a}{\sqrt{61}}$ **D.** $\frac{5a}{6}$

Hướng dẫn giải

Sử dụng công thức:

$$\frac{1}{d^2(O,(ABC))}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{9a^2}+\frac{1}{16a^2}=\frac{61}{144a^2}$$

Vậy khoảng cách từ O đến (ABC) là $\frac{12a}{\sqrt{61}}$.

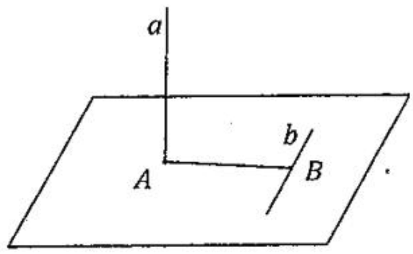
3. Khoảng cách, đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

a) Trường hợp 1: a chéo b và $a \perp b$.

Dựng mặt phẳng (α) chứa b vuông góc với a và cắt a tại A.

Từ A dựng $AB \perp b$.

Khi đó AB là đoạn vuông góc chung của a và b.



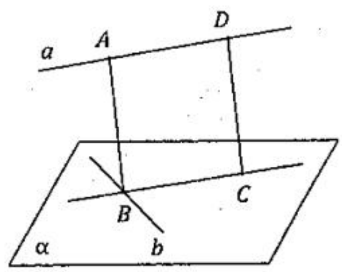
b) Trường hợp 2: a chéo b (a và b không vuông góc với nhau)

Dựng mặt phẳng (α) chứa b và song song với a.

Dựng hình chiếu vuông góc a' của a lên (α).

Gọi B là giao điểm của b và a' trong (α).

Từ B kẻ BA vuông góc với a tại điểm A thì AB là đoạn vuông góc chung của a và b.



Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A; mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

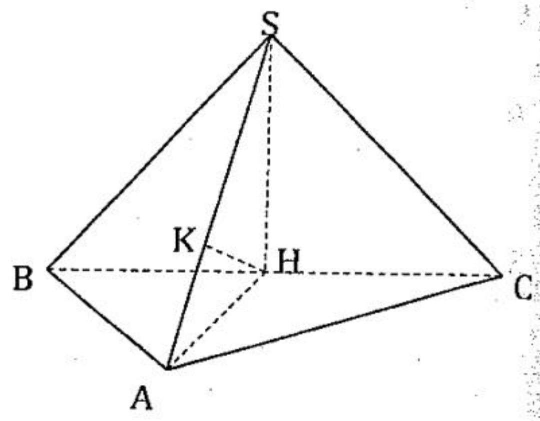
Hướng dẫn giải

Từ S kẻ $SH \perp BC$ tại H

$\rightarrow SH \perp (ABC),\ SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác ABC vuông cân tại A

$\rightarrow AH \perp BC; AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a.$



Có $\left.\begin{matrix} BC \perp SH \\ BC \perp AH \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAH)$

Kẻ $HK \perp SA$ tại K.

Khi đó HK là đường vuông góc chung của SA và BC.

$\Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HA^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2}$

$d(SA, BC) = HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho tứ diện đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện tới đường thẳng chứa một cạnh của tứ diện bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

2. Một hình lập phương nội tiếp mặt cầu bán kính R. Khoảng cách từ tâm mặt cầu tới mặt phẳng chứa một mặt của hình lập phương bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}R}{3}$ **B.** $\frac{2\sqrt{3}R}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}R}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}R}{6}$

3. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 3a, cạnh bên bằng 2a. Khoảng cách từ S đến (ABC) là:

A. $\frac{3a}{2}$ **B.** a **C.** $a\sqrt{2}$ **D.** $a\sqrt{3}$

4. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, các cạnh bên đều bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi (α) là mặt phẳng qua A, song song với BC, và vuông góc với mp(SBC), I là trung điểm của BC. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α) bằng:

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

5. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh bằng a. Với $AC \cap BD = O$.

5.1. Khoảng cách từ S đến $(ABCD)$ bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** a **D.** 2a

5.2. Khoảng cách từ O đến (SCD) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

5.3. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng AD

B. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng AC

C. Khoảng cách từ A đến (SBD) bằng AO

D. Khoảng cách từ A đến SC bằng AC

5.4. Giả sử khoảng cách từ O đến (SBC) bằng $\sqrt{6}$. Khi đó cạnh hình chóp bằng:

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

6. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình thoi tâm O, cạnh a, góc $\widehat{BAC} = 60^0$, đường cao $SO = a$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{57}}{8}$ **B.** $\frac{a\sqrt{57}}{12}$ **C.** $\frac{a\sqrt{57}}{7}$ **D.** $\frac{a\sqrt{57}}{19}$

7. Tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc, OA = a, OB = OC = 3a. Khoảng cách từ O đến (ABC) bằng:

A. $\frac{8a}{9}$ **B.** $\frac{7a\sqrt{11}}{11}$ **C.** $\frac{3a\sqrt{11}}{11}$ **D.** $\frac{5a}{6}$

8. Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD = 2a$. Tam giác BCD vuông cân tại B và BC = $a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ A đến (BCD) bằng:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{a}{2}$

9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Khoảng cách từ A đến $(A'BD)$ bằng $\frac{a}{3}$

B. Khoảng cách từ A đến $(CDD'C')$ bằng $a\sqrt{2}$

C. Khoảng cách từ A đến $(BB'C'C)$ bằng $\frac{3a}{2}$

D. Độ dài đoạn $AC' = a\sqrt{3}$

10. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa CD và (SAB) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách giữa AC và mặt phẳng $(BA'C')$ bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** $\frac{2a}{3}$

12. Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong tứ diện đều cạnh bằng 2a là:

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $2a\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{4a}{3}$ **D.** 4a

13. Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC vuông tại B, SA = a, BC = 2a, AC = 3a. Khoảng cách giữa SA và BC bằng:

A. a **B.** 2a **C.** $a\sqrt{5}$ **D.** 3a

14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$.

14.1. Khoảng cách giữa SB và CD là:

A. a **B.** 2a **C.** 3a **D.** $a\sqrt{3}$

14.2. Khoảng cách giữa SA và BD là:

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

14.3. Khoảng cách giữa SB và AD là:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $a\sqrt{5}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

14.4. Khoảng cách giữa SD và BC là:

A. 4a **B.** 3a **C.** 2a **D.** a

15. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy (ABC) là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$. Hình chiếu của A' trên (ABC) là trung điểm I của BC, biết $A'I = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Khoảng cách giữa AA' và BC bằng:

A. $\frac{3a\sqrt{7}}{7}$ **B.** $3a\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $3a\sqrt{2}$ **D.** 2a

16. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách giữa AA' và $B'C$ bằng:

A. a **B.** 2a **C.** $a\sqrt{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

17. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đáy đều bằng a. Cạnh bên của lăng trụ tạo với mặt đáy một góc 60^0 và hình chiếu của A lên mặt phẳng (A'B'C') trùng với trung điểm của B'C'. Độ dài đoạn vuông góc chung của AA' và B'C' bằng:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{3a}{4}$

18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Khoảng cách giữa AB và CC' bằng:

A. a **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $a\sqrt{3}$ **D.** $2a\sqrt{2}$

19. Cho tứ di�� OABC có $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \widehat{BOC} = 90^0$ và $OA = OB = OC = a$. Khoa�g cách giữa OA và BC bằng:

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

20. Cho tứ diện ABCD có tam giác ABC là tam giác đều cạnh a, AD vuông góc BC, $AD = a$ và khoảng cách từ D đến BC bằng a. Khoảng cách giữa AD và BC bằng:

A. $\frac{a\sqrt{38}}{8}$ **B.** $\frac{a\sqrt{19}}{8}$ **C.** $\frac{a\sqrt{39}}{8}$ **D.** $\frac{a\sqrt{40}}{8}$

21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Xét các mệnh đề:

(1). Khoảng cách giữa BD và A'C' bằng a

(2). Khoảng cách giữa BB' và AC bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Mệnh đề nào đúng?

A. (1) và (2) đều sai **B.** (1) và (2) đều đúng

C. (1) đúng và (2) sai **D.** (1) sai và (2) đúng

22. Cho tứ diện đều. Xét các mệnh đề:

(1). Đoạn nối trung điểm hai cạnh đối diện vuông góc với hai cạnh đó

(2). Đoạn nối từ đỉnh đến tâm mặt đối diện vuông góc với mặt đó

(3). Hai cạnh đối diện vuông góc với nhau

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ có (1), (3) đúng **B.** Chỉ có (3) đúng

C. Ba mệnh đề đều đúng **D.** Ba mệnh đề đều sai

23. Độ dài đoạn vuông góc chung của hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $a\sqrt{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông ABCD, vuông tại A và B. Cho $AD = 2a$, $AB = BC = a$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SC bằng:

A. $a\sqrt{6}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

25. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$, I là trung điểm của BC. Độ dài đoạn vuông góc chung của AI và OC bằng:

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{10}$ **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{7}$

26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O, O' là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Khoảng cách từ A đến $(BB'D'D)$ bằng AO

B. Khoảng cách giữa AA' và BD' bằng AO

C. Khoảng cách giữa $(AA'B'B)$ và $(CC'D'D)$ bằng $AO\sqrt{2}$

D. Khoảng cách từ A đến B'D bằng AO.

27. Cho tứ diện S.ABC có $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC cân tại A. Gọi I là trung điểm BC, dựng $AH \perp SI$. Mệnh đề nào sau đây sai ?

A. Khoảng cách từ S đến (ABCD) bằng đoạn SA

B. $BC \perp (SAI)$

C. $AH \perp (SBC)$

D. Khoảng cách từ B đến (SAC) bằng đoạn BC

28. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BC. Xét các mệnh đề:

(1) Khoảng cách giữa AA' và $(BB'C'C)$ bằng khoảng cách giữa CC' và $(AA'B'B)$.

(2) Khoảng cách từ B đến $(AA'C'C)$ bằng hai lần khoảng cách từ M đến $(AA'C'C)$.

Mệnh đề nào đúng?

A. (1) đúng và (2) sai
B. (2) đúng và (1) sai
C. (1) và (2) đều đúng
D. (1) và (2) đều sai

29. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có $AC \cap BD = H$. Xét các mệnh đề:

(1) Khoảng cách giữa CD và (SAB) bằng khoảng cách từ D đến (SAB)

(2) Khoảng cách từ B đến (SAD) bằng hai lần khoảng cách từ H đến (SAD)

(3) Khoảng cách từ H đến bốn cạnh SA, SB, SC, SD bằng nhau

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ có hai trong ba mệnh đề trên sai

B. Chỉ có hai trong ba mệnh đề trên đúng

C. Ba mệnh đề đều đúng

D. Ba mệnh đề đều sai

30. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Độ dài đường chéo BD' bằng $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

B. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(CB'D')$ bằng $\frac{2}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và CC' bằng $\sqrt{a^2 + b^2}$

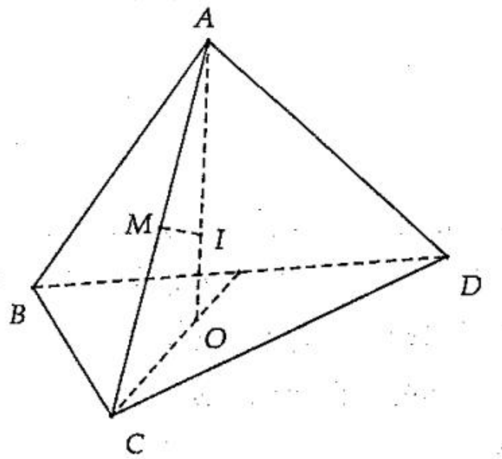
D. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và CD' bằng b

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. D	**2. A**	**3. B**	**4. D**	***5.1.* A**	***5.2.* B**	***5.3.* C**	***5.4.* D**	**6. D**	**7. C**
8. A	**9. D**	**10. A**	**11. A**	**12. A**	**13. C**	***14.1.* A**	***14.2.* B**	***14.3.* D**	***14.4.* D**
15. A	**16 .D**	**17. D**	**18. A**	**19. C**	**20. C**	**21. B**	**22.B**	**23. B**	**24. C**
25. A	**26 .D**	**27. D**	**28. C**	**29. C**	**30. B**				

1.

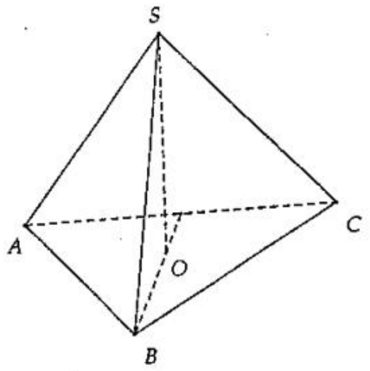
$$AC = a, OC = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow AO = a\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{IM}{OC} = \frac{AM}{AO} \Rightarrow \frac{IM}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{\frac{2}{3}}} \Rightarrow IM = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$



2. $2R = 2a\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{R}{\sqrt{3}}$

3.

$OB = \frac{3a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3} \Rightarrow SO = a$



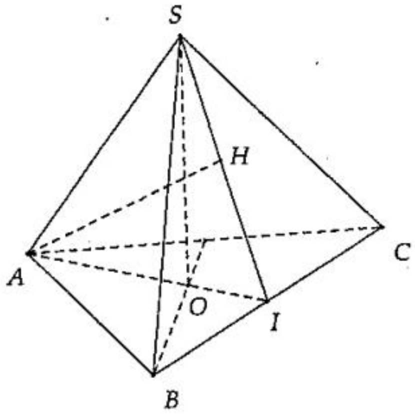
4.

$SI = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$IH.SI = IO.IA$

$\Rightarrow IH.\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}IA^2 = \frac{1}{3}.\frac{3a^2}{4} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

$OI = \frac{1}{3}IA = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$



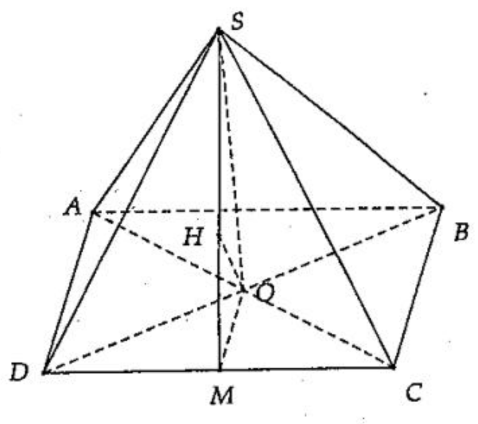
5. $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{6}{a^2}$

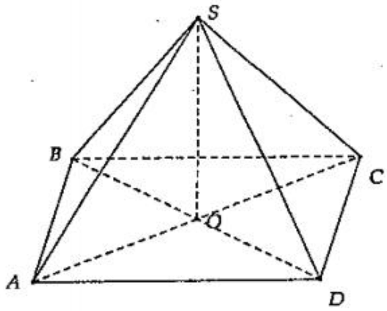
$\Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

$d(O,(SBC)) = d(O,(SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{6} = \sqrt{6}$

$\Rightarrow a = 6$



6. $OC=\frac{a}{2}, OB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$



Có O.SBC là tứ diện vuông

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OS^2}=\frac{4}{a^2}+\frac{4}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{19}{3a^2}$$

$$\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{57}}{19}$$

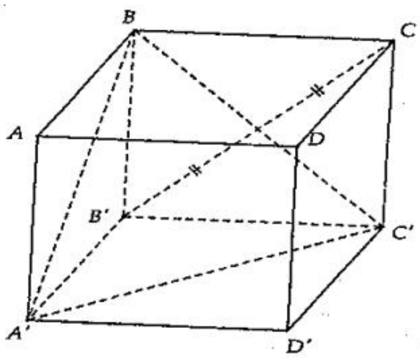
7. $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{9a^2}+\frac{1}{9a^2}=\frac{11}{9a^3}\Rightarrow h=\frac{3a\sqrt{11}}{11}$

8. $AH=\sqrt{(2a^2)-a^2}=a\sqrt{3}$

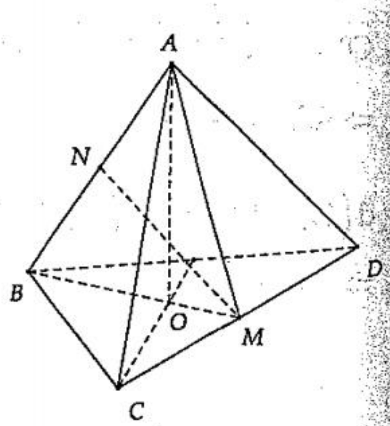
10. Áp dụng bài 5 ta có $d(CD,(SAB))=d(C,(SAB))=2d(O,(SAB))=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

11. $d(AC;(BA'C'))=d(C,(BA'C'))=d(B',(BA'C'))$

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$



12. $OB=\frac{2a}{\sqrt{3}}, OA=\sqrt{AB^2-OB^2}$



$$=\sqrt{4a^2-\frac{4a^2}{3}}=2a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$MN.AB=OA.BM$

$$\Rightarrow MN.2a=2a\sqrt{\frac{2}{3}}.\frac{2a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow MN=a\sqrt{2}$$

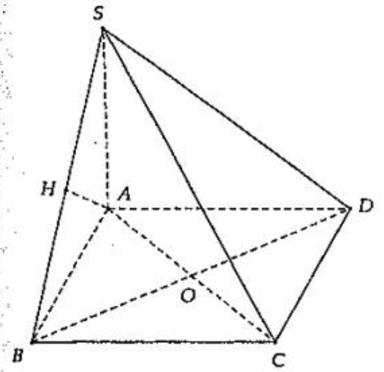
13. $d(SA, BC) = AB = a\sqrt{5}$

14. $d(SB, CD) = d((SAB), CD) = d(D, (SAB)) = DA = a$

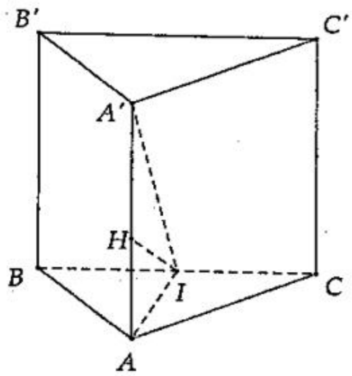
$d(SA, BD) = OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$d(SB, AD) = d((SBC), AD) = d(A, (SBC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$d(SD, BC) = d((SAD), BC) = d(B, (SAD)) = a$



15.

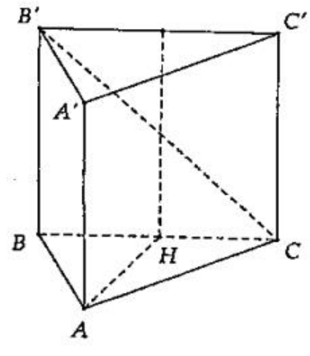


$AI = 2a\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3a$

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IA'^2} = \frac{1}{\frac{6a^2}{4}} + \frac{1}{9a^2} = \frac{7}{9a^2}$$

$\Rightarrow IH = \dfrac{3a\sqrt{7}}{7}$

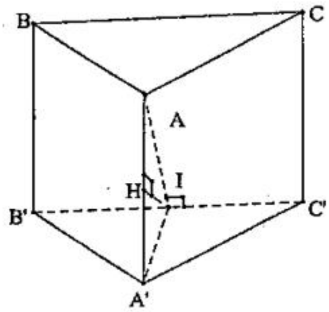
16.



$d(AA', B'C) = d(AA', (B'HC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

17.

$$IH = IA'.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$$



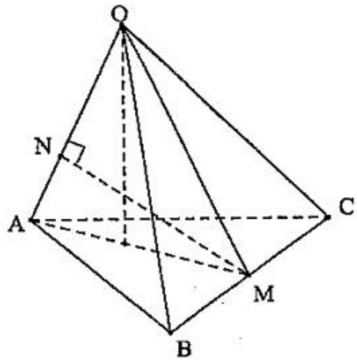
18.

$$d(AB, CC') = BC = a$$

19.

$$h = \frac{a}{\sqrt{3}}, AM = \sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

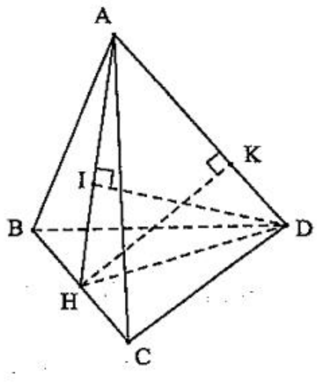
$$MN.OA = h.AM \Leftrightarrow MN.a = \frac{a}{\sqrt{3}}.a\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow MN = \frac{a}{\sqrt{2}}$$



20.

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AI = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow DI = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

$$DI.AH = HK.AD \Rightarrow HK.a = \frac{a\sqrt{13}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{39}}{8}$$



23.

Áp dụng bài 12: $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

25.

Cách 1: Dùng phương pháp tọa độ hóa.

Cách 2: Dễ thấy ΔABC là tam giác đều, gọi K là chân đường vuông góc hạ từ O thì K là trọng tâm tam giác ABC. Dựng hình bình hành AMCI, suy ra :

d(AI,OC) = d(AI,(OMC))= d(K, (OMC))

$$d(K,(OMC)) = \sqrt{\frac{IC^2.OK^2}{IC^2+OK^2}} \; \left(d(K,MC) = IC,\ \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \right)$$

26. (1) $AO \perp (BDD'B')$

(2) d(AA',BD') = d(AA',(BDD'B')) = AO

(3) $d((ABB'A'),(CC'D'D)) = BC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{2AO}{\sqrt{2}} = AO\sqrt{2}$

27. $SA \perp (ABC)$; $BC \perp SA; BC \perp AI \Rightarrow BC \perp (SAI)$

$(SAI) \perp (SBC)$, giao tuyến SI, $AH \perp SI \Rightarrow AH \perp (SBC)$

28. d(AA',(BB'C'C) = d(AA',CC') = d(CC',(AA'B'B))

$$\frac{BC}{MC} = 2 \Rightarrow \frac{d(B,(ACC'A'))}{d(M,(ACC'A'))} = 2$$

29. (1) đúng do CD// (SAB); (2) có $\dfrac{BD}{HD} = 2 \Rightarrow \dfrac{d(B,(SAD))}{d(H,(SAD))} = 2$

(3) do tứ diện S_{ABCD} là tứ diện đều.

30. A đúng theo công thức tứ diện vuông; C đúng do d(AA', CC') = AC

D đúng do $d(AB',CD') = d\left((ABB'A'),(CDD'C')\right)$

Bài 3. Thể tích khối đa diện

I. LÝ THUYẾT

1. Thể tích khối chóp

Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}S.h$

Một số dạng đường cao khối chóp thường gặp

+ Cạnh bên SA vuông góc với đáy, h = SA.

+ Mặt bên (SAB) vuông góc với đáy. Khi đó gọi H là hình chiếu vuông góc S xuống AB, h = SH.

+ Hai mặt bên vuông góc với đáy thì giao tuyến giữa 2 mặt phẳng là đường cao.

+ Các mặt bên cùng tạo với đáy một góc α. Thì chân đường cao hạ từ đỉnh chóp xuống đáy là tâm đường tròn nội tiếp đáy.

+ Các cạnh bên cùng tạo với đáy một góc α. Thì chân đường cao hạ từ đỉnh chóp xuống đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.

2. Thể tích khối lăng trụ

Thể tích của khối lập phương cạnh a là $V = a^3$

Thể tích của khối hộp chữ nhật có độ dài ba cạnh a, b, c là $V = abc$

Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = B.h$

+ Lăng trụ đứng thì chiều cao h là cạnh bên.

+ Cho hình chiếu của 1 đỉnh xuống 1 mặt đáy thì chiều cao chính là đoạn nối đỉnh với hình chiếu đó.

3. Các phương pháp tính thể tích

a. Tính trực tiếp bằng công thức

- Xác định chiều cao
- Xác định bán kính đáy

b. Sử dụng tỉ số thể tích

Cho tứ diện SABC, các điểm A', B', C' lần lượt thuộc SA, SB, SC thì ta có:

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

Chú ý:

+) Nếu $A \equiv A' \Rightarrow \frac{SA'}{SA} = 1$

+) Nếu hình chóp có đáy là tứ giác thì ta có thể chia làm hai hình chóp tam giác để áp dụng công thức trên. Các hình đa diện khác ta cũng chia tương tự.

Ví dụ 1 *(Câu 36 đề minh họa 2017)*. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = \sqrt{2}a$. Tính thể tích V của khối chóp S.ABCD.

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$ **B.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$ **C.** $V = \sqrt{2}a^3$ **D.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

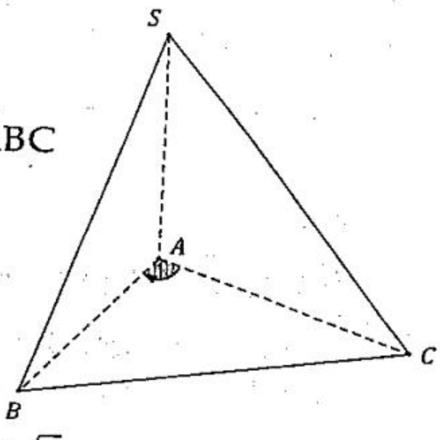
Đáp án: **D.**

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABC có mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy, góc BAC bằng 120^0. Thể tích của khối chóp S.ABC.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$

Hướng dẫn giải

Cách 1:



Ta có $V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA$

Áp dụng định lý hàm số côsin cho tam giác ABC

Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^0$

$\Leftrightarrow a^2 = 2AB^2 - 2AB^2(-\frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow a^2 = 3AB^2 \Rightarrow AB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

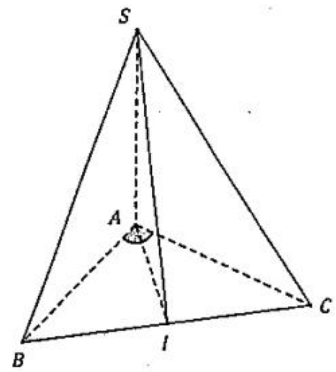
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 120^0 = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$

$$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{12}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Cách 2:

Gọi I là trung điểm BC $\Rightarrow AI \perp BC,\ SI \perp BC$



$$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.AI = \frac{1}{2}a.AI$$

Ta có $\tan 60^0 = \frac{BI}{AI} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{a/2}{AI} \Rightarrow AI = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$$

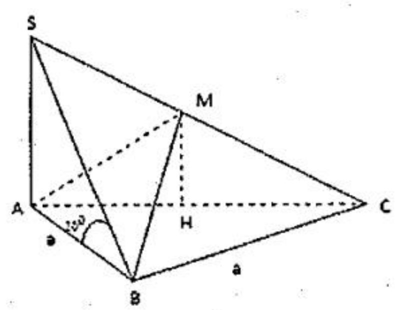
$$SA = \sqrt{SI^2 - AI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Vậy $V_{SABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại *B*, AB = a, cạnh bên *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30^0. Gọi M là trung điểm của SC. Thể tích của khối chóp *S.ABM* tính theo a là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$

Hướng dẫn giải



Cách 1: Ta có

$$\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SBA} = 30^0$$

Gọi *H* là trung điểm *AC*

$\Rightarrow MH // SA \Rightarrow MH \perp (ABC)$

$$V_{SABM} = V_{SABC} - V_{MABC}$$

$$=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA-\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.MH$$

$$=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}(SA-MH)=\frac{1}{6}S_{\Delta ABC}.SA$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BA.BC=\frac{a^2}{2}$$

$$\tan 30^0=\frac{SA}{SB}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{SA}{a}\Rightarrow SA=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

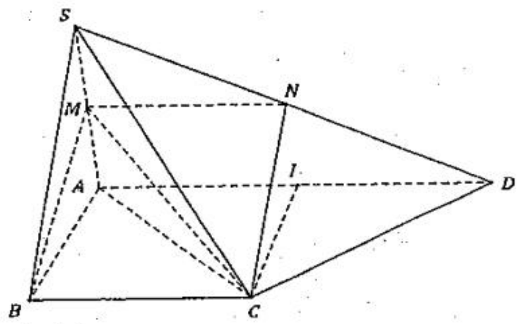
Vậy $V_{SABM}=\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Cách 2: $V_{S.ABM}=\frac{1}{2}V_{S.ABC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}SA.S_{ABC}=\frac{1}{6}\frac{a}{\sqrt{3}}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại *A* và *B*, AB = BC = a, $AD=2a$, *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy, SA = 2a. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *SA, SD*. Thể tích của khối đa diện bằng:

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** $\frac{a^3}{6}$ **C.** $\frac{2a^3}{3}$ **D.** $\frac{4a^3}{3}$

Hướng dẫn giải



$$V_{ABCDNM}=V_{MABC}+V_{CADNM}$$

$$V_{MABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.MA$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}BA.BC.\frac{1}{2}SA=\frac{a^3}{6}$$

Gọi *I* là trung điểm AD, ta có *ABCI* là hình vuông $\Rightarrow CI\perp(SAD)$.

$$V_{CADNM}=\frac{1}{3}S_{ADNM}.CI=\frac{1}{3}\frac{(AD+NM)AM}{2}CI$$

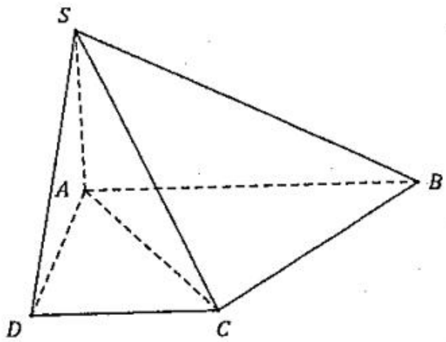
$$=\frac{1}{3}\frac{(2a+a)a}{2}a=\frac{a^3}{2}$$

Vậy $V_{ABCDNM}=\frac{a^3}{6}+\frac{a^3}{2}=\frac{2a^3}{3}$.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AD = CD = a$, $AB = 3a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 45^0. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **C.** $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$

Hướng dẫn giải



$\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCA} = 45^0$

$V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA$

$S_{\Delta ABCD} = \frac{(AB+DC)AD}{2} = \frac{(3a+a)a}{2} = 2a^2$

ΔSAC vuông cân tại A

$\Rightarrow SA = AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

Vậy $V_{SABCD} = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là bao nhiêu, biết:

a) AB = a, góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) bằng 30^0.

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

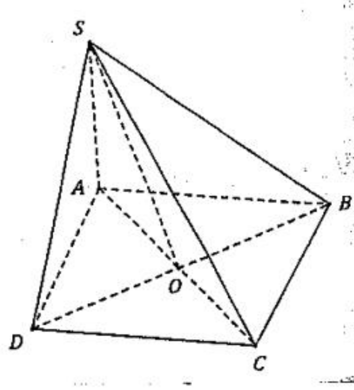
b) BD = 2a, góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt đáy bằng 60^0.

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Hướng dẫn giải

a) $\widehat{(SD,(SAB))} = \widehat{DSA} = 30^0$

Có $\tan 30^0 = \frac{AD}{SA} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{SA} \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$



$$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}a^2.SA$$

$$= \frac{1}{3}a^2.a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

b) Gọi $O = AC \cap BD$

$\widehat{((SBD),(ABCD))} = \widehat{SOA} = 60^0$

$AB^2 + BC^2 = AC^2 = BD^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = 4a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{\Delta ABCD} = 2a^2$

$SA = OA.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$. $V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 7. Cho hình chóp SABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, SA = a. A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của SC, SD, SA, SB. S' là tâm hình vuông ABCD. Thể tích khối chóp S'A'B'C'D' là:

A. $\frac{a^3}{12}$ **B.** $\frac{a^3}{18}$ **C.** $\frac{a^3}{24}$ **D.** $\frac{a^3}{36}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $(A'B'C'D') // (ABCD)$.

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp (A'B'C'D'), SA' \perp (A'B'C'D')$

$SA' = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$; $S_{A'B'C'D'} = A'B'.A'D' = \frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$

$V_{S'A'B'C'D'} = \frac{1}{3}.S_{A'B'C'D'}.S'A' = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{4}.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{24}$.

Ví dụ 8. Cho hình chóp *SABCD* có mặt bên *SAB* vuông góc với mặt phẳng đáy và tam giác *SAB* cân tại *S*. Tính thể tích của khối chóp *SABCD*, biết rằng *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, góc giữa mặt *SBD* và mặt đáy bằng 60^0.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

Hướng dẫn giải

Kẻ $SH \perp AB$ $(H \in AB)$ (*H* là trung điểm của AB)

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

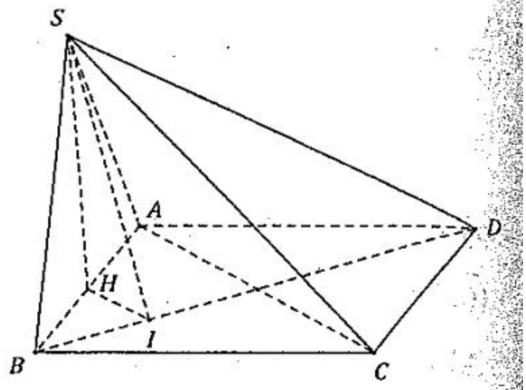
Kẻ $HI \perp BD\ (I \in BD) \Rightarrow SI \perp BD$

$\Rightarrow \widehat{((SBD),(ABCD))} = \widehat{SIH} = 60^0$

Có $S_{ABCD} = a^2$, $SH = HI\tan 60^0$

$IH = \frac{1}{4}AC = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$



Ví dụ 9. Cho hình chóp *SABCD* có đáy là hình thoi, mặt bên *SAB* là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Thể tích khối chóp *SABCD* là:

a) Biết: $AB = BC = BD = a$

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** $\frac{2a^3}{3}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a^3}{4}$

b) Biết: $AC = 2a, BD = 4a$

A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **B.** $\frac{\sqrt{15}a^3}{3}$ **C.** $\frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$

Hướng dẫn giải

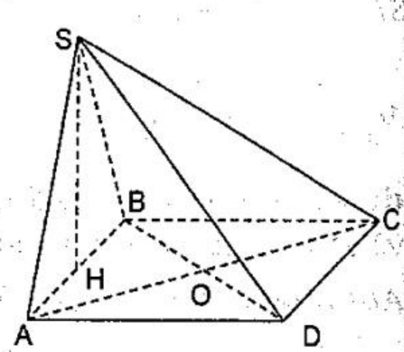
Gọi *H* là trung điểm của *AB*, vì ΔSAB đều $\Rightarrow SH \perp AB$

a) ΔSAB đều cạnh $a \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2.\frac{1}{2}AC.BO\ \ (O = AC \cap BD)$

$= 2AO.BO = 2\sqrt{AB^2 - BO^2}.BO$

$= 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$



Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{a^3}{4}$

b) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}2a.4a = 4a^2$

$OA = \frac{1}{2}AC = a$, $OB = \frac{1}{2}BD = 2a$, $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = a\sqrt{5}$

ΔSAB đều $\Rightarrow SH = AB.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$.

Ví dụ 10. Chóp tam giác đều SABC có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, các cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0. Thể tích của khối chóp là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{27}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **C.** $\frac{a^3}{6\sqrt{3}}$ **D.** $\frac{a^3}{9}$

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm của BC và H là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó: $AH = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ta có: $\widehat{SAM} = 60^0$ nên $SH = AH.\tan 60^0 = a$,

$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Do đó: $V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Ví dụ 11. Chóp tam giác đều SABC có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, các cạnh bên tạo với đáy một góc α. Thể tích của khối chóp là:

A. $\frac{a^3\tan\alpha}{9}$ **B.** $\frac{a^3\tan\alpha\sqrt{3}}{12}$ **C.** $\frac{a^3\tan\alpha}{3}$ **D.** $\frac{a^3\tan\alpha}{12}$

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm của BC và H là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó: $AH = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Ta có: $\widehat{SAM} = \alpha$ nên $SH = AH.\tan\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3}\tan\alpha$, $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Do đó $V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}\tan\alpha.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\tan\alpha}{12}$.

Ví dụ 12. Cho hình chóp SABC có các cạnh bên bằng nhau cùng hợp với đáy góc 60^0, đáy là tam giác cân $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120^0$. Thể tích của khối chóp đó là:

A. $\frac{3a^3}{4}$ **B.** $\frac{a^3}{4}$ **C.** $\frac{a^3}{3}$ **D.** $\frac{2a^3}{3}$

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm BC và H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. SH chính là đường cao của hình chóp.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 120^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $BC = 2BM = 2.AB\sin 60^0 = a\sqrt{3}$

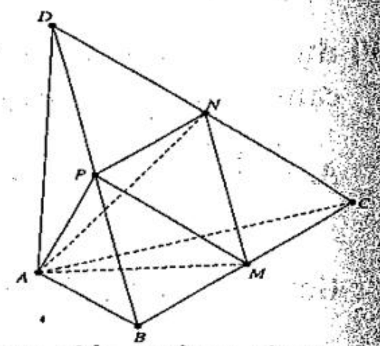
$HA = R = \frac{a.b.c}{4S} = a \Rightarrow SH = HA.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

Do vậy: $V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{4}a^3$.

Ví dụ 13. Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a, AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Thể tích V của tứ diện AMNP là:

A. $V = \frac{7}{2}a^3$ **B.** $V = 14a^3$ **C.** $V = \frac{28}{3}a^3$ **D.** $V = 7a^3$

Hướng dẫn giải



Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AB.\frac{AC.AD}{2} = 28a^3$

$\frac{V_{D.APN}}{V_{D.ABC}} = \frac{DP}{BD}.\frac{DN}{DC} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{D.APN} = \frac{1}{4}V_{D.ABC} = 7a^3$

Tương tự, ta cũng có : $V_{C.AMN} = 7a^3$ và $V_{B.APM} = 7a^3$

Từ đó suy ra: $V_{A.MNP} = 28a^3 - 3.7a^3 = 7a^3$

Ví dụ 14. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AC, đường thẳng $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 45^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tính theo a là:

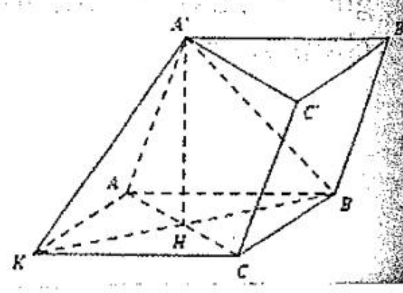
Hướng dẫn giải

Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $AB = BC = a\sqrt{2}$

Gọi H là trung điểm $AC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$

Suy ra góc giữa $A'B$ và (ABC) là $\widehat{A'BH} = 45^0$

Nên tam giác $A'HB$ vuông cân tại H



Mà $BH = \frac{1}{2}AC = a \Rightarrow A'H = a$

Vậy: $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = a.\frac{1}{2}a\sqrt{2}.a\sqrt{2} = a^3$

Ví dụ 15. Cho $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng có đáy là hình vuông. Tam giác A'AC vuông cân, biết $A'C = a$. Thể tích $ABB'C'$ bằng:

Hướng dẫn giải

$A'C = a$ và $\Delta A'AC$ vuông cân $\Rightarrow A'A = AC = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow BB' = a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Mà ΔABC vuông cân: $AB = BC = \frac{a}{2} \Rightarrow B'C' = \frac{a}{2}$

$S_{\Delta BB'C'} = \frac{1}{2}BB'.B'C' = \frac{a^2\sqrt{2}}{8}$

Vậy $V_{ABB'C'} = \frac{1}{3}AB.S_{\Delta BB'C'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

Ví dụ 16 *(Câu 35 đề minh họa THPT quốc gia 2017).*

Biết $A'C = a\sqrt{3}$, thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là:

A. $V = a^3$ **B.** $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$ **C.** $V = 3\sqrt{3}a^3$ **D.** $V = \frac{1}{3}a^3$

Hướng dẫn giải

Ta có: $AC = AA'\sqrt{2}$

$$A'C^2 = AA'^2 + AC^2 = 3AA'^2 \Rightarrow AA' = a \Rightarrow V = a^3.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Một hình tứ diện đều có chiều cao bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}$ thì thể tích của nó bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$

2. Một hình lập phương có đường chéo (đoạn thẳng nối hai đỉnh không cùng một mặt) bằng a. Thể tích của nó bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{27}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $\frac{a^3}{6\sqrt{3}}$ **D.** $\frac{a^3}{9}$

3. Một hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a, đường cao của hình chóp bằng đường cao của tam giác đáy.
Thể tích khối đó bằng:

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a^3}{4}$ **D.** $\frac{a^3}{8}$.

4. Thể tích của khối hộp ABCD.A'B'C'D' là (biết rằng (A'BB'D') là khối tứ diện đều cạnh a)

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

5. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = a, BC = b, AA' = c$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của B'C' và C'D'. Mặt phẳng (AEF) chia hình hộp đó thành hai hình đa diện (H) và (H'), với (H) là hình đa diện chứa đỉnh A'. Thể tích hình (H) là:

A. $\frac{25abc}{72}$ **B.** $\frac{47abc}{72}$ **C.** abc **D.** $\frac{abc}{72}$

6. Thể tích khối tứ diện đều cạnh bằng 1 cm bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}cm^3$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{12}cm^3$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{12}cm^3$ **D.** $2cm^3$.

7. Nếu một khối tứ diện đều có chiều dài cạnh bên tăng lên k lần thì thể tích tăng lên:

A. k lần **B.** k^3 lần **C.** $\frac{\sqrt{2}k^3}{12}$ lần **D.** k^2 lần

8. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = a, AD = 2a, AA' = a$. Thể tích của khối tứ diện AB'D'C' là:

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** $2a^3$ **C.** $\frac{2a^3}{3}$ **D.** Kết quả khác

9. Thể tích của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a là:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

10. Cho khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng b. Thể tích khối lăng trụ đó là:

A. $\frac{b^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{b^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{b^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** Kết quả khác

11. Cho khối tứ diện ABCD có đoạn BD là đoạn vuông góc chung của AB và CD, $BD = a, AB = c, CD = b$. Góc giữa AB và CD bằng 30°. Thể tích tứ diện ABCD là:

A. $\frac{abc}{3}$ **B.** $\frac{abc}{12}$ **C.** $\frac{abc}{6}$ **D.** Kết quả khác

12. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, $AB = 1cm$, góc giữa mặt bên và đáy bằng 60^0. Khi đó thể tích của khối chóp bằng:

A. $2\,cm^3$ **B.** $2\sqrt{3}\,cm^3$ **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}cm^3$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{6}cm^3$

13. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC. Biết $SA = 2cm$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Khi đó thể tích của khối chóp là:

A. $\frac{24}{7\sqrt{7}}cm^3$ **B.** $\frac{21}{5\sqrt{5}}cm^3$ **C.** $\frac{24}{\sqrt{3}}cm^3$ **D.** $2\sqrt{6}\,cm^3$

14. Cho hình chóp cụt tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có $A'B' = a$, $AB = AA' = \frac{a}{2}$. Thể tích của nó bằng:

A. $\frac{7a^3\sqrt{2}}{24}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$ **D.** $\frac{7a^3\sqrt{2}}{48}$

15. Cho khối tứ diện H có thể tích bằng V. Xét khối tứ diện H' có bốn đỉnh là trọng tâm bốn mặt của H. Thể tích của H' bằng:

A. $\frac{V}{27}$ **B.** $\frac{V}{9}$ **C.** $\frac{V}{8}$ **D.** $\frac{V}{4}$

16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tỉ số thể tích của hai khối chóp S.A'B'C'D' và S.ACBD là:

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{2}$

17. Cho mặt cầu bán kính R và một hình trụ có bán kính $2R$ và chiều cao $\frac{3R}{2}$. Khi đó tỉ số thể tích của khối cầu và khối trụ tương ứng là:

A. $\frac{V_c}{V_t} = \frac{1}{2}$ **B.** $\frac{V_c}{V_t} = \frac{1}{3}$ **C.** $\frac{V_c}{V_t} = \frac{2}{3}$ **D.** $\frac{V_c}{V_t} = \frac{2}{9}$

18. Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D' Gọi O là giao điểm của AC' và B'D Tính tỉ số thể tích giữa tứ diện OBCD và khối lập phương:

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{24}$

19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A',B' lần lượt là trung điểm các cạnh SA và SB. Thể tích tứ diện A'B'BC bằng:

A. $\frac{V}{6}$ **B.** $\frac{V}{8}$ **C.** $\frac{2V}{15}$ **D.** $\frac{V}{9}$.

20. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V. Gọi I là tâm của hình bình hành $ACC'A'$. Thể tích tứ diện $ABB'I$ bằng:

A. $\frac{V}{6}$ **B.** $\frac{V}{3}$ **C.** $\frac{2V}{3}$ **D.** $\frac{V}{2}$

21. Cho hình chóp tam giác S.ABC. Gọi A',B' lần lượt là trung điểm của SA và SB. Mặt phẳng $(A'B'C)$ chia hình chóp thành hai phần. Tỉ số thể tích hai phần đó bằng:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{2}{3}$

22. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Mặt phẳng đi qua A,B và trung điểm cạnh $B'C'$ chia lăng trụ thành hai phần. Tỉ số thể tích hai phần đó là:

A. $\frac{7}{5}$ **B.** $\frac{7}{12}$ **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{6}{5}$

23. Hộp lăng trụ ngũ giác ABCDE.A'B'C'D'E có thể tích V. Gọi M, N, P, Q, K là trung điểm AA', BB', CC', DD', EE' thì thể tích lăng trụ ABCDE.MNPQK bằng:

A. $\frac{1}{2}V$ **B.** $\frac{1}{4}V$ **C.** $\frac{1}{8}V$ **D.** $\frac{1}{10}V$

24. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có thể tích V. Gọi M, N là trung điểm A'B' và B'C' thì thể tích khối chóp D'.DMN bằng:

A. $\frac{V}{2}$ **B.** $\frac{V}{4}$ **C.** $\frac{V}{8}$ **D.** $\frac{V}{16}$

25. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông ở B. $SA \perp (ABC)$. Biết rằng $AB = 3, SA = 4$. Khoảng cách từ A đến (SBC) là:

A. $\frac{7}{5}$ **B.** $\frac{12}{5}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{12}{25}$

26. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Điểm M thuộc miền trong của khối tứ diện. Gọi m_A, m_B, m_C, m_D tương ứng là khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng (BCD), (CDA), (DAB), (ABC). Khi đó $m_A + m_B + m_C + m_D$ bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $a\sqrt{3}$

27. Cho tứ diện OABC đôi một vuông góc với nhau.
Gọi $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Điểm M thuộc miền trong tam giác ABC. Gọi x,y,z tương ứng là khoảng cách từ M đến các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB), khi đó biểu thức nào sau đây là đúng?

A. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}<1$ **B.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

C. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}>1$ **D.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$

28. Cho tứ diện đều ABCD. Điểm M thuộc miền trong của tứ diện. Gọi x,y,z,t tương ứng là khoảng cách từ M đến các mặt (BCD), (CDA), (DAB), (ABC). Gọi a, b, c, d tương ứng là khoảng cách từ A, B, C, D đến các mặt (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) thì:

A. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+\frac{t}{d}<1$ **B.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+\frac{t}{d}=1$

C. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+\frac{t}{d}>1$ **D.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+\frac{t}{d}=4$

29. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có cạnh $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng 1. Với giá trị nào của x thì V_{SABCD} đạt giá trị lớn nhất?

A. $x = \sqrt{3}$ **B.** $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ **C.** $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $x = 4\sqrt{3}$.

30. Cho hình lăng trụ xoay tròn, bán kính đáy là R, đường cao $OO' = h$ (O và O' là tâm của các đáy). AB là một đường kính di động của đường tròn (O), CD là một đường kính cố định của đường tròn (O'), gọi α là góc giữa AB và CD. Với giá trị nào của α thì tứ diện ABDC có thể tích lớn nhất?

A. $\alpha = \frac{\pi}{4}$ **B.** $\alpha = \frac{\pi}{3}$ **C.** $\alpha = \frac{\pi}{2}$ **D.** $\alpha = \pi$.

31. Cho tứ diện ABCD có d là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD. Góc α là góc giữa hai đường AB và CD, thể tích tứ diện đạt GTLN khi góc α thay đổi là:

A. $V_{max} = AB.CD.d$ **B.** $V_{max} = \frac{1}{2}AB.CD.d$

C. $V_{max} = \frac{1}{3}AB.CD.d$ **D.** $V_{max} = \frac{1}{6}AB.CD.d$

32. Cho hình chóp SABC có $SA \perp (ABC), BC \perp AB$.

Gọi: $SA = a, AB = b, BC = c$; B' và C' tương ứng là hình chiếu vuông góc của điểm A trên SB, SC; V là V' là thể tích của các khối SABC, SA'B'C'. Khi đó:

A. $\frac{V'}{V} = \frac{a^2}{a^2+b^2}.\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$ **B.** $\frac{V'}{V} = \frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

C. $\frac{V'}{V} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$ **D.** $\frac{V'}{V} = \frac{a^2}{a^2+b^2}$

33. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và SA= a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD; I là giao điểm của SC và mặt phẳng (AMN). Thể tích khối chóp MBAI là:

A. $\frac{a^3}{12}$ **B.** $\frac{a^3}{18}$ **C.** $\frac{a^3}{24}$ **D.** $\frac{a^3}{36}$

34. Khối chóp tam giác SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), SC = a, sin góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (ABC) để thể tích khối chóp lớn nhất là:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

35. Cho hình chóp SABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, SA = a, điểm $M \in AD$, $E \in CD$, $AM = CE = \frac{a}{4}$. Gọi N là trung điểm của BM, K là giao điểm của AN và BC. Thể tích khối chóp SADK là:

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** $\frac{2a^3}{3}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a^3}{6}$

36. Cho hình chóp đều S.ABCD, O là tâm đáy, M là trung điểm của SO, khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) bằng b, AB = a.
Thể tích hình chóp S.ABCD là:

A. $V = \frac{1}{3}\frac{a^3b}{\sqrt{a^2-16b^2}}$

B. $V = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}a^3b}{\sqrt{a^2-16b^2}}$

C. $V = \frac{1}{3}\frac{2a^3b}{\sqrt{a^2-16b^2}}$

D. $V = \frac{1}{3}\frac{4a^3b}{\sqrt{a^2-16b^2}}$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. A	2. B	3. D	4. A	5. A	6. B	7. B	8. A	9. C	10. A
11. B	12. D	13. A	14. A	15. A	16. A	17. D	18. C	19. B	20. A
21. B	22. A	23. A	24. C	25. B	26. B	27. B	28. B	29. A	30. C
31. D	32. A	33. D	34. C	35. D	36. C				

13.

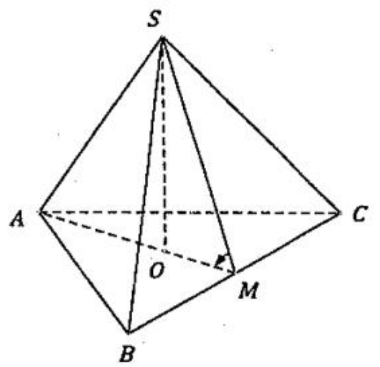
$$CM = \frac{x}{2}, SO = \frac{x\sqrt{3}}{2}; OA^2 + SO^2 = SA^2.$$

$$x^2 + \frac{3x^2}{4} = 2^2 \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{7}} \Rightarrow AB = \frac{4}{\sqrt{7}}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SO.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.\left(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{24}{7\sqrt{7}}$$

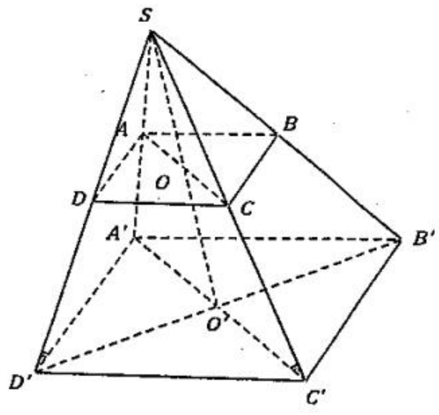


14. $OA = \frac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow SO = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

$$O'A' = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow SO' = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$V_c = V_{S.A'B'C'D'} - V_{S.ABCD}$$

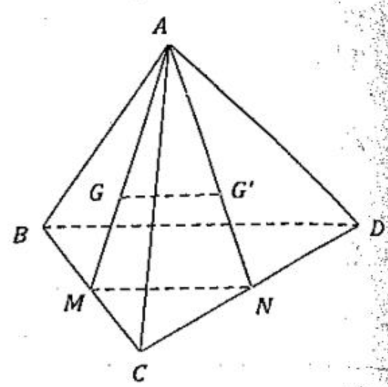
$$= \frac{1}{3}SO'.a^2 - \frac{1}{3}SO\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7a^3\sqrt{2}}{24}$$



15.

$$GG' = \frac{2}{3}MN = \frac{1}{3}BD$$

$$\Rightarrow V_{H'} = \frac{V}{3^3} = \frac{V}{27}$$



17. Thể tích khối cầu $V_C = \frac{4}{3}\pi R^3$

Thể tích khối trụ $V_T = \frac{3R}{2}\pi(2R)^2 = 6\pi R^3$.

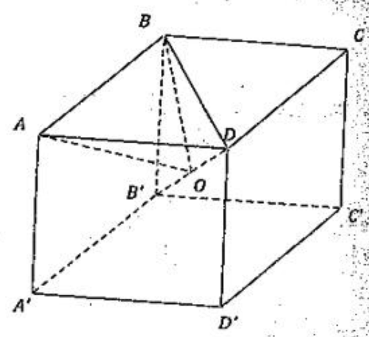
Vậy $\frac{V_C}{V_T} = \frac{4}{3} : 6 = \frac{2}{9}$.

18.

$$d(O,(ABCD)) = \frac{1}{2}a$$

$$\Rightarrow V_{OBCD} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.S_{BCD} = \frac{1}{6}a.\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{12}a^3$$

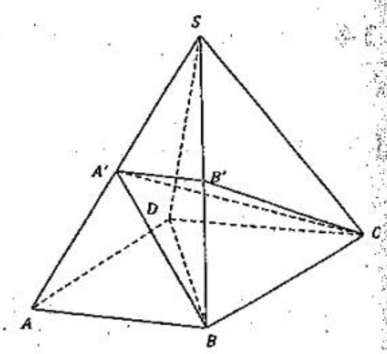
$$\Rightarrow \frac{V_{O.BCD}}{V} = \frac{1}{12}$$



19.

$$V_{A'B'BC} = V_{S.ABC} - V_{S.A'B'C'} - V_{A'.ABC}$$

$$= \frac{V}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{V}{2} - \frac{1}{2}.\frac{V}{2} = \frac{V}{8}$$

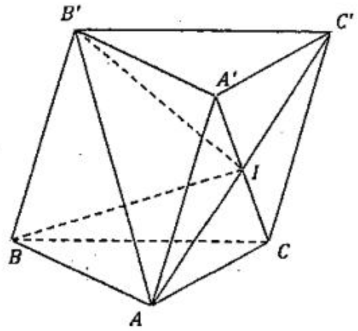


20.

$$V_{I.BAB'} = \frac{1}{2}V_{I.BAA'B'} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}V_{C.BAA'B'}$$

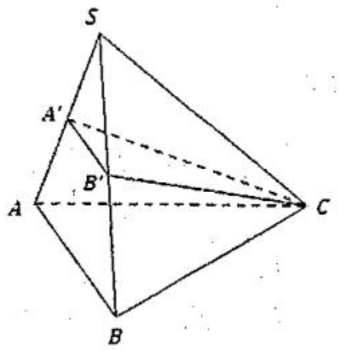
$$= \frac{1}{4}\left(V - V_{C.B'A'C'}\right) = \frac{1}{4}\left(V - \frac{1}{3}V\right)$$

$$= \frac{V}{6}$$



21. $V_{S.A'B'C''} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.V_{S.ABC} = \frac{1}{4}V$

Suy ra tỉ số thể tích của 2 phần là $\frac{1}{3}$



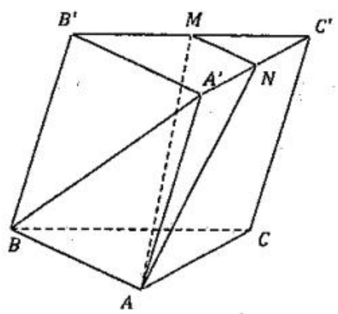
22.

$$V_{ABMB'A'N} = V_{ABNA'} + V_{B.A'B'MN}$$

$$= \frac{1}{2}V_{C'.ABA'} + \frac{3}{4}.\frac{1}{3}V$$

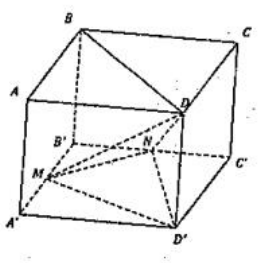
$$= \frac{1}{4}V_{C'.ABB'A'} + \frac{1}{4}V$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{2}{3}V + \frac{1}{4}V = \frac{5}{12}V$$



24.

$$V_{D.D'MN} = \frac{1}{3}DD'.S_{D'MN} = \frac{1}{3}DD'.\frac{3}{8}S_{A'B'C'D'} = \frac{V}{8}$$



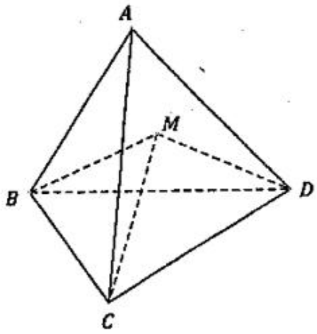
25. $d\left(A,(SBC)\right) = AH = \dfrac{AB.AS}{\sqrt{AB^2 + AS^2}} = \dfrac{12}{5}$.

26. $\dfrac{1}{3}\left(m_A + m_B + m_C + m_D\right)\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (áp dụng bài 6)

$\Rightarrow m_A + m_B + m_C + m_D = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

27. $\dfrac{xbc}{3} + \dfrac{yca}{3} + \dfrac{zab}{3} = \dfrac{abc}{3} \Rightarrow \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

28.



$\dfrac{x}{a} = \dfrac{V_{M.BCD}}{V_{ABCD}};\ \dfrac{y}{b} = \dfrac{V_{M.CDA}}{V_{B.CDA}};$

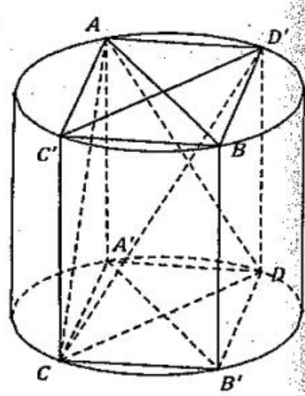
$\dfrac{z}{c} = \dfrac{V_{M.DAB}}{V_{C.DAB}};\ \dfrac{t}{d} = \dfrac{V_{MABC}}{V_{DABC}}.$

$\Rightarrow \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} + \dfrac{t}{d} = 1$

29. $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}d\left(S, ABCD\right).S_{ABCD} \le \dfrac{1}{3}.1.1 = \dfrac{1}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} SB \perp (ABCD) \\ SC \perp (ABCD) \\ SD \perp (ABCD) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$

30.



$V_{ABCD} = V_{AC'BD'.A'CB'D} - V_{A.A'DC} - V_{B.B'CD} - V_{C.C'AB} - V_{D.D'AB}$

$= xyh - 4\left(\dfrac{1}{3}h.\dfrac{1}{2}xy\right)$

$= \dfrac{1}{3}xyh \le \dfrac{1}{3}h\dfrac{x^2 + y^2}{2} = \dfrac{1}{3}h.\dfrac{(2R)^2}{2} = \dfrac{2}{3}R^2h$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow AB \perp CD \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

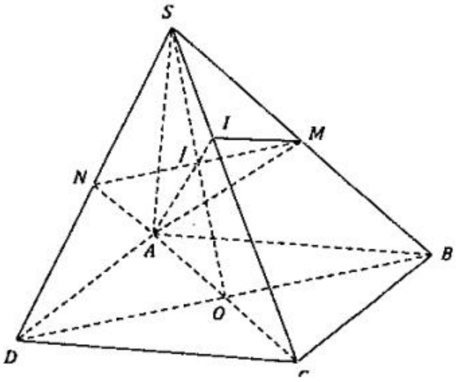
31. Áp dụng công thức $V=\frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha \le \frac{1}{6}AB.CD.d$

32.

$$AC=\sqrt{b^2+c^2};\frac{B'S}{B'B}=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow\frac{B'S}{SB}=\frac{a^2}{a^2+b^2};\frac{C'S}{C'C}=\frac{a^2}{b^2+c^2}\Rightarrow\frac{SC'}{SC}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{a^2}{a^2+b^2}.\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

33.



$$\frac{IC}{IS}.\frac{JS}{JO}.\frac{AO}{AC}=1$$

$$\Rightarrow\frac{IC}{IS}.1.\frac{1}{2}=1\Rightarrow\frac{IC}{IS}=2\Rightarrow\frac{IC}{SC}=\frac{1}{3}$$

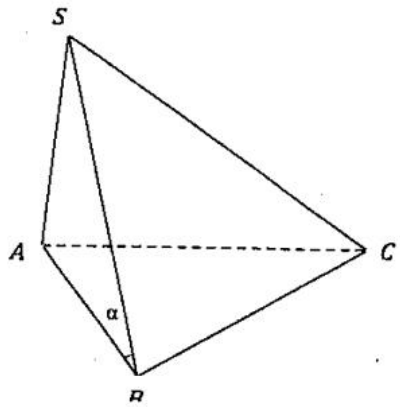
$$V_{AIMB}=V_{S.ABC}-V_{S.AMI}-V_{I.ABC}$$

$$=V_{S.ABC}-\frac{1}{3}\frac{1}{2}V_{S.ABC}-\frac{2}{3}V_{S.ABC}$$

$$=\frac{1}{6}V_{S.ABC}=\frac{1}{6}.\frac{1}{2}V_{S.ABD}=\frac{1}{12}.\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\frac{a^3}{36}$$

34. $SA=a.\sin\alpha$

$CS=a.\cos\alpha$



$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{ABC}=\frac{1}{3}a.\sin\alpha.\frac{1}{2}a^2.\cos^2\alpha$$

$$=\frac{1}{6}a^3.\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)=\frac{1}{6}a^3\left(\sin\alpha-\sin^3\alpha\right)$$

$$V_{Max}\Leftrightarrow\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(xét hàm $f(t)=t-t^3, t\in\left[0;1\right]$)

35.

$$S_{ADK}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.ADK}=\frac{1}{3}SA.S_{ADK}=\frac{1}{3}.a.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3}{6}$$

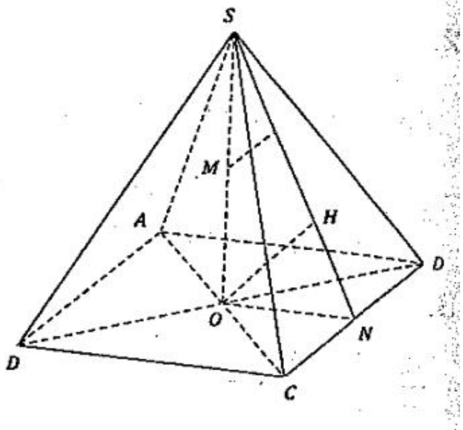
36. $ON = \frac{a}{2}$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OS^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{4b^2} - \frac{4}{a^2} = \frac{a^2 - 16b^2}{4a^2b^2}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}SO.a^2 = \frac{1}{3}\frac{2a^3b}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}.$$



Bài 4. Mặt tròn xoay

A. MẶT CẦU

1. Định nghĩa

Cho một điểm O cố định và một số thực dương R. Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách điểm O một đoạn bằng R được gọi là mặt cầu tâm O bán kính R. Như vậy mặt cầu tâm O, bán kính R là:

$$S(O;R) = \{M / OM = R\}$$

Vậy với 1 điểm A bất kỳ:

Nếu $OA < R$ thì A ở bên trong mặt cầu.

Nếu $OA = R$ thì A thuộc mặt cầu.

Nếu $OA > R$ thì A ở bên ngoài mặt cầu.

Nhận xét: Cho điểm M thuộc mặt cầu đường kính AB thì ta có $\widehat{AMB} = 90^0$

2. Vị trí tương đối

a. Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu S(O; R) và một mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P) và d = OH là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P). Ta có :

Với d > R thì mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) không có điểm chung.

Với d = R thì mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S). Khi đó ta gọi (P) là tiếp diện.

Với d < R thì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) với tâm H và bán kính r được xác định như sau:

- H là hình chiếu vuông góc của tâm O lên mp(P)
- Bán kính: $r = \sqrt{R^2 - OH^2}$.

b. Vị trí tương đối của mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu S(O; R) và đường thẳng (Δ). Gọi d = OH là khoảng cách từ O đến (Δ) thì ta có các trường hợp sau:

Với $d > R$ thì (Δ) và (S) không có điểm chung.

Với $d = R$ thì (Δ) tiếp xúc với (S).

Với d < R thì (Δ) cắt C tại hai điểm A, B phân biệt.

3. Các tính chất của tiếp tuyến

Định lý 1: Qua điểm A thuộc mặt cầu S(O; R) thì có vô số tiếp tuyến với mặt cầu (S). Tất cả các tiếp tuyến ấy đều nằm trong tiếp diện của (S) tại điểm A.

Định lý 2: Qua điểm A ở bên ngoài mặt cầu S(O; R) thì có vô số tiếp tuyến với mặt cầu (S). Độ dài các đoạn thẳng kẻ từ A tới các tiếp điểm đều bằng nhau.

4. Diện tích, thể tích

Diện tích của mặt cầu: $S = 4\pi.R^2$

Thể tích của khối cầu: $V = \frac{4\pi}{3}R^3$

5. Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

a. Đa diện có những mặt là tam giác vuông có chung cạnh huyền

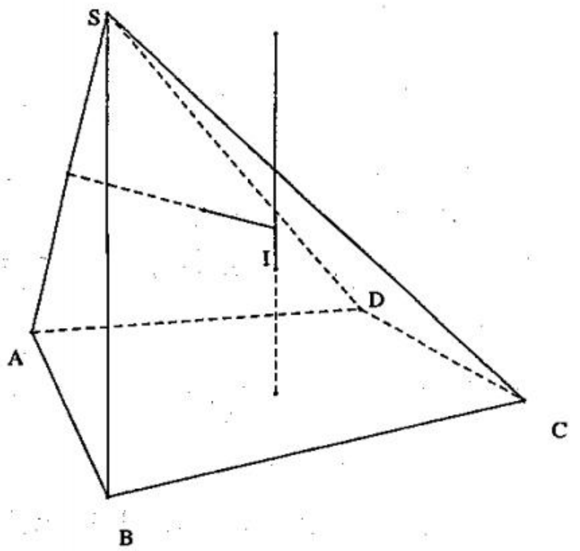
Khi đó tâm mặt cầu ngoại tiếp là trung điểm cạnh huyền và bán kính bằng $\frac{1}{2}$ độ dài cạnh huyền.

b. Đa diện là hình chóp S.ABCD (đây cũng là cách xác định chung cho hình chóp)

Bước 1. Dựng trục Δ của đường tròn ngoại tiếp mặt đáy (Δ vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại tâm đường tròn ngoại tiếp).

Bước 2. Dựng mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bên (nếu có cạnh bên đồng phẳng với Δ thì trong mặt phẳng ấy ta chỉ cần kẻ đường trung trực D. của cạnh bên).

Lấy giao điểm I của Δ với (P) (hoặc với D). Ta có I cách đều các đỉnh S, A, B, C, D nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.



c. Lăng trụ

Gọi O và O' là 2 tâm của 2 đáy. Có OO' $\perp$ hai đáy.

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đứng.

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1I = A_2I.....A_nI = A'_1I = A'_2I = ... = A'_nI & (1) \\ A_1I = A'_1I & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow I \in OO'$, $(2) \Rightarrow I \in (d)$ (với D là đường trung trực của AA_1' trong mặt phẳng (AA'_1OO').

Suy ra I là giao điểm của D và OO'.

Suy ra I là trung điểm của OO'.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với đáy. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Biết AC có độ dài là a, khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCMN$ là:

A. $\dfrac{a}{3}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\dfrac{a}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

$$\left.\begin{matrix} SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \\ BC \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$$

$$AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp CM$$

Suy ra ΔAMC vuông tại M.

Tương tự ta cũng có ΔANC vuông tại N, có ΔABC vuông tại B.

Vậy hình đa diện ABCMN nội tiếp trong mặt cầu đường kính AC, tâm I là trung điểm của AC và bán kính R = $\dfrac{a}{2}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABC có đường cao SA = a, đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là:

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{4}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{6}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Hướng dẫn giải

Gọi I là tâm tam giác ABC, qua I vẽ d // SA. Gọi H là trung điểm của SA, qua H vẽ d'//AI, $d \cap d' = I \Rightarrow$ I là tâm đường tròn ngoại tiếp với bán kính là $AI' = \sqrt{AI^2 + AH^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

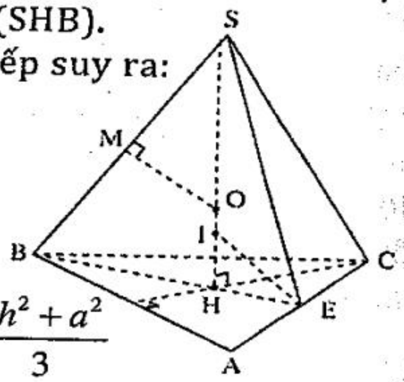
Ví dụ 3. Cho chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy AB = a, đường cao SH = h. Tính theo a và h bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $\frac{h^2+a^2}{6h}$ **B.** $\frac{3h^2+a^2}{2h}$ **C.** $R=\frac{3h^2+a^2}{4h}$ **D.** $R=\frac{3h^2+a^2}{6h}$

Hướng dẫn giải

Tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABC là giao điểm của trục SH và trung trực của cạnh SB thuộc mặt phẳng (SHB).

Gọi M là trung điểm SB. Tứ giác OMBH nội tiếp suy ra:



$$SO.SH = SM.SB = \frac{SB^2}{2}$$

$$\Rightarrow R = OS = \frac{SB^2}{2SH} \text{ trong đó:}$$

$$SB^2 = SH^2 + HB^2 = h^2 + \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{a^2}{3} = \frac{3h^2+a^2}{3}$$

Vậy bán kính hình cầu ngoại tiếp S.ABC là $R=\frac{3h^2+a^2}{6h}$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi mặt bên và đáy bằng 60^0. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

A. $\frac{5a}{12}$ **B.** $\frac{7a}{13}$ **C.** $\frac{7a}{12}$ **D.** $\frac{7a}{15}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức ở ví dụ 2. Như vậy, cần phải xác định chiều cao khối chóp

$$h = \frac{1}{3}AH.\tan 60^0 = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{a}{2}.$$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là:

$$R = \frac{3\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}{6.\frac{a}{2}} = \frac{7a}{12}. \text{ Đáp án: } \mathbf{C.}$$

Ví dụ 5. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi cạnh bên và đáy bằng 60^0. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

A. $\frac{2a}{5}$ **B.** $\frac{2a}{3}$ **C.** $\frac{3a}{5}$ **D.** $\frac{a}{3}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức ở ví dụ 2. Như vậy, cần phải xác định chiều cao khối chóp

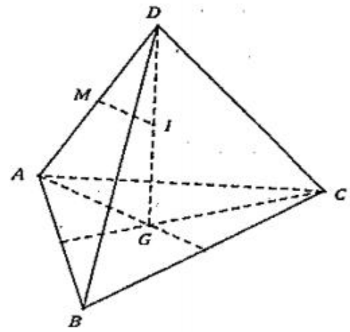
$$h = \frac{2}{3}AH.\tan 60^0 = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = a$$

Vậy, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là $R = \frac{3a^2 + a^2}{6.a} = \frac{2a}{3}$.

Ví dụ 6. Bán kính mặt cầu đi qua 4 đỉnh của tứ diện đều ABCD có cạnh a là:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{5}$

Hướng dẫn giải



Gọi G là trong tâm tam giác ABC, khi đó tâm I mặt cầu ngoại tiếp cần tìm là giao điểm giữa trục của tam giác ABC (đường thẳng đi qua G và vuông góc với (ABC)) với mặt phẳng trung trực AD.

Gọi M là trung điểm của AD. Ta có:

$$DM.DA = DI.DG \Rightarrow DO = \frac{DM.DA}{DH} = \frac{a\sqrt{6}}{4} = R.$$

Ví dụ 7. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh là a. Bán kính của nó là:

A. $\frac{a\sqrt{21}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{6}$ **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

Hướng dẫn giải

Gọi O, O' là tâm 2 tam giác ABC và A'B'C'.

Ta có tâm I mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ là trung điểm OO'.

Có bán kính:

$$IA = \sqrt{OA^2 + OI^2} = \sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3.2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{\frac{7}{12}} = a\frac{\sqrt{21}}{6}.$$

Ví dụ 8. Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có $AB = a$, mặt phẳng (A'BC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm của tam giác A'BC. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a là:

A. $R = \dfrac{6a}{11}$ **B.** $R = \dfrac{7a}{13}$ **C.** $R = \dfrac{7a}{11}$ **D.** $R = \dfrac{7a}{12}$

Hướng dẫn giải

Gọi $A'G \cap BC = M$

$\Rightarrow \begin{cases} A'M \perp BC \\ MA \perp BC \end{cases}$ (ΔABC cân tại A)

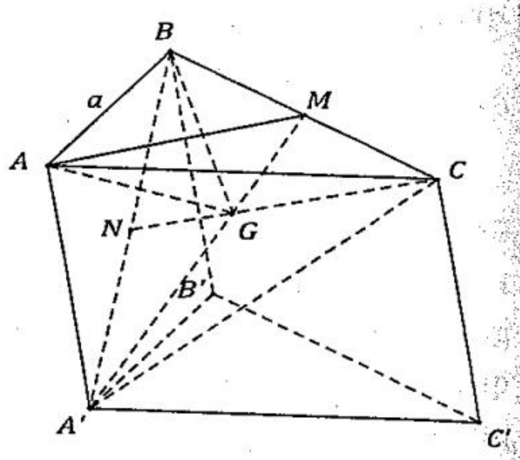
$\Rightarrow (\widehat{(A'BC),(ABC)}) = \widehat{AMA'} = 60^0$

Gọi G' là trọng tâm ΔABC

$\Rightarrow GG'//AA' \Rightarrow GG' \perp (ABC)$

Xét $\Delta GG'M$ vuông tại G'

Có góc (GMG') = 60^0



$$\Rightarrow GG' = G'M.\tan 60^0 = \frac{1}{3}AM.\tan 60^0 = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{a}{2}$$

Áp dụng công thức câu 3 $\Rightarrow R = \dfrac{7a}{12}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho tam giác ABC. Quỹ tích tâm các mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C là:

A. Đường thẳng vuông góc với $mp(ABC)$ tại trực tâm tam giác ABC.

B. Đường thẳng vuông góc với $mp(ABC)$ tại trọng tâm tam giác ABC.

C. Đường thẳng vuông góc với $mp(ABC)$ tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

D. Đường thẳng vuông góc với $mp(ABC)$ tại tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn điểm A, C, B', D'. Trong số các điểm B, C', D, điểm nào nằm trong mặt cầu (S)?

A. Điểm B **B.** Điểm C

C. Điểm D **D.** Không có điểm nào

3. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB. Điểm nằm trong mặt cầu (S) là:

A. Trung điểm cạnh BC B. Trung điểm cạnh CD

C. Trọng tâm tam giác BCD D. Trọng tâm tứ diện $ABCD$

4. Cho tứ diện đều $ABCD$, O là trung điểm cạnh AB. Gọi (S) là mặt cầu tâm O tiếp xúc với đường thẳng BC. Mệnh đề nào sau đay sai?

A. Mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng AD

B. Mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng AC

C. Mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng CD

D. Mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng BD

5. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào đúng?

A. Mọi hình chóp tam giác luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

B. Nếu hình chóp tứ giác có mặt cầu ngoại tiếp thì đáy của hình chóp phải là hình chữ nhật.

C. Hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác nội tiếp đường tròn.

D. Cả ba mệnh đè A,B,C đều đúng.

6. Mệnh đề nào sau đay sai ?

A. Mọi hình hộp chữ nhật luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

B. Hình lăng trụ đều luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

C. Hình chóp đều luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

D. Hình chóp cụt có mặt cầu ngoại tiếp khi mặt bên của nó là hình thang cân.

7. Cho tam giác vuông ABC với cạnh huyền $AB=a$. Mặt cầu đi qua ba điểm ABC có bán kính bé nhất bằng:

A. a B. $\dfrac{a}{2}$ C. $2a$ D. $\dfrac{3a}{2}$

8. Cho tam giác đều ABC cạnh a , mặt cầu đi qua ba điểm ABC có bán kính bé nhất bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ B. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

9. Cho tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau và $AB=a, BC=b, CD=c$. Đường kính mặt cầu đi qua bốn đỉnh A,B,C,D bằng:

A. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ B. $\sqrt{-a^2+b^2+c^2}$

C. $\sqrt{a^2-b^2+c^2}$ D. $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

10. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện đều cạnh a bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

11. Cho hình chóp $SABC$ có đường cao $SA = 2a$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{3}}{6}$

12. Cho hình chóp $SABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính bằng:

A. a **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

13. Mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương cạnh a có bán kính bằng:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

14. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng a và cạnh đáy là $a\sqrt{2}$. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính bằng:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

15. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh a. Gọi AH là đường cao của tứ diện và S là trung điểm đoạn thẳng AH. Mặt cầu đi qua bốn điểm S, B, C, D có bán kính bằng:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

16. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O và có cạnh bằng a. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $O.ABCD$ có bán kính bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **C.** $a\sqrt{2}$ **D.** $\frac{3a}{4}$

17. Cho tứ diện đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện tới mặt phẳng đi qua một mặt của tứ diện bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

18. Cho tứ diện đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện tới đường thẳng chứa một cạnh của tứ diện bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

19. Một tứ diện đều nội tiếp mặt cầu bán kính R thì cạnh của tứ diện đó bằng:

A. $\frac{2\sqrt{6}R}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}R}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}R}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}R}{3}$

20. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh a. Gọi O là trọng tâm tứ diện đó và (S) là mặt cầu tâm O bán kính $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Mặt phẳng (BCD) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

21. Một hình lập phương nội tiếp mặt cầu bán kính R thì cạnh của hình lập phương đó bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}R}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}R}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}R}{6}$ D. $\frac{\sqrt{3}R}{4}$

22. Một hình lập phương nội tiếp mặt cầu bán kính R. Khoảng cách từ tâm mặt cầu tới mặt phẳng chứa một mặt của hình lập phương bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}R}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}R}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}R}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}R}{6}$

23. Một hình lập phương nội tiếp mặt cầu bán kính R. Khoảng cách từ tâm mặt cầu tới đường thẳng chứa một mặt của hình lập phương bằng:

A. $\frac{\sqrt{6}R}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{3}R}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}R}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}R}{6}$

24. Một mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình lập phương cạnh a thì diện tích mặt cầu đó bằng:

A. πa^2 B. $4\pi a^2$ C. $2\pi a^2$ D. $2a^2$

25. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Một mặt cầu tiếp xúc với các đường thẳng AB, AC, AD lần lượt tại các điểm B, C, D. Bán kính mặt cầu đó bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ C. $a\sqrt{2}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

26. Cho hình tứ chop tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Một mặt cầu tiếp xúc với các đường thẳng SA, SB, SC, SD lần lượt tại các điểm A, B, C, D. Bán kính mặt cầu đó bằng:

A. a **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a\sqrt{2}$

27. Một hình bát diện đều cạnh a có nội tiếp được một mặt cầu hay không? Nếu có thì bán kính R của mặt cầu đó bằng bao nhiêu?

A. Không **B.** Có, $R = a$

C. Có, $R = a\sqrt{2}$ **D.** Có, $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

28. Cho hình bát diện đều cạnh a. Có hay không một mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của bát diện đó? Nếu có thì bán kính R của mặt cầu đó bằng bao nhiêu?

A. Không có **B.** Có, $R = \frac{a}{2}$

C. Có, $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** Có, $R = a\sqrt{2}$

29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một mặt cầu tiếp xúc với ba đường thẳng AB, AD, AA' lần lượt tại các điểm B, D và A'. Bán kính mặt cầu đó bằng:

A. a **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a\sqrt{2}$

30. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một mặt cầu tiếp xúc với ba đường thẳng AC, AD', AB' lần lượt tại các điểm C, D' và B'. Bán kính mặt cầu đó bằng:

A. a **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $a\sqrt{2}$

31. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng a và cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

32. Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh bên bằng a và cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tới mặt phẳng (ABC) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **B .** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

33. Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh bên bằng a và cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tới mặt phẳng (SAB) bằng:

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{a}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

34. Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đó bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{21}a}{6}$ **D.** $\frac{\sqrt{21}a}{3}$

35. Khoảng cách từ điểm O tới mp (P) bằng 3. Mặt cầu tâm O bán kính 5 cắt mặt phẳng (P) theo đường tròn có bán kính bằng:

A. 4 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 2

36. Mặt cầu (S) ngoại tiếp hình lập phương ABCD. A'B'C'D' cạnh a. Khoảng cách từ tâm mặt cầu tới mặt phẳng (BDA') bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

37. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a và (S) là mặt cầu đi qua trung điểm các cạnh AB, BC, CA, DA. Bán kính mặt cầu bằng:

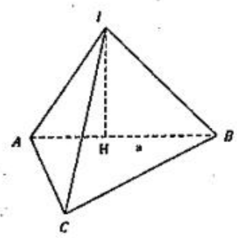
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. C	2. D	3. D	4. C	5. A	6. D	7. B	8. A	9. A	10. B
11. B	12. C	13. B	14. B	15. C	16. D	17. A	18. D	19. A	20. C
21. B	22. B	23. A	24. C	25. D	26. A	27. D	28. B	29. D	30. A
31. D	32. B	33. A	34. C	35. A	36. D	37. C			

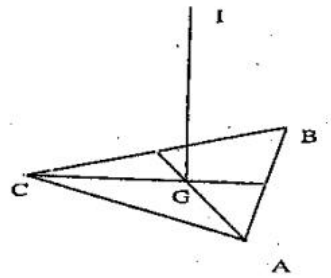
7.

$$IB = \sqrt{IM^2 + MB^2} \geq MB = \frac{9}{2}$$



$$\Rightarrow R_{\min} = \frac{a}{2}$$

8. $IC > GC = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

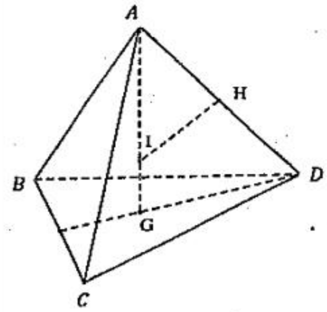


10. R=IA

$$GD = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow AG = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow AI.AG = AH.AD$$

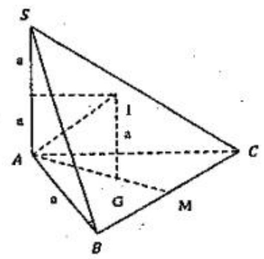
$$\Rightarrow AI.a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{6}}{4} = R$$



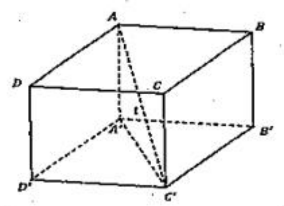
11.

$$AG = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow IA = \sqrt{IG^2 + AG^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$



13. $R = IA = \dfrac{1}{2}AC^2 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



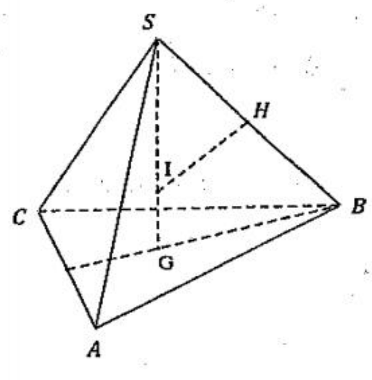
14.

$$BG = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow SG = \sqrt{SB^2 - BG^2}$$

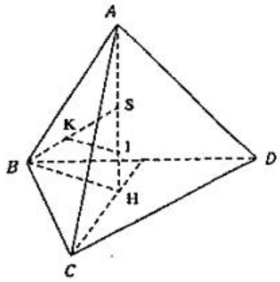
$$= \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

SI. SG = SH.SB

$$\Rightarrow SI.\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{3}}{2} = R$$



15.

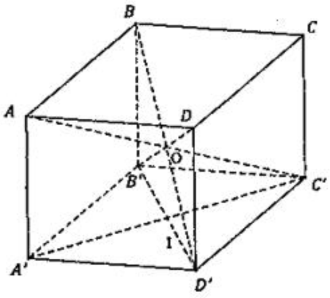


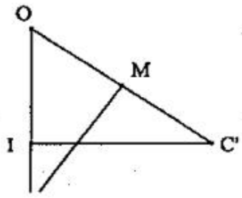
$$HC = HB = \frac{a}{\sqrt{3}};\ AH = \frac{1}{2}.AH = \frac{1}{2}.\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

$$SB^2 = \frac{2.\left(BH^2 + BA^2 - AH^2\right)}{4} = \frac{2.\left(\frac{a^2}{3} + a^2\right) - \frac{2a^2}{3}}{4} = \frac{a^2}{2}$$

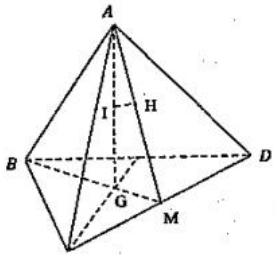
SI .SH = SK .SB $\Rightarrow SI.\frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}SB^2 = \frac{1}{2}.\frac{a^2}{2} \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{6}}{4} = R$

16. $OC' = \frac{a\sqrt{3}}{2};OI.OJ = OM.OC' \Rightarrow OJ.\frac{a}{2} = \frac{1}{2}.OC'^2 = \frac{1}{2}.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow OJ = \frac{3a}{4}$



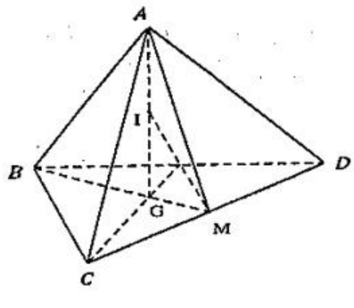


17. Áp dụng bài 10 ta có $AI = \frac{a\sqrt{6}}{4}$



$$\frac{IH}{GM} = \frac{AI}{AM} \Rightarrow \frac{IH}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{6}}{12} = r$$

18. Áp dụng bài 10



$AI = \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow IG = AG - AI$

$= a\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$

$\Rightarrow IH = \sqrt{IG^2 + GH^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{144} + \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

19. Áp dụng bài 10 ta có $R=\frac{a\sqrt{6}}{4}\Rightarrow a=\frac{4R}{\sqrt{6}}=\frac{2R\sqrt{6}}{3}$

20. $r=GM=\frac{a}{2\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

21. Áp dụng bài 13, $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a=\frac{2R}{\sqrt{3}}$

22. Áp dụng bài 21, $a=\frac{2R}{\sqrt{3}}\Rightarrow d=\frac{a}{2}=\frac{R}{\sqrt{3}}$

23. Áp dụng bài 21, $a=\frac{2R}{\sqrt{3}}\Rightarrow d=\frac{a}{2}.\sqrt{2}=\frac{2R}{\sqrt{6}}=\frac{R\sqrt{6}}{3}$

24. Mặt cầu tiếp xúc tất cả các cạnh của lập phương

$$\Leftrightarrow R-\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow S_c=4\pi R^2=4\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=2\pi a^2$$

$GD=\frac{a}{\sqrt{3}};AG=a\sqrt{\frac{2}{3}}$ mà AI.AG $=AD^2$

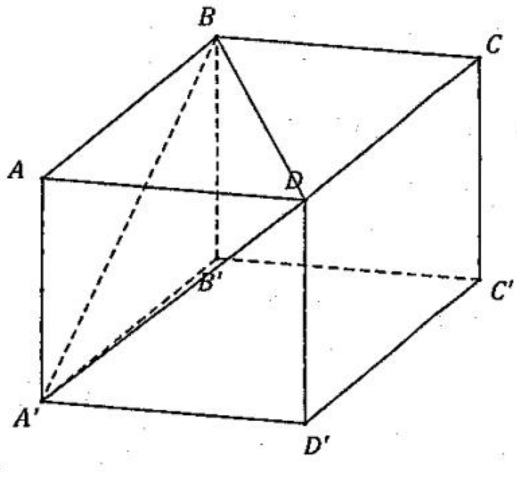
$$\Rightarrow AI.a\sqrt{\frac{2}{3}}=a^2\Rightarrow AI=a\sqrt{\frac{3}{2}}\Rightarrow ID=\frac{a}{\sqrt{2}}=R$$

26. IC = a = R

29.

$$OD=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{1}{OD^2}=\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DI^2}$$

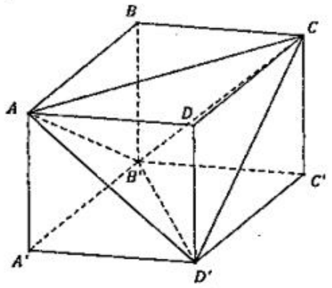
$$\Rightarrow\frac{1}{\frac{2a^2}{3}}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{R^2}\Rightarrow R=a\sqrt{2}$$



30.

Áp dụng bài 25,

$$R=a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=a$$



Áp dụng bài 25, $R=a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=a$

32. Áp dụng bài 14, $IG=\left|SG-IS\right|=\left|\frac{a}{\sqrt{3}}-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

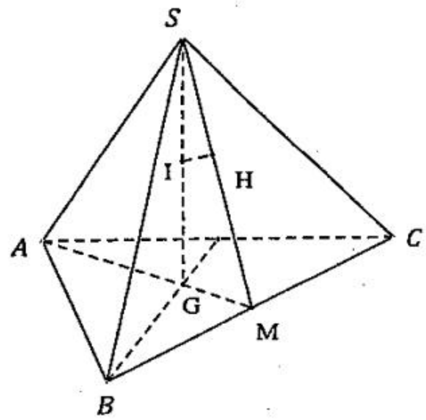
33.

Áp dụng bài 14:

$$SI=\frac{a\sqrt{3}}{2};SG=\frac{a}{\sqrt{3}};$$

$$SM=\sqrt{SC^2-CM^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

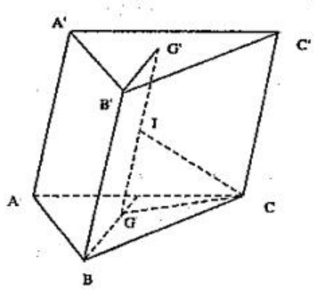
$$\frac{IH}{GM}=\frac{SI}{SM}\Rightarrow\frac{IH}{\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{a}{2}$$



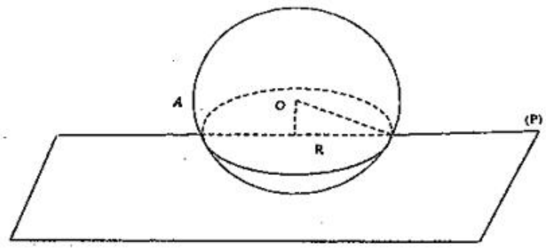
34.

$$GC=\frac{a}{\sqrt{3}};IG=\frac{a}{2}\Rightarrow IC=\sqrt{GC^2+IG^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{21}}{6}=R$$



35. $R=\sqrt{5^2-3^2}=4$

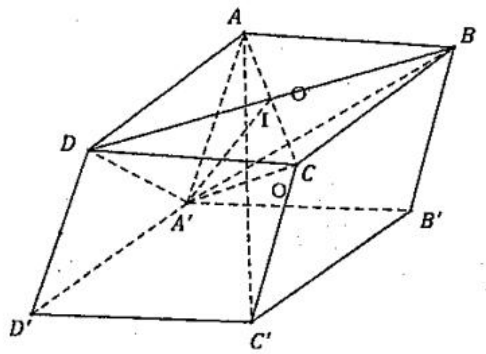


36. I là trọng tâm tam giác AA'C

$$\Rightarrow AI=2OI\Rightarrow d\left(O;BDA'\right)=\frac{1}{2}d\left(A;DBA'\right)=\frac{1}{2}h$$

Áp dụng công thức tứ diện vuông

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}\Rightarrow h=\frac{a}{\sqrt{3}}\Rightarrow d\left(O;BDA'\right)=\frac{a}{2\sqrt{3}}$$



37. Áp dụng bài 18, $\Rightarrow R=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

B. MẶT TRỤ

1. Định nghĩa

Mặt trụ tròn xoay

Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng d và Δ có $d /\!/ \Delta$ và cách nhau một đoạn là R. Khi quay (P) quanh Δ thì d tạo nên mặt trụ tròn xoay có trục là Δ, d là đường sinh.

Hình trụ tròn xoay

Cho hình chữ nhật ABCD quay quanh cạnh AB thì đường gãy khúc (AD, DC, CB) sẽ tạo nên hình trụ có trục (hay là đường cao) là AB, đường sinh là CD và bán kính đáy là BC.

Khối trụ tròn xoay

Phần không gian giới hạn bởi một hình trụ (và cả hình trụ ấy) xác định một khối trụ tương ứng.

Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi R.h$

Thể tích khối trụ: $V = \pi R^2 h$

Trong đó: R là bán kính đường tròn đáy, h là độ dài đường cao.

Ví dụ 1. Trong không gian cho hai điểm cố định là A và B. Tập hợp các điểm M sao cho tam giác AMB có diện tích S không đổi là:

A. Mặt trụ có trục là đường thẳng AB và có bán kính đáy là $R = \dfrac{S}{AB}$

B. Mặt trụ có trục là đường thẳng AB và có bán kính đáy là $R = \dfrac{2S}{AB}$

C. Mặt trụ có trục là đường thẳng AB và có bán kính đáy là $R = \dfrac{3S}{AB}$

D. Mặt trụ có trục là đường thẳng AB và có bán kính đáy là $R = \dfrac{4S}{AB}$

Hướng dẫn giải

Ta có $S_{ABM} = \dfrac{1}{2}AB.d(M, AB) \Rightarrow d(M, AB) = \dfrac{2S}{AB}$.

Tập hợp các điểm M sao cho tam giác AMB có diện tích S không đổi là tập các điểm M cách đều AB một khoảng $\dfrac{2S}{AB}$. Đó chính là Mặt trụ có trục là đường thẳng AB và có bán kính đáy là $R = \dfrac{2S}{AB}$.

Ví dụ 2. Cho hình trụ có bán kính đáy là R = 2 cm, chiều cao là h = 3 cm. Diện tích toàn phần của hình trụ là:

A. 10π **B.** 12π **C.** 20π **D.** 16π

Hướng dẫn giải

$$S_{TP} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi Rh + 2.\pi R^2 = 2\pi.2.3 + 2.\pi 2^2 = 20\pi$$

Ví dụ 3. Cho hình trụ có diện tích xung quanh là 20π và chiều cao là h = 5. Tính thể tích của khối trụ:

A. 50π **B.** 100π **C.** 25π **D.** 20π

Hướng dẫn giải

Gọi R là bán kính đáy.

Hình trụ có diện tích xung quanh là $20\pi \Rightarrow 20\pi = 2\pi R.5 \Rightarrow R = 2$.

Vậy, thể tích của khối trụ:

$$V = \pi R^2.h = \pi.4.5 = 20\pi.$$

Ví dụ 4. Cho hình trụ có bán kính đáy là R = 5cm, thể tích là V = 100π (cm³). Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục hình trụ thì có một hình chữ nhật ABCD với A, B thuộc đường tròn đáy tâm O với $\widehat{AOB} = 120^0$. Diện tích của thiết diện (cm^2) là:

A. $5\sqrt{3}$ **B.** $10\sqrt{3}$ **C.** 20 **D.** $20\sqrt{3}$

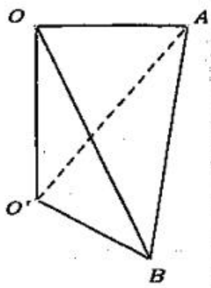
Ví dụ 5. Cho khối trụ có đáy là các đường tròn tâm (O), (O') có bán kính là R và chiều cao $h = R\sqrt{2}$. Gọi A, B lần lượt là các điểm thuộc (O) và (O') sao cho OA vuông góc với O'B. Tỉ số thể tích của khối tứ diện OO'AB với thể tích khối trụ là:

A. $\frac{1}{2\pi}$ **B.** $\frac{1}{6\pi}$ **C.** $\frac{1}{3\pi}$ **D.** $\frac{5}{6\pi}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$O'B \perp (O'OA) \Rightarrow V_{O'OAB} = \frac{1}{3}O'B.S_{OO'A} = \frac{1}{3}.R.\frac{1}{2}R.R\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}R^3$$



Thể tích khối trụ $V_{Tr} = R\sqrt{2}.\pi R^2 = R^3\pi\sqrt{2}$

Vậy thể tỉ số cần tìm là $\frac{V_{O'OAB}}{V_{Tr}} = \frac{1}{6\pi}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho mặt trụ tròn xoay (T), trục là Δ. Một mặt phẳng (α) vuông góc với Δ sẽ cắt mặt trụ tròn xoay theo một giao tuyến là:

A. Đường tròn **B.** Elíp **C.** Parabol **D.** Hypebol

2. Cho hai điểm A, B cố định. Tập hợp những điểm M trong không gian sao cho diện tích tam giác MAB không đổi là:

A. Mặt nón có trục AB

B. Mặt trục có trụ AB và bán kính $R = \frac{2S}{AB}$

C. Hình trụ có chiều cao AB

D. Một đáp số khác

3. Một khối trụ có bán kính đáy $r = 7cm$, khoảng cách hai đáy bằng $10cm$. Khi cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục cách trục $5cm$ thì diện tích của thiết diện là:

A. $S = 34\,cm^2$ **B.** $S = 36\,cm^2$ **C.** $S = 21\sqrt{31}\,cm^2$ **D.** $S = 40\sqrt{6}\,cm^2$

4. Cho hình trụ có bán kính đáy là đường sinh $l = 10cm$. Khi đó diện tích xung quanh của hình trụ là:

A. $S_{xq} = 60\pi\, cm^2$ **B.** $S_{xq} = 70\pi\, cm^2$

C. $S_{xq} = 80\pi\, cm^2$ **D.** $S_{xq} = 90\pi\, cm^2$

5. Cho hình trụ có bán kính đáy là $R = 2cm$; diện tích xung quanh $S_{xq} = 32\pi\, cm^2$. Khi đó độ dài đường sinh là:

A. $l = 6cm$ **B.** $l = 8cm$ **C.** $l = 10cm$ **D.** $l = 12cm$

6. Cho hình trụ có đường sinh $l = 8cm$, diện tích xung quanh $S_{xq} = 44\pi\, cm^2$ Khi đó bán kính đáy là:

A. $R = \frac{11}{3}cm$ **B.** $R = 4\,cm$ **C.** $R = 4,5\,cm$ **D.** $R = \frac{11}{4}\,cm$

7. Cho hình trụ có bán kính đáy là $R = 3cm$, đường sinh $l = 5cm$. Diện tích toàn phần của hình trụ là:

A. $S_{tp} = 34\pi cm^2$ **B.** $S_{tp} = \frac{62}{3}\pi cm^2$

C. $S_{tp} = 48\pi cm^2$ **D.** $S_{tp} = 64\pi cm^2$

8. Cho hình trụ có đường sinh $l = 2cm$, diện tích toàn phần $S_{tp} = \frac{\pi}{2}\,cm^2$. Bán kính của trụ là:

A. $R = 1\,cm$ **B.** $R = 1 + \sqrt{2}\,cm$

C. $R = \frac{\sqrt{20} + 4}{4}\,cm$ **D.** $R = \frac{\sqrt{20} - 4}{4}\,cm$

9. Cho một mặt cầu có bán kính R và một hình trụ có bán kính đáy $2R$ và chiều cao là $3R$. Khi đó tỉ số giữa diện tích mặt cầu và diện tích xung quanh của hình trụ là:

A. $\frac{S_c}{S_t} = 1$ **B.** $\frac{S_c}{S_t} = \frac{1}{2}$ **C.** $\frac{S_c}{S_t} = \frac{1}{3}$ **D.** $\frac{S_c}{S_t} = \frac{4}{3}$

10. Một kình trụ có bán kính đáy là a và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Diện tích toàn phần của hình trụ là:

A. $S_{tp} = 2\pi a^2$ **B.** $S_{tp} = 4\pi a^2$ **C.** $S_{tp} = 6\pi a^2$ **D.** $S_{tp} = 8\pi a^2$

11. Một hình trụ có bán kính đáy $R = 2cm$ và đường cao $2\sqrt{3}cm$, A và B là hai điểm trên hai đường tròn đáy sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ là 30^o

11.1 Diện tích toàn phần của hình trụ là:

A. $S_{tp} = 8\pi\, cm^2$ **B.** $S_{tp} = \left(8\pi + \sqrt{3}\right) cm^2$

C. $S_{tp} = 8\pi\sqrt{3}\, cm^2$ **D.** $S_{tp} = 8\pi\left(1 + \sqrt{3}\right) cm^2$

11.2 Khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ là:

A. $d = \sqrt{2}\, cm$ **B.** $d = \sqrt{3}\, cm$ **C.** $d = 2cm$ **D.** $d = \sqrt{5}\, cm$

12. Thể tích khối trụ có bán kính đáy $R = 2cm$, đường cao $h = 3cm$ là:

A. $V = 6\pi\, cm^3$ **B.** $V = 8\pi\, cm^3$

C. $V = 12\pi\, cm^3$ **D.** $V = 16\pi\, cm^3$

13. Cho khối trụ có thể tích $V = 64cm^3$, bán kính đáy $R = 8cm$. Đường cao của khối trụ là:

A. $h = \dfrac{1}{\pi} cm$ **B.** $h = \dfrac{2}{\pi} cm$ **D.** $h = \dfrac{4}{\pi} cm$ **D.** $h = \dfrac{8}{\pi} cm$

14. Cho mặt cầu bán kính R và một hình trụ có bán kính $2R$ và chiều cao $\dfrac{3R}{2}$. Khi đó tỉ số thể tích của khối cầu và khối trụ tương ứng là:

A. $\dfrac{V_c}{V_t} = \dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{V_c}{V_t} = \dfrac{1}{3}$ **C.** $\dfrac{V_c}{V_t} = \dfrac{2}{3}$ **D.** $\dfrac{V_c}{V_t} = \dfrac{2}{7}$

15. Một hình trụ có bán kính đáy $2cm$ và có thiết diện qua trục là một hình vuông có thể tích là:

A. $V = 6\pi\, cm^3$ **B.** $V = 10\pi\, cm^3$

C. $V = 16\pi\, cm^3$ **D.** $V = 20\pi\, cm^3$

16. Thể tích của khối lăng trụ tứ giác ngoại tiếp khối trụ có bán kính đáy $2cm$ và có thiết diện qua trục là một hình vuông:

A. $V = 32\ cm^3$ **B.** $V = 36 cm^3$ **C.** $V = 64 cm^3$ **D.** $V = \dfrac{72}{3}\ cm^3$

17. Cho hình lăng trụ xoay tròn, bán kính đáy là R , đường cao $OO' = h$ (O và O' là tâm của các đáy). AB là một đường kính di động của đường tròn (O), CD là một đường kính cố định của đường tròn (O'), gọi α là góc giữa AB và CD. Diện tích tam giác ACD là:

A. $dt(\Delta ADC) = \sqrt{h^2 + R^2 \sin^2 \alpha}$ **B.** $dt(\Delta ADC) = R\sqrt{h^2 + R^2 \sin^2 \alpha}$

C. $dt(\Delta ADC) = R\sqrt{h^2 + R^2 \sin \alpha}$ **D.** $dt(\Delta ADC) = R\sqrt{h + R^2 \sin^2 \alpha}$

18. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' bán kính R, chiều cao $R\sqrt{2}$. Trên hai đường tròn (O) và (O') có hai điểm A, B di động sao cho OA và $O'B$ hợp với nhau một góc α không đổi. Độ dài của đoạn AB là:

A. $AB = 2R$ **B.** $AB = \sqrt{\frac{1}{2} + \sin^2 \alpha}$

C. $AB = R \sin \alpha$ **D.** $AB = 2R\sqrt{\frac{1}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$.

19. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Một mặt trụ đi qua hai điểm A, B và có một đường sinh là CD. Khi đó trục của mặt trụ là đường thẳng đi qua:

A. Trung điểm AC

B. Trung điểm AB

C. Trung điểm BC

D. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM, trong đó M là trung điểm CD

20. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Có bao nhiêu mặt trụ tròn xoay đi qua đỉnh B, C, D, A', B', D'?

A. Không có **B.** Có 1 **C.** Có 2 **D.** Có 4

21. Cho lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Thể tích của hình trụ ngoại tiếp lăng trụ đó bằng:

A. $\frac{3\pi a^3}{4}$ **B.** $\frac{\pi a^3}{3}$ **C.** $\frac{3\pi a^3}{2}$ **D.** $\frac{2\pi a^3}{3}$

22. Tỉ số thể tích hình cầu và thể tích hình trụ cùng ngoại tiếp một hình lập phương bằng:

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** π

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1.A	2.B	3.C	4.C	5.B	6.D	7.C	8.D	9.C	10.C
11.1.D	11.2.B	12.C	13.A	14.D	15.C	16.C	17.B	18.D	19.D
20.D	21.B	22.C							

3. $x = \sqrt{7^2 - 5^2} = 2\sqrt{6} \Rightarrow S_{\text{thiết diện}} = 2x.10 = 40\sqrt{6}$

4. $S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi.4.10 = 80\pi\left(cm^2\right)$

5. $S_{xq} = 2\pi Rl \Rightarrow 32\pi = 2\pi.2.l \Rightarrow l = 8\left(cm\right)$

6. $S_{xq} = 2\pi Rl \Rightarrow 44\pi = 2\pi.R.8 \Rightarrow R = \frac{11}{4}(cm)$

7. $S_{tp} = 2\pi.R.l + 2\pi.R^2 = 2\pi.3.5 + 2\pi.3^2 = 48\pi\left(cm^2\right)$

8. $S_{tp} = 2\pi.R.l + 2\pi.R^2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 2\pi.R.2 + 2\pi.R^2 \Rightarrow 4R^2 + 8R = 1$

$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{5}-2}{2} = \frac{\sqrt{2a}-4}{4}\ (cm)$

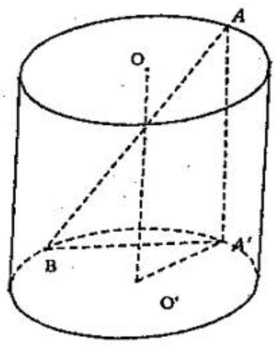
9. $S_c = 4\pi.R^2;\ S_{xq} = 2\pi.2R.3R = 12\pi R^2 \Rightarrow \frac{S_c}{S_{xq}} = \frac{1}{3}$

10. Thiết diện qua trục là hình vuông

$\Rightarrow l = 2R = 2a \Rightarrow S_{tp} = 2\pi.R.l + 2\pi R^2 = 2\pi.a.2a + 2\pi.a^2 = 6\pi a^2$

11.1 $S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = 2\pi.2.2\sqrt{3} + 2\pi.2^2 = 8\pi\left(1+\sqrt{3}\right)\left(cm^2\right)$

11.2 BA' = 2; $d\left(OO';AB\right) = d\left(OO';\widehat{ABA'}\right) = \sqrt{3}$



12. $V = \pi R^2 h = \pi.2^2.3 = 12\pi\left(cm^2\right)$

13. $V = \pi R^2 h \Rightarrow 64 = \pi.8^2.h \Rightarrow h = \frac{1}{\pi}(cm)$

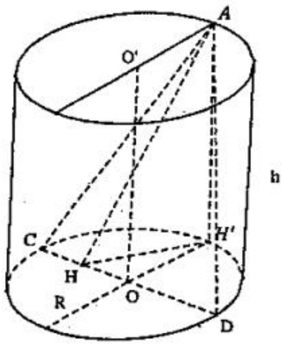
14. $V_x = 4\pi R^2; V_t = 2\pi.2R.\frac{3R}{2} + 2\pi(2R)^2 = 14\pi R^2 \Rightarrow \frac{V_c}{V_t} = \frac{2}{7}$

15. Thiết diện là hình vuông $\Rightarrow h = 2R = 4\ (cm)$

$\Rightarrow V = \pi R^2 h = \pi.2^2.4 = 16\pi\left(cm^3\right)$

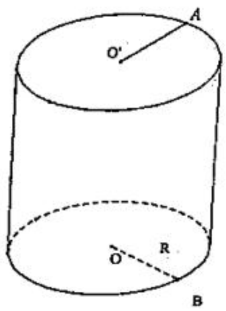
16. $V=(2R)^3=4^3=64$

17. $AH-\sqrt{AH'^2+HH'^2}=\sqrt{h^2+R^2\sin^2\alpha}$; $S_{ADC}=\frac{1}{2}.CD.AH=R\sqrt{h^2.R^2.\sin^2\alpha}$



18. Cho AB // OO' $\Rightarrow AB=R\sqrt{2};\alpha=0$. Thay vào 4 đáp án, thấy chỉ có đáp án **D** thỏa mãn.

$R\sqrt{2}$



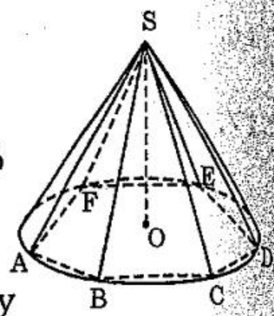
1. $R=\frac{a}{\sqrt{3}};h=a\Rightarrow V=\pi R^2h=\pi.\frac{a^3}{3}.a=\frac{\pi.a^3}{3}$

2. $V_c=\frac{4}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{\pi.a^3\sqrt{3}}{2};V_t=\pi.\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2.a=\frac{\pi.a^3}{2}\Rightarrow\frac{V_c}{V_t}=\sqrt{3}$

C. MẶT NÓN

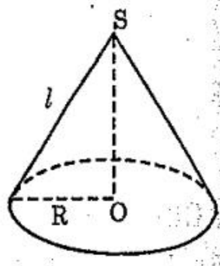
1. Mặt nón tròn xoay

Định nghĩa: Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng l và Δ cắt nhau tại O và tạo với nhau một góc α, trong đó $0^0 < \alpha < 90^0$.



Cho (P) quay quanh Δ thì d tạo nên mặt nón tròn xoay với trục là Δ và d là đường sinh, O là đỉnh, 2α là góc ở đỉnh.

2. Hình nón tròn xoay và khối nón tròn xoay:



Xét tam giác OAB vuông ở A. Khi quay xung quanh đường thẳng OA, đường gãy khúc (OB, AB) tạo nên một hình nón có đỉnh là O, trục (hay đường cao) là OA, bán kính đáy là OB và đường sinh là AB.

Phần không gian giới hạn bởi một hình nón (và kể cả hình nón ấy) được gọi là khối nón.

Diện tích xung quanh của hình nón:

Diện tích xung quanh của hình nón bằng tích số của nửa chu vi đáy với đường sinh.

Do đó ta có: $\boxed{S_{xq} = \pi.R.l}$

Trong đó R là bán kính đáy của hình nón, l là đường sinh.

3. Thể tích khối nón

Thể tích của khối nón bằng một phần ba tích số của diện tích mặt đáy với chiều cao.

Ta có $V = \frac{1}{3}\pi.R^2.h$, trong đó: R là bán kính đáy, **h** là chiều cao của hình nón.

Ví dụ 1. Cho hình có đỉnh là S, đường cao là S0 và A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy. Cho biết a là khoảng cách từ O tới AB và $\widehat{SAO} = 30^0; \widehat{SAB} = 60^0$.

Độ dài đường sinh là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{3}a$ **D.** $2\sqrt{2}a$

Hướng dẫn giải

$SA = SB$, góc $SAB = 60^0 \Rightarrow SAB$ là tam giác đều $\Rightarrow AB = l$

$AO = l.\cos 30^0$, có $d(O,AB)^2 = \left(AO - \left(\frac{AB}{2}\right)\right)^2 \Rightarrow l = a\sqrt{2}$

Ví dụ 2. Cho hình nón có bán kính đáy là 25 cm, chiều cao là 20 cm. Diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng qua đỉnh hình nón và cách tâm mặt đáy một đoạn bằng 12 cm là:

A. $300 cm^2$ **B.** $400 cm^2$ **C.** $500 cm^2$ **D.** $600 cm^2$

Hướng dẫn giải

OI= $d(O,(P)) = 12cm$

OJ= $d(O,(AB)) = \frac{SO.OI}{\sqrt{SO^2 - 0I^2}} = 15cm$

JB= $\sqrt{OB^2 - OJ^2} = 20cm$ SJ= $\sqrt{SO^2 + OJ^2} = 25cm$

$\Rightarrow S_P = \frac{1}{2} SJ.AB = SJ.JB = 500cm^2$

Ví dụ 3. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân với cạnh góc vuông là a

a) Thể tích khối nón là:

A. $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$ **C.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$ **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$

b) Diện tích toàn phần của hình nón là:

A. $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ **C.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ **D.** π

c) Diện tích thiết diện(P) qua đỉnh hình nón và tạo với đáy một góc 60^0 là:

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$

Hướng dẫn giải

a) Có $R = \frac{\sqrt{SA^2 + SB^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $h = \sqrt{SA^2 - R^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}$

b) $S_{xq} = \pi Rl = \frac{\pi}{2} \Rightarrow S_{tp} = \pi$

c) Gọi J là trung điểm AB,

$$OJ = h.\cot 60^0 = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow SJ = \frac{a\sqrt{6}}{3}, JB = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{(P)} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

Ví dụ 4. Cho hình nón có đường sinh với độ dài là a và α là góc giữa đường sinh với mặt đáy.

a) Thể tích khối nón là

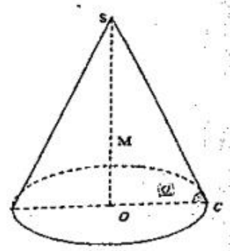
A. $\frac{1}{3}\pi a^3\cos^2\alpha\sin\alpha$ **B.** $\frac{1}{3}\pi a^3\cos^2\alpha\sin^2\alpha$

C. $\frac{1}{3}\pi a^3\cos\alpha\sin^2\alpha$ **D.** $\frac{2}{3}\pi a^3\cos^2\alpha\sin^2\alpha$

b) Diện tích xung quanh của khối nón là

A. $\frac{1}{3}\pi\cos\alpha.a^2$ **B.** $\pi\cos\alpha.a^2$ **C.** $\frac{1}{3}\pi\sin\alpha.a^2$ **D.** $\pi\sin\alpha.a^2$

Hướng dẫn giải



a) Có $R = a\cos\alpha, h = a\sin\alpha \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi a^3\cos^2\alpha\sin\alpha$

b) $S_{xq} = \pi Rl = \pi\cos\alpha.a^2$

Ví dụ 5. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy là a, mặt bên tạo với đáy một góc là 45^0. Diện tích xung quanh của hình nón nội tiếp trong hình chóp là:

A. $\frac{1}{3}\pi\sqrt{2}a^2$ **B.** $\frac{1}{6}\pi\sqrt{2}a^2$ **C.** $\frac{1}{12}\pi\sqrt{2}a^2$ **D.** $\frac{1}{24}\pi\sqrt{2}a^2$

Hướng dẫn giải

Gọi r là bán kính đường tròn nối tiếp ABC

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow h = r\tan 45^0 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow S_{xq} = \pi rl = \pi r.\sqrt{h^2 + r^2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}a^2$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Một mặt nón xoay có bao nhiêu đường sinh?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** Vô số

2. Cho một mặt nón tròn xoay N có trục là Δ, đỉnh O. Một mặt phẳng (α) không đi qua O và vuông góc với Δ sẽ cắt mặt nón N theo một giao tuyến là:

A. Một điểm **B.** Một đường tròn

C. Một elip **D.** Một parabol

3. Mọi mặt phẳng đi qua trục Δ cắt mặt nón N theo hai đường sinh tạo với nhau một góc α, nếu góc giữa Δ và đường sinh 1 là 30^0 thì giá trị của α là:

A. 15^o **B.** 30^o **C.** 60^o **D.** 90^0

4. Cho mặt nón N, một mặt phẳng (P) cắt mọi đường sinh của mặt nón thì giao tuyến của chúng là:

A. Đường thẳng **B.** Đường tròn **C.** Elíp **D.** Parabol

5. Cho mặt nón N, một mặt phẳng (P) cắt mặt nón và (P) song song với một đường sinh duy nhất thì giao tuyến của chúng là:

A. Đường tròn **B.** Elíp **C.** Parabol **D.** Đường thẳng

6. Cho hình nón có bán kính $R = 2cm$, đường sinh $l = 4cm$. Khi đó diện tích xung quanh của hình nón là :

A. $2\pi cm^2$ **B.** $4\pi cm^2$ **C.** $6\pi cm^2$ **D.** $8\pi cm^2$

7. Cho hình nón có diện tích xung quanh là $S_{xq} = 12\pi cm^2$, đường sinh $l = 2cm$. Khi đó bán kính đáy của nón là:

A. $R = 4cm$ **B.** $R = 6cm$ **C.** $R = 8cm$ **D.** $R = 12cm$

8. Cho hình nón có diện tích xung quanh là $S_{xq} = 10\pi cm^2$, bán kính đáy $R = 3cm$. Khi đó đường sinh của hình nón là:

A. $l = \dfrac{10}{3} cm$ **B.** $l = 4cm$ **C.** $l = 6cm$ **D.** $R = l = 7cm$

9. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân cạnh huyền bằng $8cm$.

9.1. Diện tích xung quanh của hình nón là

A. $S_{xq} = 16\pi cm^2$ **B.** $S_{xq} = 16\sqrt{3}\pi cm^2$

C. $S_{xq} = 16\sqrt{2}\pi cm^2$ **D.** $S_{xq} = 16\sqrt{5}\pi cm^2$

9.2. Diện tích toàn phần của hình nón là

A. $S_{tp} = 16\pi(\sqrt{2} - 1)cm^2$ **B.** $S_{tp} = 16\pi(\sqrt{2} + 1)cm^2$

C. $S_{tp} = 16\pi(\sqrt{3} - 1)cm^2$ **D.** $S_{tp} = 16\pi(\sqrt{3} + 1)cm^2$

9.3. Thể tích của khối nón là

A. $V = \dfrac{37\pi}{3} cm^3$ **B.** $V = \dfrac{64\pi}{3} cm^3$ **C.** $V = \dfrac{74\pi}{3} cm^3$ **D.** $V = \dfrac{81\pi}{3} cm^3$

9.4. Một thiết diện qua đỉnh nón tạo với đáy một góc 60^o. Khi đó diện tích của thiết diện này là:

A. $S = \frac{32\sqrt{2}}{3}cm^2$ **B.** $S = \frac{41\sqrt{2}}{3}cm^2$

C. $S = \frac{44\sqrt{2}}{3}cm^2$ **D.** $S = \frac{45\sqrt{2}}{3}cm^2$

10. Cho hình nón có đường cao $SO = 4cm$ và bán kính đáy $R = 2cm$. Gọi M là một điểm trên đoạn OS, đặt $OM = xcm(0 < x < 4)$.

10.1. Diện tích của thiết diện (D) cắt bởi mặt phẳng đi qua M và vuông góc so với SO là:

A. $S = \frac{\pi}{4}(4-x)^2cm^2$ **B.** $S = \frac{\pi}{2}(4-x)^2cm^2$

C. $S = \pi(4-x)^2cm^2$ **D.** $S = \pi(4+x)^2cm^2$

10.2. Thể tích của khối nón (H) đỉnh S và đáy là thiết diện (D) là:

A. $V = \frac{1}{3}\pi(4-x)^3\ cm^3$ **B.** $V = \frac{1}{4}\pi(4-x)^3\ cm^3$

C. $V = \frac{1}{6}\pi(4-x)^3\ cm^3$ **D.** $V = \frac{1}{12}\pi(4-x)^3\ cm^3$

11. Cho hình cầu bán kính R, một hình nón xoay chiều cao x nội tiếp trong hình cầu. Thể tích của hình nón là:

A. $V = \frac{1}{6}\pi x^2(2R-x)$ **B.** $V = \frac{1}{3}\pi x^2(2R-x)$

C. $V = \frac{1}{4}\pi x^2(2R-x)$ **D.** $V = \frac{1}{12}\pi x^2(2R-x)$

12. Cho hình chóp cụt có chiều cao 4 và hai bán kính đáy lần lượt là 2 và 8.

12.1. Diện tích toàn phần của khối chóp là:

A. $S_{tp} = 4\pi(5\sqrt{13}+17)$ **B.** $S_{tp} = 2\pi(5\sqrt{13}+17)$

C. $S_{tp} = \pi(5\sqrt{13}+17)$ **D.** $S_{tp} = \frac{\pi}{12}(5\sqrt{13}+17)$

12.2. Thể tích của khối chóp cụt là

A. 112π **B.** $V = 932\pi$ **C.** $V = 896\pi$ **D.** $V = 1021\pi$

ĐÁP ÁN

1.D	2.B	3.C	4.C	5.C	6.C	7.B	8.A	9.1.C	9.2.B
9.3.D	9.4.A	10.1.A	10.2.D	11.B	12.1.A	12.2.A			

6. $S_{xq} = \pi rl = 8\pi(cm^2)$

7. Có $S_{xq} = \pi Rl \Leftrightarrow R = \dfrac{S_{xq}}{\pi l} = 6cm \Rightarrow$ **Đáp án: B**

8. $l = \dfrac{S_{xq}}{\pi R} = \dfrac{10}{3} \Rightarrow$ **Đáp án: A**

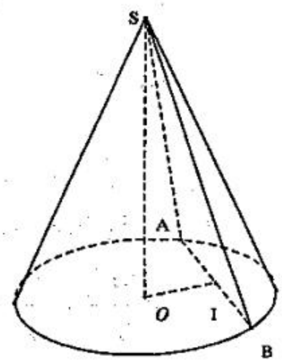
9. $2R = 8 \Leftrightarrow R = 4cm \Rightarrow l = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

a. $2R = 8 \Leftrightarrow R = 4cm \Rightarrow l = \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

b. $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 16\sqrt{2}\pi + \pi R^2 = 16\pi(\sqrt{2}+1)cm^2 \Rightarrow$ **Đáp án: B**

c. $V = \dfrac{1}{3}h.S_{đáy} = \dfrac{1}{3}.\sqrt{l^2 - R^2}.\pi R^2 = \dfrac{64\pi}{3}(cm^3)$

d.



Gọi các điểm như hình vẽ.

Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow$ OI $\perp$ AB.

Mà

SO $\perp$ AB $\Rightarrow$ AB $\perp$ (SOI)

$\Rightarrow \widehat{((SAB),(ABCD))} = (\widehat{SI,OI}) = \widehat{SIO} = 60^o$

$+ OI = h.\cot 60^o = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$+$ $SI = \dfrac{h}{\sin 60^o} = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}SI.AB = \dfrac{32\sqrt{2}}{3}$

Đáp án: A

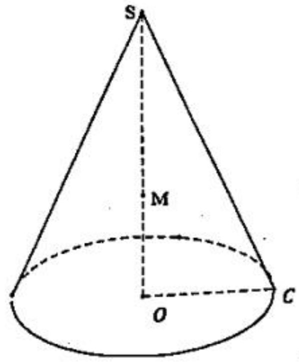
10.

10.1 $(P)\begin{cases}\text{qua M}\\ \perp \text{SO}\end{cases} \Rightarrow$ Thiết diện là đường tròn bán kính R'.

Có $\dfrac{R}{R'}=\dfrac{SM}{SO} \Leftrightarrow R'=\dfrac{2(4-x)}{4}=\dfrac{4-x}{2}$

$\Rightarrow S_{td}=\pi R'^2=\dfrac{\pi}{4}(4-x)^2(cm^2) \Rightarrow$ **Đáp án: D.**

10.2



$V_{(H)}=\dfrac{1}{3}.SM.S_{td}=\dfrac{1}{3}(4-x).\dfrac{\pi}{4}(4-x)^2$

$=\dfrac{\pi}{12}(4-x)^3(cm^3)$

Đáp án: **D**

11.

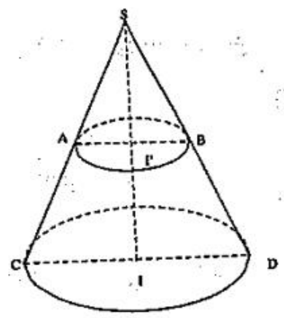
$R'^2=R^2-(x-R)^2=2Rx-x^2$

$\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}x.\pi R'^2=\dfrac{1}{3}x\pi(2Rx-x^2)=\dfrac{1}{3}\pi x^2(2R-x)$.

Đáp án: **B**

12.

12.1. Gọi $AC\cap BD=S$, (H) là hình chóp bé, (K) là hình chóp lớn.



$\dfrac{I'B}{ID}=\dfrac{SI'}{SI}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow II'=\dfrac{3}{4}SI\Rightarrow SI=\dfrac{16}{3}\Rightarrow SI'=\dfrac{4}{3}$.

Diện tích xung quanh của hình chóp cụt là :

$\pi.ID.SD-\pi.I'B.SB=\pi.20\sqrt{13}$.

Diện tích toàn phần của hình chóp cụt là :

$\pi 20\sqrt{13}+\pi.I'B^2+\pi.ID^2=4\pi(5\sqrt{13}+17)$

12.2. $V_{\text{chóp cụt}}=V_{(K)}-V_{(H)}=112\pi$

CHƯƠNG IV. TƯ DUY GIẢI NHANH MŨ VÀ LÔGARIT

Bài 1. Hàm số lôgarit và hàm số mũ

A. LÔGARIT

1. Định nghĩa:

Cho hai số dương a, b với a ≠ 1. Số c thỏa mãn đẳng thức $a^c = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu $\log_a b$.

Ta hiểu $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ với điều kiện a, b > 0 và a ≠ 1.

Nhận xét:

- Cho a, b > 0, a ≠ 1 thì ta có:

$\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $\log_a \frac{1}{a} = -1$, $\log_a a^x = x (x \in \mathbb{R})$, $a^{\log_a b} = b\ (b > 0)$.

- Cho a, b, c > 0 và c ≠ 1. Ta có: $\log_c a = \log_c b \Leftrightarrow a = b$

Nếu $c > 1 \Rightarrow \log_c a < \log_c b \Leftrightarrow a < b$.

Nếu $0 < c < 1 \Rightarrow \log_c a < \log_c b \Leftrightarrow a > b$.

Nếu $c > 1 \Rightarrow \log_c a > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

Nếu $0 < c < 1 \Rightarrow \log_c a > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$.

2. Các tính chất

Cho $a, b, c > 0,\ a \neq 1$. Ta có:

$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$; $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;

$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$; $\log_a b^c = c \log_a b$;

$\log_{10} x = \lg x = \log x$; $\log_e x = \ln x$;

$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$ (với $n \in \mathbb{N}^*$) $\log_{a^k} b = \frac{1}{k}.\log_a b\ (k \neq 0)$;

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Leftrightarrow \log_c a.\log_a b = \log_c b\ (c \neq 1)$;

$\log_a b = \log_{a^\alpha} b^\alpha$; $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ (với a > 0, b > 0, a ≠ 1, b ≠ 1).

Ví dụ 1. Tập giá trị của x để các biểu thức $\log_2\left(4-x^2\right)$ có nghĩa là:

A. $-2\le x\le 2, x\ne \pm 1$ **B.** $-2\le x\le 2, x\ne 1$

C. $-2\le x\le 2$ **D.** $-2<x<2$

Hướng dẫn giải

Ta có $\log_2\left(4-x^2\right)$ có nghĩa khi $4-x^2>0 \Leftrightarrow -2<x<2$

Đáp án: D.

Ví dụ 2. Để biểu thức $\log_{x+2}\left(x^2-1\right)$ có nghĩa thì điều kiện của x là:

A. $x>2$ **B.** $x>-2, x\ne 1$ **C.** $\left[\begin{array}{l}x>-2\\x>1\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}x>1\\-2<x<-1\end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

Biểu thức trên có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-1>0\\x+2>0\\x+2\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>1, x<-1\\x>-2\\x\ne -1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>1\\-2<x<-1\end{array}\right.$

Đáp án: D.

Ví dụ 3. Biểu thức $P=\left(\ln a+\log_a e\right)^2+\ln^2 a-\log_a^2 e$ sau khi rút gọn ta được:

A. $P=1$ **B.** $P=2\log_a e$

C. $P=2\ln a$ **D.** $P=2+2\ln^2 a$

Hướng dẫn giải

$P=\left(\ln a+\log_a e\right)^2+\ln^2 a-\log_a^2 e$

$=\ln^2 a+\log_a^2 e+\ln^2 a-\log_a^2 e+2\ln a.\log_a e=2+2\ln^2 a$

Cách khác, đặc biệt hóa gán $a=e$ khi đó ta có

$P=\left(\ln e+\log_e e\right)^2+\ln^2 e-\log_e^2 e=4+1-1=4$

Thấy chỉ có D thỏa mãn.

Đáp án: D.

Chú ý: Nếu thay $a=e$ vào các phương án A, B, C, D mà có các kết quả trùng thì ta chọn lại a bằng 1 giá trị khác, sẽ tìm được đáp án.

Ví dụ 4. Cho $a > 0,\ b > 0$ và thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Khi đó mệnh đề đúng là:

A. $\log\frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(2\log a + \log b)$ **B.** $\log\frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(3\log a + \log b)$

C. $\log\frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + 2\log b)$ **D.** $\log\frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$

Hướng dẫn giải

Ta có $a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow (a+b)^2 - 2ab = 7ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab$

$\Rightarrow \lg\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \lg(ab) \Leftrightarrow 2\lg\frac{a+b}{3} = \lg a + \lg b \Leftrightarrow \lg\frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$

Đáp án: **D.**

Ví dụ 5. Cho $m = log_2 3$ và $n = log_2 5$.

Giá trị của biểu thức $A = log_2 2250$ theo m, n là:

A. $1 + 2n + 2m$ **B.** $1 + n + 2m$ **C.** $1 + 2n + 3m$ **D.** $1 + 2m + 3n$

Hướng dẫn giải

Ta có $2250 = 2.9.125 = 2.3^2.5^3$

Do đó $A = \log_2 2250 = \log_2\left(2.3^2.5^3\right) = \log_2 2 + \log_2 3^2 + \log_2 5^3 = 1 + 2m + 3n.$

Đáp án: **D.**

Cách khác: Dùng máy tính Casio thay $m = log_2 3$ và $n = log_2 5$ vào các phương án để tìm kết quả.

B. HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LÔGARIT

1. Hàm số mũ

Cho a là một số thực dương và khác 1. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ với cơ số là a.

Đạo hàm của hàm số mũ: $\left(e^x\right)' = e^x$; $\left(a^x\right)' = a^x \ln a \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

Hàm số đồng biến khi $a > 1$; Hàm số nghịch biến khi $0 < a < 1$.

2. Hàm số lôgarit

Cho a là số thực dương và khác 1.

Hàm số $y = \log_a x$ *(với x > 0)* được gọi là hàm số lôgarit với cơ số a.

Đạo hàm của hàm số lôgarit: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ (với x > 0).

Với $a > 1 \Rightarrow$ hàm số đồng biến.

Với $0 < a < 1 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến.

Với hàm hợp, thì ta có $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$; $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$

Tổng quát:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}; \qquad (\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x\ln a}; \qquad (\log_a|u|)' = \frac{u'}{u\ln a}$$

Ví dụ 1. Đạo hàm của hàm số $y = 3^{\sin 2x}$ là:

A. $3\ln 3\cos 2x.3^{\sin 2x}$ **B.** $\ln 3\cos 2x.3^{\sin 2x}$

C. $2\ln 3\sin 2x.3^{\sin 2x}$ **D.** $2\ln 3\cos 2x.3^{\sin 2x}$

Hướng dẫn giải

$y' = \left(3^{\sin 2x}\right)' = 3^{\sin 2x}.(\sin 2x)'.\ln 3 = 2\ln 3\cos 2x.3^{\sin 2x}$

Đáp án: **D.**

Ví dụ 2. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2 x + \log_{\frac{1}{3}} x$ là

A. $\dfrac{1}{x\ln 2} + \dfrac{1}{x\ln 3}$ **B.** $\dfrac{\ln 2 + \ln 3}{x}$ **C.** $\dfrac{\ln 2 - \ln 3}{x}$ **D.** $\dfrac{1}{x\ln 2} - \dfrac{1}{x\ln 3}$

Hướng dẫn giải

$y' = \left(\log_2 x + \log_{\frac{1}{3}} x\right)' = \dfrac{1}{x\ln 2} + \dfrac{1}{x\ln\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{x\ln 2} - \dfrac{1}{x\ln 3}$. Đáp án **D.**

Ví dụ 3. Đạo hàm của hàm số $y = \ln\left(x^2 + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$ là:

A. $y' = \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+a^2}+1\right)}{\sqrt{x^2+a^2}.\left(x^2+\sqrt{x^2+a^2}\right)}$ **B.** $y' = \dfrac{x\left(\sqrt{x^2+a^2}+2\right)}{\sqrt{x^2+a^2}.\left(x^2+\sqrt{x^2+a^2}\right)}$

C. $y' = \dfrac{x\left(2\sqrt{x^2+a^2}+1\right)}{\sqrt{x^2+a^2}.\left(x^2+\sqrt{x^2+a^2}\right)}$ **D.** $y' = \dfrac{x\left(2\sqrt{x^2+a^2}+a\right)}{\sqrt{x^2+a^2}.\left(x^2+\sqrt{x^2+a^2}\right)}$

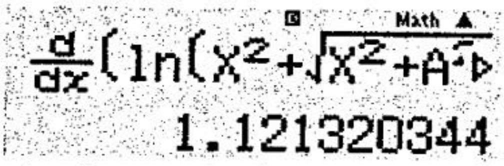
Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{\left(x^2+\sqrt{x^2+a^2}\right)'}{x^2+\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{2x+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x^2+\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x\left(2\sqrt{x^2+a^2}+1\right)}{\sqrt{x^2+a^2}.\left(x^2+\sqrt{x^2+a^2}\right)}$$

Đáp án: **C.**

Cách khác: Sử dụng máy tính Casio ta nhập hàm $\left.\dfrac{d\left(\ln\left(X^2+\sqrt{X^2+A^2}\right)\right)}{dx}\right|_{x=1}$

Dùng phím **CALC** gán: X = 1, A = 1, ta được kết quả:



Thay $x=1$, $a=1$ vào các phương án A, B, C, D. Thấy C có giá trị trùng với kết quả trên.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x-1}{x+5}}$ là:

A. $(1;+\infty)$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $(-5;+\infty)$ **D.** $(e;+\infty)$

2. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_5\dfrac{x^2+1}{x+3}\right)}$ là:

A. $(-4;-2)\cup(2;7)$ **B.** $(-2;-1)\cup(2;7)$

C. $(-3;-2)\cup(2;6)$ **D.** $(-3;-2)\cup(2;7)$

3. Tập xác định của hàm số $y=\log_2\sqrt{\dfrac{x-2}{-x+1}}$ là:

A. $(1;2)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $\mathbb{R}$ **D.** $(2;e)$

4. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log^2_{\frac{1}{2}}\frac{x-1}{x+4}}$ là:

A. $(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$ **B.** $(0;+\infty)$

C. $(-4;1)$ **D.** $\mathbb{R}$

5. Giá trị của $\log_a\left(a^3b^2\sqrt{c}\right)$ biết $\log_a b=3;\log_a c=-2$ là:

A. 11 **B.** 8 **C.** 5 **D.** 4

6. Giá trị của $\log_a\frac{a^5\sqrt[3]{b^2}}{c^4}$ biết $\log_a b=-3;\log_a c=2$ là:

A. 11 **B.** 8 **C.** -5 **D.** 4

7. Cho $\log_6 15=x$; $\log_{12}18=y$. Khi đó giá trị của $\log_{25}24$ theo x, y là:

A. $\frac{5-2y}{2x(y+1)-4y+1}$ **B.** $\frac{5-y}{x(y+1)-4y+2}$

C. $\frac{5-y}{2x(y+1)-4y+2}$ **D.** $\frac{5-2y}{x(y+1)-4y+1}$

8. Cho $a^2+b^2=c^2$, $a>0$; $c>b>0$ và $c\pm b\neq 1$. Khi đó mệnh đề đúng là:

A. $\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=\frac{1}{2}\log_{c+b}a.\log_{c-b}a$.

B. $\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=\frac{1}{3}\log_{c+b}a.\log_{c-b}a$.

C. $\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=\log_{c+b}a.\log_{c-b}a$.

D. $\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=2\log_{c+b}a.\log_{c-b}a$.

9. Cho $a>0,\ b>0,\ x>0,\ a\neq 1,\ ax\neq 1$. Khi đó mệnh đề đúng là:

A. $\log_{ax}(bx)=\frac{\log_a b+\log_a x}{1+\log_a x}$ **B.** $\log_{ax}(bx)=\frac{\log_a b+\log_a x}{1+\log_a x}$

C. $2\log_{ax}(bx)=\frac{\log_a b+\log_a x}{1+\log_a x}$ **D.** $\log_{ax}(bx)=\frac{\log_a b+\log_a x}{1+\log_a x}$

10. Cho $m=\log_2 3$ và $n=\log_2 5$. Giá trị của biểu thức $B=\log_2\sqrt[6]{360}$ theo m,n là:

A. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}n+\frac{1}{4}m$ **B.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}n+\frac{1}{6}m$

C. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}m+\frac{1}{4}n$ **D.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}m+\frac{1}{6}n$

11. Đạo hàm của hàm số $y=x^{x-2}$ là:

A. $x^{x-3}\left(\ln x+\dfrac{x-2}{x}\right)$

B. $x^{x-1}\left(\ln x+\dfrac{x-1}{x}\right)$

C. $x^{x-1}\left(\ln x+\dfrac{x-2}{x}\right)$

D. $x^{x-2}\left(\ln x+\dfrac{x-2}{x}\right)$

ĐÁP ÁN:VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. A	2. B	3. A	4. A	5. B	6. C	7. C	8. D	9. D	10. D
11. D									

5. $\log_a(a^3b^2\sqrt{c})=\log_a a^3+\log_a b^2+\log_a\sqrt{c}=3+2\log_a b+\dfrac{1}{2}\log_a c=8$.

Đáp án: **B.**

6. $\log_a\dfrac{a^5\sqrt[3]{b^2}}{c^4}=5+\dfrac{2}{3}\log_a b-4\log_a c=5+\dfrac{2}{3}.(-3)-4.2=-5$.

Đáp án: **C.**

7. Gán $\log_6 15\to A;\ \log_{12}8\to B$

Nhập các Đáp án:rồi dùng **CALC, X = A, Y = B.**

Đáp án: **C.**

10.

Ta có $\sqrt[6]{360}=\sqrt[6]{5.8.9}=\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[6]{5}$

Do đó: $B=\log_2\sqrt[6]{360}=\log_2\left(\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[6]{5}\right)=\log_2\sqrt{2}+\log_2\sqrt[3]{3}+\log_2\sqrt[6]{5}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}m+\frac{1}{6}n.$$

Đáp án: **D.**

Cách khác: Dùng máy tính thay $m=\log_2 3$ và $n=\log_2 5$ vào các phương án để tìm kết quả.

11.

Ta có $\ln y=(x-2)\ln x$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$(\ln y)'=\left[(x-2)\ln x\right]'\Leftrightarrow\frac{y'}{y}=\ln x+\frac{x-2}{x}$$

$$\Rightarrow y'=y.\left(\ln x+\frac{x-2}{x}\right)=x^{x-2}.\left(\ln x+\frac{x-2}{x}\right)$$

Bài 2. Phương trình – Bất phương trình mũ và lôgarit

1. Phương trình mũ

Phương trình mũ dạng cơ bản

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)\ (0 < a \neq 1)$

$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b\ $ (với $b > 0$)

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ 1 \neq a(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) = 1 \\ f(x), g(x) \text{ có nghĩa} \end{cases} \end{array}\right.$$

Một số phương pháp giải phương trình mũ

1) Biến đổi để đưa về cùng một cơ số.
2) Đặt ẩn số phụ (đưa về phương trình dạng quen thuộc).
3) Dùng phép toán lôgarit hóa.
4) Dùng tính đơn điệu của hàm số:

+ Xét phương trình dạng $f(x) = g(x)$ nếu $f(x)$ đơn điệu tăng (giảm) trên khoảng $(a;b)$ và $g(x)$ đơn điệu giảm (tăng) trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = g(x)$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là nghiệm duy nhất.

+ Xét phương trình dạng f(x) = 0 (*) nếu $f(x)$ đơn điệu trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình (*) có nhiều nhất một nghiệm trong khoảng (a,b).

+ Xét phương trình dạng $f(u) = f(v)$ nếu $f(x)$ đơn điệu trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

Lưu ý: Sử dụng Casio tìm nghiệm nhanh phương trình $f(x) = 0$.

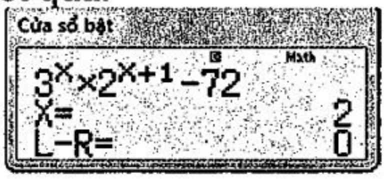
Nhập hàm f(x) dùng chức năng **SOLVE (SHIFT + CALC)**, gán giá trị X = ...
Hoặc sử dụng chức năng bảng **TABLE (MODE + 7).**
Dùng phím **CALC** thử giá trị.

Ví dụ 1. Nghiệm phương trình $3^x.2^{x+1} = 72$ là:

A. $x = 0$ **B.** $x = 1$ **C.** $x = \dfrac{3}{2}$ **D.** $x = 2$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Sử dụng **SOLVE (SHIFT + CALC)** ta nhập hàm $3^x 2^{x+1} - 72$
Gán giá trị X = 0 ta được kết quả:



Vậy $x=2$ là nghiệm của phương trình.

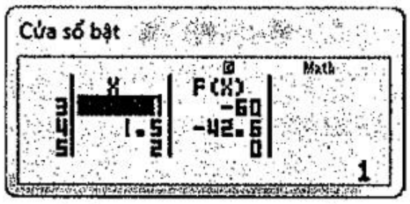
Cách 2: Sử dụng chức năng bảng TABLE (MODE + 7) nhập $f\left(x\right)=3^x2^{x+1}-72$

Quan sát đáp án: cho ở dạng các số tự nhiên 0, 1, 2 và hữu tỉ $\frac{3}{2}$.

Vậy ta gán giá trị khởi đầu, kết thúc và bước nhảy:

START:0; END:2; STEP:$\frac{1}{2}$

Ta được bảng giá trị:



Quan sát thấy với $x=2\rightarrow f\left(x\right)=0$ vậy $x=2$ là nghiệm.

Đáp án: **D.**

Ví dụ 2. Tổng các nghiệm của phương trình $2.9^x-5.6^x=-3.4^x$ là:

A. $x=0$ **B.** $x=1$ **C.** $x=\frac{3}{2}$ **D.** $x=2$

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Phương trình $2.9^x-5.6^x=-3.4^x$ là dạng toán $a^{2x},(ab)^x,b^{2x}$.

Phương pháp chung: chia 2 vế cho a^{2x} hoặc b^{2x}

Chia vế cho 4^x ta được $2\left(\frac{9}{4}\right)^x-5\left(\frac{3}{2}\right)^x=-3$

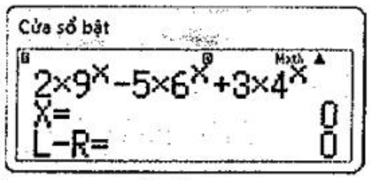
Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x \Leftrightarrow 2t^2-5t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{3}{2} \end{array}\right.$

$t=1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x=1 \Leftrightarrow x=0.$

$t=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=1.$

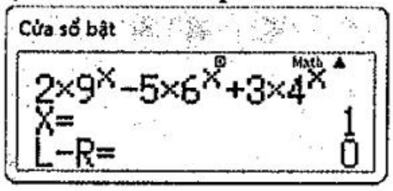
Cách 2: Sử dụng **SOLVE (SHIFT + CALC)** ta nhập hàm $2.9^x-5.6^x+3.4^x$ như sau

Gán giá trị X=0 ta được kết quả:



$\Rightarrow x=0$ là 1 nghiệm của phương trình.

Tiếp tục gán $X=10$ ta được thêm kết quả:



$\Rightarrow x=1$ là 1 nghiệm của phương trình.

Ta biết phương trình có nhiều nhất 2 nghiệm, vậy đó là x = 0 và x = 1.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 1.

Đáp án: **B.**

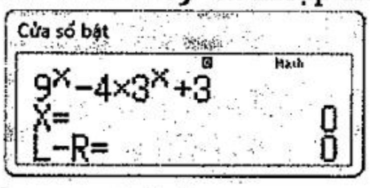
Ví dụ 3. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $9^x-4.3^x+3=0$ là:

A. $x=0$ **B.** $x=1$ **C.** $x=\dfrac{3}{2}$ **D.** $x=2$

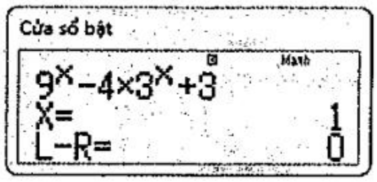
Hướng dẫn giải

Cách 1: Đặt $3^x=t\Rightarrow 9^x-4.3^x+3=0\Rightarrow t^2-4t+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\Rightarrow x=0\\ t=3\Rightarrow x=1\end{array}\right.$

Cách 2: Sử dụng **SOLVE (SHIFT + CALC)** ta nhập hàm $9^x-4.3^x+3$ như sau:



$\Rightarrow x=0$ là 1 nghiệm của phương trình.



$\Rightarrow x=1$ là 1 nghiệm của phương trình.

Vậy tổng bình phương các nghiệm của phương trình là 1.

Đáp án: **B.**

Ví dụ 4. Nghiệm của phương trình $5^x.8^{\frac{x-1}{x}}=500$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\log_2 5 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\log_2 5 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\log_5 2 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\log_5 2 \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Điều kiện: $x \neq 0$.

Ta có $\log_5\left(5^x.8^{\frac{x-1}{x}}\right)=\log_5 500 \Leftrightarrow x+\dfrac{x-1}{x}.\log_5 8=3+\log_5 8$

$\left(500=5.100=5^2.20=5^3.4\right)$

$\Leftrightarrow x+\dfrac{x-1}{x}.3\log_5 2=3+2\log_5 2$

$\Leftrightarrow x^2+3.(x-1).\log_5 2=x.(3+2\log_5 2)$

$\Delta=(\log_5 2+3)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\log_5 2 \end{array}\right.$

Cách 2. Nhập hàm $5^x.8^{\frac{x-1}{x}}-500$ $\rightarrow$ **CALC** $\rightarrow$ gán X là các giá trị trong Đáp án:

Với $X=2 \Rightarrow 5^2.8^{\frac{2-1}{2}}-500 \neq 0 \rightarrow$ loại A và B

Với $X=\log_5 2 \Rightarrow 5^{\log_5 2}.8^{\frac{\log_5 2-1}{\log_5 2}}-500 \neq 0 \rightarrow$ loại C

Đáp án: **D.**

2. Phương trình logarit

2.1. Phương trình lôgarit cơ bản

$\log_a x=b \Leftrightarrow x=a^b$ (với $a>0, a\neq 1$)

$log_a f(x)=log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)>0 \end{cases}$

$log_{a(x)} f(x)=log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)>0 \\ 0<a(x)\neq 1 \end{cases}$

2.2. Một số phương pháp giải phương trình lôgarit

1) Biến đổi đưa về dạng cơ bản.
2) Đặt ẩn số phụ (để đưa về phương trình mà ta biết cách giải).
3) Đối chiếu điều kiện rồi nhận nghiệm.
4) Đưa về phương trình mũ.
5) Dùng tính đơn điệu của hàm số.
Sử dụng các chức năng trên máy tính cầm tay:
1) **CALC**
2) **SOLVE**
3) **TABLE**

Ví dụ 1. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-3)+2\log_4 3.\log_3 x=2$ thỏa mãn:

A. Chia hết cho 5 **B.** Là số nguyên tố
C. Là số vô tỉ **D.** Là số chẵn

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Điều kiện: $x>3$

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2(x-3)+2.\frac{1}{2}\log_2 3.\log_3 x=2$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-3)+\log_2 x=2$$
$$\Leftrightarrow \log_2(x-3)x=\log_2 4$$
$$\Leftrightarrow (x-3)x=4$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\,(\text{loại}) \\ x=4 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=4$.
Đáp án: **D.**

Cách 2: Sử dụng **SOLVE**

Ví dụ 6. Nghiệm của phương trình $\log_4(x+4)-\log_2\sqrt{x+1}=2-3\log_4 2$ là:

A. 1 **B.** 2 **C.** $\log_2 3$ **D.** 3

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Điều kiện: $x>-1$

Phương trình $\Leftrightarrow \log_4(x+4)-\log_4(x+1)=\log_4 16-\log_4 8$

$$\Leftrightarrow \log_4\left(\frac{x+4}{x+1}\right)=\log_4 2 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+1}=2$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=2$.

Cách 2: Nhập hàm $\log_4(x+4)-\log_2\sqrt{x+1}-2+3\log_4 2$ sử dụng **CALC**

Gán lần lượt các đáp án vào X

Nhận thấy với $X=2 \to$ được kết quả 0.

Vậy $x=2$ là nghiệm.

Cách 3: Sử dụng **SOLVE**

Ví dụ 7. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2^2(x+1)-6\log_2\sqrt{x+1}+2=0$ là:

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Hướng dẫn giải

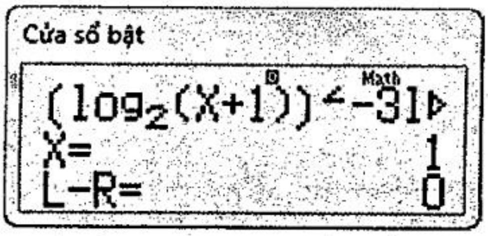
Cách 1.

Điều kiện: $x>-1$

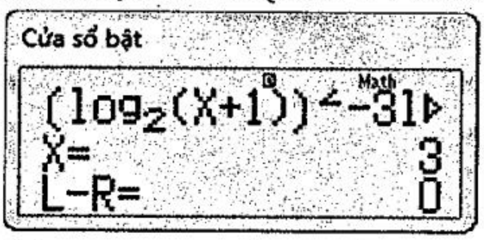
Phương trình $\Leftrightarrow \log_2^2(x+1)-3\log_2(x+1)+2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2(x+1)=1\\ \log_2(x+1)=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+1=2\\ x+1=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\end{array}\right.$$

Cách 2: Nhập hàm $\log_2^2(x+1)-6\log_2\sqrt{x+1}+2$ sử dụng SOLVE (SHIFT + CALC) gán X = 0 ta được



Tiếp tục tìm các nghiệm còn lại SOLVE (SHIFT + CALC) gán $X=10$ ta được



Vậy tổng các nghiệm là: 4.

Đáp án: **C.**

3. Bất phương trình mũ, bất phương trình lôgarit

Bất phương trình mũ cơ bản

$$a^x > 0(\forall x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^x < b < 0 \Rightarrow \text{vô nghiệm} \\ \begin{cases} a^x > b \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{vô số nghiệm} \\ a^x > b > 0 \Leftrightarrow (a-1)(x-\log_a b) > 0 \end{array}\right.$$

Bất phương trình logarit cơ bản

$$\log_a f(x) \le \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(g(x)-f(x)) \ge 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Phương pháp giải chính

- Đưa về dạng bất phương trình cơ bản
- Đặt ẩn phụ

Ngoài các phương pháp trên thì trong các bài toán trắc nghiệm bất phương trình nói chung, ta có thể sử dụng phương pháp:

Chọn các giá trị từ các đáp án thế ngược lại đề bài.

Ví dụ 1. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1} > 3$ là:

A. $(\log_2 3; +\infty)$ **B.** $(\log_3 2 - 1; +\infty)$

C. $(\log_3 2; +\infty)$ **D.** $(\log_2 3 - 1; +\infty)$

Hướng dẫn giải

Cách 1: $2^{x+1} > 3 \Leftrightarrow (2-1)(x+1-\log_2 3) > 0 \Leftrightarrow x > \log_2 3 - 1$

Cách 2: Thử các đáp án bằng chức năng **CALC**

Nhập hàm $2^{x+1} - 3$

Ta sắp xếp đáp án với biên theo thứ tự tăng dần

$\log_3 2 - 1 \to \log_2 3 - 1 \to \log_3 2 \to \log_2 3$

Ta sẽ thử với đáp án có biên nhỏ nhất.

Ta có với $x = \log_3 2{,}1 - 1 \Rightarrow 2^{\log_3 2{,}1 - 1} - 3 < 0$ (loại).

Ta có với $x = \log_2 3{,}1 \Rightarrow 2^{\log_2 3{,}1 - 1} - 3 > 0$ (thỏa mãn).

Đáp án: **D.**

Ví dụ 2. Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x} \ge 0$ là:

A. $1 \le x \le 2$ **B.** $2 \le x \le 3$ **C.** $1 \le x \le 3$ **D.** $0 < x \le 3$

Hướng dẫn giải

Cách 1:

+ Điều kiện $\dfrac{x^2 - 3x + 3}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

+ Khi đó $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x} \ge 0$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x} \ge \log_{\frac{1}{3}} 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x} \le 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 \le x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$

+ Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm $1 \le x \le 3$

Cách 2: Thử các đáp án bằng chức năng **CALC**, nhập hàm $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x}$.

Ta sắp xếp đáp án với biên theo thứ tự tăng dần $0 \to 1 \to 2 \to 3$.

Ta sẽ thử với đáp án có biên nhỏ nhất.

Ta có với $x = 0{,}1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{0{,}1^2 - 3.0{,}1 + 3}{0{,}1} < 0$ không thỏa mãn, loại D.

Ta có với $x = 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1^2 - 3.1 + 3}{1} = 0$ thỏa mãn, loại B.

Để loại A, C ta thử $x = 3$ được $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{3^2 - 3.3 + 3}{3} = 0$, loại A.

Đáp án: **C.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tích các nghiệm của phương trình $log_2^2(4x) + log_2 \dfrac{x^2}{8} = 8$ là:

A. $\dfrac{1}{128}$ **B.** $\dfrac{1}{64}$ **C.** $\dfrac{1}{8}$ **D.** $\dfrac{1}{32}$

2. Số nghiệm của hương trình: $log_{3x}\left(\dfrac{3}{x}\right) + log_3^2 x = 1$ là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

3. Tập nghiệm của phương trình $log\left(x^2 - x - 6\right) + x = log\left(x + 2\right) + 4$ là:

A. $\{4\}$ **B.** $\{log2\}$ **C.** $\{log3\}$ **D.** $\varnothing$

4. Tập nghiệm của phương trình $ln[(x^2-x-6)\sqrt{x+1}+1]=0$ là:

A. $\{-2;-1\}$ **B.** $\{-1\}$ **C.** $\{-1;3\}$ **D.** $\{-1;-2;-3\}$

5. Tổng tất cả các phần tử thuộc tập nghiệm của phương trình

$$log_2 x.log_3 x = log_2 x^2 + log_3 x^3 - 6$$ là:

A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 17

6. Phương trình $log_x(x+1)=lg\frac{3}{2}$ có nghiệm là kết quả nào sau đây?

A. $x=2$ **B.** $x=3$

C. $x=\frac{1}{2}$ **D.** Phương trình vô nghiệm

7. Số nghiệm của phương trình $ln(3x^2+5|x|)=ln2$ là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4.

8. Tích các nghiệm của phương trình $log_3 x.log_9 x.log_{27} x.log_{81} x=\frac{2}{3}$ là:

A. 9 **B.** 1 **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** 27

9. Số nghiệm của phương trình $1+2log_x 2.log_4(10-x)=\frac{2}{log_4 x}$ là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** Hơn 2.

10. Số nghiệm nguyên của phương trình $3^{2x+2}-3^{x+3}-3^x+3=0$ là

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

11. Tập nghiệm của phương trình $4^{2x-m}=8^x$ (m là tham số) là:

A. $\{-m\}$ **B.** $\{m\}$ **C.** $\{2m\}$ **D.** $\{-2m\}$

12. Phương trình $4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=9^{-\frac{1}{x}}$ có nghiệm là:

A. $x = log_{\frac{2}{3}}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ **B.** $x = log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\frac{2}{3}$

C. $x = log_{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **D.** $x = log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\frac{3}{2}$

13. Phương trình $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{2}{3}$ **B.** $x = \frac{3}{2}$ **C.** $x = \frac{4}{9}$ **D.** $x = \frac{9}{4}$

14. Phương trình $9^x - 2^{x+0.5} = 2^{x+3.5} - 3^{2x-1}$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{3}{4}$ **B.** $x = \frac{4}{3}$ **C.** $x = \frac{2}{3}$ **D.** $x = \frac{3}{2}$

15. Khẳng định nào đối với phương trình $3^x = 4 - x$ là **sai**?

A. Phương trình có nghiệm trong khoảng $(0;+\infty)$

B. Phương trình vô nghiệm trong khoảng $(-\infty;1)$

C. Phương trình vô nghiệm

D. Phương trình có nghiệm duy nhất

16. Phương trình $0,7^x = (0,7)^{3x^3+x^2+x}$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

17. Phương trình $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 2$ có nghiệm là:

A. x = 0 **B.** x = 0 và x = 1

C. x = 0 và $x = log_7 48$ **D.** x = 0 và $x = log_2 7$

18. Tổng các nghiệm của phương trình $3^x.2^{x^2} = 1$ là:

A. $-log_3 2$ **B.** $-log_2 3$ **C.** $log_3 2$ **D.** $log_2 3$

19. Tích các nghiệm của phương trình $3^x + 4^x = 5^x$ là:

A. 0 **B.** 2 **C.** -4 **D.** -2

20. Tổng các nghiệm của phương trình $6.9^x - 13.6^x + 6.4^x = 0$ là

A. 0 **B.** 2 **C.** -4 **D.** -2

21. Nghiệm của phương trình $5^x.8^{\frac{x}{x+1}} = 100$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=log_5 10 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-log_5 10 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=log_{10} 5 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-log_{10} 5 \end{array}\right.$

22. Nghiệm của phương trình $log_2(9-2^x) = 3 - x$ là kết quả nào sau đây?

A. $x = 1$ hay $x = 3$ **B.** $x = 2$ hay $x = 3$

C. $x = 0$ hay $x = 3$ **D.** Phương trình vô nghiệm

23. Phương trình $log_3\dfrac{3}{x}.log_2 x - log_3\dfrac{x^3}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} + log_2\sqrt{x}$ có nghiệm là:

A. x =1 hoặc x = 3 **B.** $\sqrt{3}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $x = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ hoặc $x = 1$

24. Phương trình $2.9^{log_2\frac{x}{2}} = x^{log_2 6} - x^2$ có nghiệm là kết quả nào sau đây?

A. $x = 1$ hay $x = 2$ **B.** $x > 0$

C. $x = 3$ hay $x = 2$ **D.** Một kết quả khác

25. Phương trình $4^{log_5(x+1)} = x$ có nghiệm là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

26. Phương trình $\dfrac{7^{2x}}{100^x} = 6(0,7)^x + 7$ có nghiệm là:

A. 0 **B.** $x = log_7 0,7$ **C.** $x = log_{0,7} 7$ **D.** 7

27. Phương trình $log_3\left[1 + log_3\left(2^x - 7\right)\right] = 1$ có nghiệm là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

28. Để phương trình $(m+1).16^x - 2(2m-3).4^x + 6m + 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu thì m thỏa mãn điều kiện:

A. $-1 < m < \dfrac{-5}{6}$ **B.** $-\dfrac{5}{6} < m < \dfrac{3}{2}$ **C.** $-4 < m < -1$ **D.** $1 < m < 4$

29. Cho phương trình $4^x - m.2^{x+2} + 2m = 0$. Nếu phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 4$ thì m có giá trị là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 8

30. Tổng các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$ là:

A. 0 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 6

31. Số nghiệm của phương trình $2^x - 3^{x/2} = 1$ là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

32. Giá trị m nào dưới đây để phương trình $(3m-2).2^{|x-1|} = 1$ có đúng một nghiệm?

A. $-\sqrt{2}$ **B.** 1 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 3

33. Nghiệm của phương trình $3^x.8^{\frac{x}{x+2}} = 6$ là:

A. $x=1; x=2+\frac{2}{log_2 3}$

B. $x=1; x=2-\frac{2}{log_2 3}$

C. $x=1; x=-2+\frac{2}{log_2 3}$

D. $x=1; x=-2-\frac{2}{log_2 3}$

34. Nghiệm của phương trình $5^x=3^{x+1}$ là:

A. $x=log_{\frac{5}{3}}5$ B. $x=log_{\frac{3}{5}}3$ C. $x=log_{\frac{5}{3}}3$ D. $x=log_{\frac{3}{5}}5$

35. Tổng các nghiệm của phương trình $3^{2x^2}-2.3^{x^2+x+6}+3^{2x+12}=0$ là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

36. Nghiệm của bất phương trình: $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+\frac{1}{2}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{x+\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$ là:

A. $x<-\frac{5}{2}$ B. $x>\frac{5}{2}$ C. $x<\frac{5}{2}$ D. $x>-\frac{5}{2}$

37. Nghiệm của bất phương trình $4.3^x>27\sqrt{2^{2x+1}}$ là kết quả nào sau đây?

A. $x>\frac{9}{2}$

B. $x>\frac{3}{2}log_{\frac{2}{3}}\frac{2}{9}$

C. $x>\frac{\sqrt{2}}{3}$

D. Một kết quả khác

38. Bất phương trình $2^{2x-1}+2^{2x}-2^{2x-5}>2^{7-x}-2^{3-x}$ có nghiệm là kết quả nào sau đây?

A. $x>\frac{8}{3}$

B. $x<\frac{8}{3}$

C. $0<x<\frac{8}{3}$

D. BPT vô nghiệm

39. Bất phương trình $8.3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}+9^{\sqrt[4]{x}+1}\geq 9^{\sqrt{x}}$ có nghiệm là kết quả nào sau đây?

A. $x\leq -1$ hay $x\geq\frac{1}{9}$

B. $x\geq\frac{1}{9}$

C. $x\leq 16$

D. $0\leq x\leq 16$

40. Nghiệm của bất phương trình $(x^2+x+1)^x<1$ là:

A. $x>0$ B. $x<0$ C. $x<-1$ D. $0<x<1$

41. Bất phương trình $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x \ge 4$ có nghiệm là kết quả nào sau đây?

A. $x \le 2-\sqrt{3}$ hay $x \ge 2+\sqrt{3}$
B. $x \in [-2;2]$
C. $x \le -2$ hay $x \ge 2$
D. Một kết quả khác

42. Bất phương trình $5.4^x+2.25^x-7.10^x \le 0$ có tập nghiệm là:

A. $-1 \le x \le 0$
B. $0 \le x \le 1$
C. $-2 \le x \le -1$
D. $1 \le x \le 2$

43. Bất phương trình $4^x \le 3.2^{\sqrt{x}+x}+4^{1+\sqrt{x}}$ có tập nghiệm là:

A. $0 \le x \le 1$
B. $0 \le x \le 4$
C. $0 \le x \le 9$
D. $0 \le x \le 16$

44. Bất phương trình $4^{x+1}-16^x < 2\log_4 8$ có tập nghiệm là:

A. $\mathbb{R}\backslash[0,\log_2 3]$
B. $\mathbb{R}\backslash[0,\log_4 3]$
C. $\mathbb{R}\backslash[0,\log_8 3]$
D. $\mathbb{R}\backslash[0,\log_{16} 3]$

45. Bất phương trình $(2+\sqrt{x^2-7x+12})\left(\frac{2}{x}-1\right) \le (\sqrt{14-2x^2-24}+2)\log_x \frac{2}{x}$

có nghiệm là kết quả nào sau đây?

A. $x=4$
B. $x=2$
C. $x=3$
D. BPT vô nghiệm

46. Với giá trị nào của a thì $\log_{2a+1}(2x-1)+\log_a(x+3)>0$ tại $x=4$?

A. $a<1$
B. $a=1$
C. $\left[\begin{array}{l} a>1 \\ 0<a<\frac{1}{2} \end{array}\right.$
D. $0<a<1$

47. Giải bất phương trình: $\log_x(125x).\log_{25}^2 x<1$ (1) cho nghiệm là kết quả nào sau đây?

A. $-4<x<1,\ 0<x<5$
B. $\frac{1}{5^4}<x<1, 1<x<5$
C. Bất phương trình vô nghiệm
D. $x<1$ hay $x>5$

48. Bất phương trình $\log_x(5x^2-8x+3)>2$ (1) có nghiệm là kết quả nào sau đây?

A. $x>\frac{3}{2}$
B. $\frac{1}{2}<x<1$
C. $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{5}$ hay $x>\frac{3}{2}$
D. Bất phương trình vô nghiệm

49. Nghiệm của bất phương trình $\log_x 2(3-2x)>1$ là:

A. $0<x<\frac{3}{2}$ B. $0<x<1$ C. $x>\frac{6}{5}$ D. $1<x<\frac{6}{5}$

50. Nghiệm của bất phương trình $x^2.log_x 27.log_9 x > x+4$ là kết quả nào sau đây?

A. $x<-\frac{4}{3}$ B. $x<2$

C. $x>2$ D. BPT vô nghiệm

51. Bất phương trình $log_x \frac{3}{8-2x} > -2$ có tập nghiệm là:

A. $-2<x<0$ B. $x\in(0;1)\cup\left(\frac{4}{3};4\right)$

C. $x>4$ D. $x\in(-2;0)\cup(0;1)\cup\left(\frac{4}{3};4\right)$

52. Tập nghiệm của bất phương trình $log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt{x}} \le log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$ là:

A. $[0;4]$ B. $(0;4]$ C. $(0;2]$ D. $(-\infty;4]$

53. Tập nghiệm của bất phương trình $ln\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \ge 0$ là:

A. $[1;+\infty)$ B. $[0;+\infty)$ C. $(0;+\infty)$ D. $[-1;+\infty)$

54. Tập nghiệm của bất phương trình $log_{0,7}(3x) > log_{0,7}(5(1-x))$ là:

A. $\left(\frac{5}{8};+\infty\right)$ B. $\left(\frac{5}{8};1\right)$ C. $\left(0;\frac{5}{8}\right)$ D. $\left(-\infty;\frac{5}{8}\right)$

55. Nghiệm của bất phương trình $3^{lg x+2} < 3^{lg x^2+5} - 2$ là:

A. $x>-2$ B. $x>0$ C. $x>100$ D. $x>\frac{1}{100}$

56. Nghiệm của bất phương trình $(x-1)lg 2 + lg(2^{x+1}+1) < lg(7.2^x+12)$ là:

A. $x<1$ B. $x<3$ C. $x<4$ D. $x>3$

57. Bất phương trình $3^{log_3^2 x} + x^{log_3 x} \le 6$ có tập nghiệm là:

A. $\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right]$ B. $\left[\frac{1}{3},3\right]$ C. $\left[\frac{1}{3^2},3^2\right]$ D. $\left[\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}},3^{\frac{3}{2}}\right]$

58. Bất phương trình $log_2(3^x+2) + log_{3^x+2} 2 - 3 > 0$ có tập nghiệm là:

58. Bất phương trình $log_2\left(3^x+2\right)+log_{3^x+2}2-3>0$ có tập nghiệm là:

A. $x>log_2 3$ **B.** $x>log_3 2$ **C.** $x>0$ **D.** $x>1$

59. Điều kiện để phương trình $log\dfrac{4^x+2^x-2}{4^x-2^x-2}=0$ là:

A. $\left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x\ge 1\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}x<0\\ x>1\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x\ge 2\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}x<1\\ x>2\end{array}\right.$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. B	**2. C**	**3. A**	**4. C**	**5. D**	**6. D**	**7. C**	**8. B**	**9. C**	**10. A**
11. C	**12. D**	**13. B**	**14. D**	**15. C**	**16. C**	**17. A**	**18. B**	**19. B**	**20. A**
21. B	**22. C**	**23. D**	**24. D**	**25. D**	**26. C**	**27. D**	**28. C**	**29. D**	**30. A**
31. A	**32. B**	**33. D**	**34. C**	**35. A**	**36. A**	**37. B**	**38. A**	**39. D**	**40. C**
41. C	**42. B**	**43. B**	**44. B**	**45. D**	**46. C**	**47. B**	**48. C**	**49. D**	**50. C**
51. B	**52. B**	**53. C**	**54. C**	**55. D**	**56. B**	**57. B**	**58. B**	**59. B**	

1. $(*)\Leftrightarrow \log_2 4x+2\log_2 4x=17\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\dfrac{1}{128}\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ **Đáp án: A.**

2. $t=\log_3 x\Rightarrow t^2+\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{t}{t+1}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=0\\ t=-2\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ **Phương trình có 3 nghiệm**

Đáp án: D.

3. $(*)\Leftrightarrow \log(x-3)=4-x$ (NK: $x>3$) $\Leftrightarrow x=4$. **Đáp án: A.**

4. Lưu ý $x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1$. **Đáp án: C.**

5. $(\log_3 x-2)(\log_2 x-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=9\\ x=8\end{array}\right.$. **Đáp án: D.**

6. *Cách 1:* **Thử nghiệm ở A,B,C thấy không thỏa mãn** $\Rightarrow$ **Đáp án: D.**

Cách 2: +)$x\in(0;1)\Rightarrow \log_x(x+1)<0<\log\dfrac{3}{2}\Rightarrow$ vô nghiệm

$+) x > 1 \Rightarrow \log_x(x+1) = \dfrac{\log(x+1)}{\log x} = \log\dfrac{3}{2} = \log 3 - \log 2$

$\Leftrightarrow \log\left[2(x+1)\right] > \log x; VP < \log x$ $(do \log 3 \approx 0,477)$

$\Rightarrow$ PT vô nghiệm $\Rightarrow$ **Đáp án: D.**

7. $3x^2 + 5|x| = 2 \Leftrightarrow |x| = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow$ Đáp án: **C.**

8. $\log_{a^\alpha} x = \dfrac{1}{2}\log_a x$; $\log_3^4 x = 16 \Leftrightarrow x = 9; x = \dfrac{1}{9}$ $\Rightarrow$ Đáp án: **B.**

Lưu ý: $\log_a^{2n} x = b \Leftrightarrow x = a^{\pm\sqrt{b}}$ nên $x_1x_2 = 1$. Do đó chỉ cần nhìn số lượng thừa số để kết luận.

9. $x = 8; x = 2$ $\Rightarrow$ Đáp án: **C.**

10. $x = -2; x = 1$ $\Rightarrow$ Đáp án: **A.**

11. $2^{2(2x-m)} = 2^{3x} \Leftrightarrow 2(2x-m) = 3x \Leftrightarrow x = 2m$ $\Rightarrow$ Đáp án: **C.**

12. *Cách 1:* $t = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{-1}{x}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}(loại) \\ t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Đáp án: **D.**

Cách 2 : Dùng **CALC** thử nghiệm. $\Rightarrow$ Đáp án: **D.**

13. Dùng **CALC** thử nghiệm. $\Rightarrow$ Đáp án: **B.**

14. Dùng **CALC** thử nghiệm. $\Rightarrow$ Đáp án: **D.**

15. Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1 \Rightarrow$ Đáp án: **C.**

16. Nghiệm của phương trình $x = 0; x = -\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow$ Đáp án: **C.**

17. $t = \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x \Rightarrow t + \dfrac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = 0$ $\Rightarrow$ Đáp án: **A.**

18. *Cách 1 :* Dùng **CALC** thử nghiệm $\Rightarrow$ Đáp án: **B.**

Cách 2 : Lấy lôgarit cơ số 2 hai vế $\Rightarrow$ Đáp án: **B.**

19. $x = 2$ là nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ Đáp án: **B.**

20. $x=1; x=-1; t=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ $\Rightarrow$ **Đáp án: A.**

21. Dùng **CALC** thử ngiệm$\Rightarrow$ **Đáp án: B.**

22. *Cách 1:* Dùng **CALC** $x=0; x=3$ $\Rightarrow$ **Đáp án: C.**

Cách 2: Phương trình $\Leftrightarrow 9-2^x=2^{3-x}=\frac{8}{2^x}$ $\Rightarrow$ **Đáp án: C.**

23. *Cách 1 :* Dùng **CALC** thử đáp án$\Rightarrow$ **Đáp án: D.**

Cách 2 : $(1-\log_3 x).\log_2 x-3\log_3 x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_3 x(\log_2 x+3)=\frac{1}{2}\log_2 x=\frac{1}{2}\frac{\log_3 x}{\log_3 2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x=0 \Leftrightarrow x=1\\ \log_2 x+3=\log_2\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \log_2 x=\log_2\frac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{8} \Rightarrow$ **Đáp án: D.**

29. $4^x-m.2^{x+2}+2m=0(*)$ Đặt $2^x=t>0$

$\Leftrightarrow t^2-4mt+2m=0(2)$. Để (1) có 2 nghiệm $x_1+x_2=4$ thì (2) có 2 nghiệm t_1 và t_2 thỏa mãn $t_1.t_2=16 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=4m^2-2m>0\\ 2m=16\end{cases} \Leftrightarrow m=8$

$\Rightarrow$ **Đáp án: D.**

30. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$

Đặt $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=t(t>0)\rightarrow t^2-4t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2+\sqrt{3}\\ t=2-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-2.\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ **Đáp án: A.**

31. $2^x-\left(\sqrt{3}\right)^x=1 \Leftrightarrow 2^x=1+\sqrt{3} \Leftrightarrow 1=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x (*)$

Xét $\left(\frac{1}{2}\right)^x:\left[\left(\frac{1}{2}\right)x\right]'=\ln\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^x>0 \Rightarrow$ Nghịch biến

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x:\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\right]'=\ln\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x<0 \Rightarrow$Nghịch biến

Xét $(*)$: Vế phải là hàm hằng, vế trái là hàm nghịch biến.

$\Rightarrow$ Có nghiệm duy nhất $x=2$

$\Rightarrow$ Đáp án: **A.**

32. $(3m-2).2^{|x-1|}=1 \Leftrightarrow 2^{|x-1|}=\dfrac{1}{3m-2}$

Phương trình có duy nhất 1 nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{1}{3m-2}=1 \Leftrightarrow m=1$

$\Rightarrow$ Đáp án: **B.**

33. $3^x.8^{\frac{x}{x+2}}=6 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{x+2}+x\log_2 3=1+\log_2 3$

$\Leftrightarrow x^2\log_2 3+x(2+\log_2 3)-2-2\log_2 3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2-\dfrac{2}{\log_2 3} \end{array}\right.$$

Đáp án: **D.**

34. $5^x=3^{x+1} \Leftrightarrow x\log_3 5=x+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\log_3 5-1}=\log_{\frac{5}{3}} 3 \Rightarrow$ Đáp án: **C.**

35. $3^{2x^2}-2.3^{x^2+x+6}+3^{2x+12}=0 \Leftrightarrow \dfrac{3^{x^2}}{3^{x}+6}-2+\dfrac{3^{x+6}}{3^x}=0$

$\Leftrightarrow 3^{x^2-x-6}=1 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Đáp án: **A.**

36. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+3}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+\frac{1}{2}}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+\frac{3}{2}}-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+1}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{4}\right)^x\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}\right)>\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\left(\dfrac{1}{\sqrt{3^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow \dfrac{3}{8}\left(\dfrac{1}{4}\right)^x>\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^x>\dfrac{32\sqrt{3}}{27}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{-5}{2}} \Leftrightarrow x<-\dfrac{5}{2}$

$\Rightarrow$ Đáp án: **A.**

37.

$$4.3^x > 27\sqrt{2^{2x+1}} \Leftrightarrow \frac{3^x}{2^x} > \frac{27\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow x > \log_{\frac{3}{2}}\frac{27\sqrt{2}}{4} = \frac{2}{3}\log_{\frac{2}{3}}\frac{2}{9}$$

$\Rightarrow$ **Đáp án: B.**

38. $2^{2x-1} + 2^{2x} - 2^{2x-5} > 2^{7-x} - 2^{3-x}$

$$\Leftrightarrow 2^{2x}.\frac{15}{32} > 2^{-x}.120 \Leftrightarrow 2^{3x} > 256 \Leftrightarrow x > \frac{8}{3}$$

$\Rightarrow$ **Đáp án: A.**

39. $8.3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} \geq 9^{\sqrt{x}} \, (x \geq 0)$

$$\Leftrightarrow 8 + 9.\frac{3^{\sqrt[4]{x}}}{3^{\sqrt{x}}} \geq \frac{3^{\sqrt{x}}}{3^{\sqrt[4]{x}}} \Leftrightarrow -1 < 3^{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} \leq 3^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 16$$

Kết hợp điều kiện ta được $0 \leq x \leq 16$.

$\Rightarrow$ **Đáp án: D.**

40. $$\left(x^2 + x + 1\right)^x < 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x + 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1 \\ \begin{cases} x^2 + x + 1 > 1 \\ x < 0 \end{cases} \\ x^2 + x + 1 = 1 \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right. \Rightarrow \textbf{Đáp án: C.}$$

41. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x \geq 4$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x \geq 2+\sqrt{3} \\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x \leq 2-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ **Đáp án: C.**

42. $5.4^x + 2.25^x - 7.10^x \leq 0$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} 2 - 7.\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$\Rightarrow$ **Đáp án: B.**

43.

$4^x \le 3.2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}} (x \ge 0)$

$\Leftrightarrow \frac{2^x}{2^{\sqrt{x}}} \le 3 + 4.\frac{2^{\sqrt{x}}}{2^x}$

$\Leftrightarrow -1 \le 2^{x-\sqrt{2}} \le 4$

$\Leftrightarrow x.\sqrt{x} \le 2 \Leftrightarrow 0 \le x \le 4$

Đáp án: **B**

44. $4^{x+1} - 16^x < 2.\log_4 8 \Leftrightarrow 4.4^x.4^{2x} < 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^x < 1 \\ 4^x > 3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > \log_4 3 \end{array}\right.$

Đáp án: **B.**

45. Dùng **CALC** ở Casio thay các đáp án: $\Rightarrow$ Đáp án: **D.**

46. $\log_{2a+1}(2x-1) + \log_a(x+3) > 0$ tại $x = 4$

$\Leftrightarrow \log_{2a+1} 7 + \log_a 7 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_7(2a+1)} + \frac{1}{\log_7 a} > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 1 \quad (\text{luôn đúng}) \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ \frac{\log_7\left[a(2a+1)\right]}{\log_7 a.\log_7(2a+1)} > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 1 \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 2a^2 + a < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 1 \\ 0 < a < \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ **Đáp án: C.**

47. $\log_x(125x).\log_{25}^2 x < 1 \left(0 < x \ne 1\right)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{\log_5 x} + 1\right).\frac{1}{4}\log_5^2 x < 1 \Leftrightarrow \left(3 + \log_5 x\right).\log_5 x < 4$

$\Leftrightarrow -4 < \log_5 x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5^4} < x < 5$ mà $x \ne 1$

$\Rightarrow$ **Đáp án: C.**

$$48.\ \log_x\left(5x^2-8x+3\right)>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1\\5x^2-8x+3<x^2\end{cases}\\ \begin{cases}x>1\\5x^2-8x+3>x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x<1\\ x>\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ **Đáp án: C.**

$$49.\ \log_x\left[2(3-2x)\right]>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1\\2(3-2x)<x\end{cases}\\ \begin{cases}x>1\\2(3-2x)>x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 1<x<\frac{6}{5}$$ $\Rightarrow$ **Đáp án: D.**

50. $x^2.\log_x 27.\log_9 x > x+4 \quad (0<x\neq 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 > x+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-\frac{4}{3}\\ x>2\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta được $x>2$

$\Rightarrow$ **Đáp án: C.**

51. $\log_x \frac{3}{8-2x} > -2 \quad \begin{pmatrix}0<x<4\\ x\neq 1\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1\\ \frac{3}{8-2x}<\frac{1}{x^2}\end{cases}\\ \begin{cases}4>x>1\\ \frac{3}{8-2x}>\frac{1}{x^2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<1\\ \frac{4}{3}<x<4\end{array}\right.$$ $\Rightarrow$ **Đáp án: B.**

52. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{x}} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}\ (x>0) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0<x\leq 4$ $\Rightarrow$ **Đáp án: B.**

53. $\ln \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \geq 0\ (x>0)$

$$\Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} > 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow x>0$$

$\Rightarrow$ **Đáp án: C.**

54. $\log_{0,7} 3x > \log_{0,7}\left(5(1-x)\right)\left(0 < x < 1\right)$

$\Leftrightarrow 3x < 5-5x \Leftrightarrow x < \frac{5}{8}$

Kết hợp điều kiện ta được : $0 < x < \frac{5}{8}$

$\Rightarrow$ Đáp án: **C.**

55. $3^{\log x+2} < 3^{\log x^2+5} - 2$

$\Leftrightarrow 9.3^{\log x} < 3^5.3^{2\log x} - 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{\log x} < -\frac{2}{27}\ (\text{vn}_o) \\ 3^{\log x} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log x > -2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{100} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Đáp án: **D.**

56. $(x-1)\lg 2 + \lg\left(2^{x+1}+1\right) < \lg\left(7.2^x+12\right)$

Thay x ở các đáp án (Dùng **CALC** ở Casio)

$\Rightarrow$ B thỏa mãn

$\Rightarrow$ Đáp án: **B.**

57.

$3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} \le 6 \Leftrightarrow 2.x^{\log_3 x} \le 6 \Leftrightarrow x^{\log_3 x} \le 3$

$\Leftrightarrow \log_3 x.\log_3 x \le 1 \Leftrightarrow \left(\log_3 x\right)^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \log_3 x \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le x \le 3$

$\Rightarrow$ Đáp án: **B.**

58. $\log_2(3^x+2) + 2.\log_{3^x+2} 2 - 3 > 0$

Đặt $\log(3^x+2) = t \rightarrow t + \frac{2}{t} - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < 1 \\ t > 2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2\left(3^x+2\right) < 1 \\ \log_2(3^x+2) > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x+2 < 2 \\ 3^x+2 > 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{vô nghiệm} \\ x > \log_3 2 \end{array}\right.$$

Đáp án: **B.**

59. $\log \dfrac{4^x + 2^x - 2}{4^x - 2^x - 2} = 0$

Điều kiện của phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{4^x + 2^x - 2}{4^x - 2^x - 2} > 0 \\ 4^x - 2^x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4^x + 2^x - 2 > 0 \\ 4^x - 2^x - 2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4^x + 2^x - 2 < 0 \\ 4^x - 2^x - 2 < 0 \end{cases} \end{array} \right. \\ 4^x - 2^x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2^x > 2 \\ 2^x < -2 \\ -1 < 2^x < 1 \end{array} \right. \\ \begin{cases} 2^x \neq 2 \\ 2^x \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x < 1 \\ 2^x > 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ Đáp án:**B.**

CHƯƠNG V. TƯ DUY GIẢI NHANH NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN

Bài 1. Nguyên hàm và tích phân

1. Bảng nguyên hàm

1.1. Khái niệm

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x);$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Bảng nguyên hàm

1) $\int dx = x + C$ 2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C(x \neq 0)$ 4) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

5) $\int e^x dx = e^x + C$ 6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$ 8) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x)dx = \tan x + C$

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot^2 x)dx = -\cot x + C$

+ $y = f(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx$

$xdx = \frac{1}{2}d(x^2 + 1) = \frac{1}{4}d(2x^2 + 3)$

$\int e^x dx = e^x + c$

$\int e^{f(x)} f'(x)dx = \int d(e^{f(x)}) = e^{f(x)} + C$

Ví dụ 1. Cho $I_1 = \int \frac{dx}{2x+1}$, khi đó:

A. $I_1 = \frac{1}{3}\ln|2x+1|$ **B.** $I_1 = \frac{1}{4}\ln|2x+1| + C$

C. $I_1 = 2\ln|2x+1| + C$ **D.** $I_1 = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$

Hướng dẫn giải

Cách 1: $I_1 = \int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$.

Cách 2: Sử dụng đạo hàm tại điểm x = 2 của các hàm số ở đáp án và so sánh với $f(2) = \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{5}$

Đáp án: **D.**

Ví dụ 2. Cho $I_2 = \int \frac{e^x dx}{2e^x + 1}$, khi đó:

A. $I_2 = 2\ln|2e^x + 1| + C$

B. $I_2 = 2e^x \ln|2e^x + 1| + C$

C. $I_2 = \frac{1}{2}\ln|2e^x + 1| + C$

D. $I_2 = 4\ln|2e^x + 1| + C$

Hướng dẫn giải

Cách 1: $I_2 = \int \frac{e^x dx}{2e^x + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{2e^x dx}{2e^x + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2e^x + 1)' dx}{2e^x + 1} = \frac{1}{2}\ln|2e^x + 1| + C$

Cách 2: Sử dụng đạo hàm tại một điểm.

2. Phương pháp đổi biến số

Cách 1: Tính $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f[u(x)]\, u'(x)dx$

$\int_\alpha^\beta f(t)dt$ với $\alpha = u(a);\ \beta = u(b)$

Đặt t = u(x).

Cách 2:

Tính $\int_a^b f(x)dx$; Đặt x = u(t) $\left| \begin{matrix} x = a \to t = \alpha \\ x = b \to t = \beta \end{matrix} \right. \Rightarrow dx = u'(t)dt$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[u(t)]u'(t)dt.$

Ví dụ. Cho $I = \int \frac{4x-1}{\sqrt{2x+1}+2}dx$, khi đó phương án đúng là:

A. $\frac{2\left(\sqrt{2x+1}\right)^3}{3} - 2(2x+1) + 5\sqrt{2x+1} - 10\ln(\sqrt{2x+1}+1) + C$

B. $\dfrac{2\left(\sqrt{2x+1}\right)^3}{3}+2(2x+1)+5\sqrt{2x+1}-10\ln(\sqrt{2x+1}+2)+C$

C. $\dfrac{2\left(\sqrt{2x+1}\right)^3}{3}-2(2x+1)+5\sqrt{2x+1}-10\ln(\sqrt{2x+1}+2)+C$

D. $\dfrac{\left(\sqrt{2x+1}\right)^3}{3}-2(2x+1)+5\sqrt{2x+1}-10\ln(\sqrt{2x+1}+2)+C$

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{2x+1} \to x=\dfrac{t^2-1}{2} \to dx=tdt.$

$$I=\int\frac{2t^3-3t}{t+2}dt=\int\left(2t^2-4t+5-\frac{10}{t+2}\right)dt$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{2x+1}\right)^3}{3}-2(2x+1)+5\sqrt{2x+1}-10\ln(\sqrt{2x+1}+2)+C$$

Đáp án: C.

3. Nguyên hàm và tích phân từng phần

Sử dụng công thức $\int udv=uv-\int vdu$

$$\int_a^b P(x).e^{mx+n}dx \to \begin{cases} u=P(x) \\ dv=e^{mx+n}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=P'(x)dx \\ v=\dfrac{1}{m}e^{mx+n} \end{cases}$$

$$\int_a^b P(x).\sin(ax+b)dx \to \begin{cases} u=P(x) \\ dv=\sin(ax+b)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=P'(x)dx \\ v=-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) \end{cases}$$

$$\int_a^b P(x).\cos(ax+b)dx \to \begin{cases} u=P(x) \\ dv=\cos(ax+b)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=P'(x)dx \\ v=\dfrac{1}{a}\sin(ax+b) \end{cases}$$

$$\int_a^b P(x).\ln xdx \to \begin{cases} u=\ln x \\ dv=P(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{1}{x}dx \\ v=\int P(x)dx \end{cases}$$

Ví dụ. Cho $F(x)=\int xe^x dx$. Khi đó giá trị của $F(x)$ là:

A. xe^x+e^x+C **B.** $-xe^x+e^x+C$

C. xe^x-2e^x+C **D.** xe^x-e^x+C

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u=x & \Rightarrow & du=dx \\ dv=e^x dx & \Rightarrow & v=e^x \end{cases}$

$I_1=\int xe^x dx = x.e^x-\int e^x dx = xe^x-e^x+C$.

Đáp án: **D.**

4. Kĩ năng sử dụng máy tính Casio trong tích phân

** Hàm chứa giá trị tuyệt đối*

Lưu ý Để ấn giá trị tuyệt đối ta dùng phím **SHIFT + Hyp** (hàm Abs)

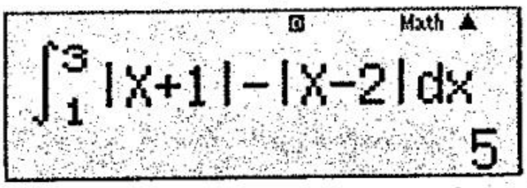
Ví dụ: Cho tích phân

$I=\int_1^3\left(|x+1|-|x-2|\right)dx$

Điền vào chỗ trống I= ...

Nhập tích phân trên Casio

Khi đó ta được kết quả



**Hàm có mũ bậc cao*

Ví dụ: Cho tích phân $I=\int_1^2\frac{1998+x^6}{1998+x^2}dx$

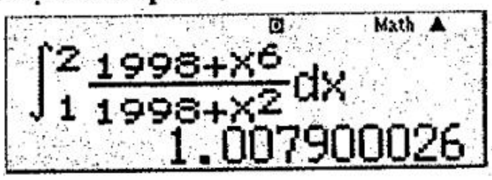
Khẳng định đúng là

A. $I<1$ **B.** $I>1998$

C. $I>1$ **D.** $I<\frac{1}{1998}$

Sử dụng Casio nhập tích phân.

Ta được kết quả



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính $\int\frac{(x-2)^3}{2x^2}dx$ ta được kết quả nào sau đây?

A. $\frac{x^2}{4}-3x+6\ln|x|+\frac{4}{x}+C$ **B.** $\frac{3(x-2)^4}{8x^3}+C$

C. $\frac{x^2}{4}-3x-\frac{6}{x^2}-\frac{4}{x}+C$ **D.** $\frac{x^2}{4}-3x-\frac{6}{x^2}-\frac{12}{x^3}+C$

2. Trong các hàm số sau, đâu là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{1+\sin x}$

A. $F(x)=\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}$ B. $H(x)=2tg\frac{x}{2}$

C. $G(x)=\ln(1+\sin x)$ D. $K(x)=\ln(1+\cos x)$

3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Hàm số $F(x)=\frac{x^2+6x+1}{2x-3}, G(x)=\frac{x^2+10}{2x-3}$ là nguyên hàm của cùng một hàm số.

B. Hàm số $F(x)=5+2\sin^2 x; G(x)=1-\cos 2x$ là nguyên hàm của cùng một hàm số.

C. Hàm số $F(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$.

D. Hàm số $F(x)=\sin\sqrt{x}$ là nguyên hàm của hàm số $y=f(x)=\cos\sqrt{x}$

4. Đâu là một nguyên hàm của hàm số $y=f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$?

A. $F(x)=\ln\sqrt{x^2+1}$ B. $F(x)=\sqrt{x^2+1}$

C. $F(x)=2\sqrt{x^2+1}$ D. $F(x)=\frac{2}{3(x^2+1)}$

5. Đâu là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=xe^{x^2}$?

A. $F(x)=2e^{x^2}$ B. $F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}$

C. $F(x)=2x^2e^{x^2}$ D. $F(x)=e^{x^2}+xe^{x^2}$

6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

I. Hàm số $F(x)=\frac{x^2+6x+1}{2x-3}$ và $G(x)=\frac{x^2+10}{2x-3}$ là nguyên hàm của cùng một hàm số.

II. Hàm số $F(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ và $G(x) = 10 + \cot g^2 x$ là nguyên hàm của cùng một hàm số.

III. Hàm số $F(x) = 7 + 2\sin^2 x$ và $G(x) = 10 - \cos 2x$ là nguyên hàm của cùng một hàm số.

IV. Hàm số $F(x) = 8 + \frac{1}{\cos^2 x}$ và $G(x) = -10 + \tan^2 x$ là nguyên hàm của cùng một hàm số.

A. I **B.** II **C.** III **D.** IV

7. Một trong các nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$ là hàm số:

A. $F(x) = xe^{-x} - e^{-x}$ **B.** $F(x) = -xe^{-x} - e^{-x}$

C. $F(x) = xe^{-x} + e^{-x}$ **D.** $F(x) = -xe^{-x} + e^{-x}$

8. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\ln x$ là hàm số:

A. $F(x) = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{4}x^2 + C$ **B.** $F(x) = \frac{x^2 \ln x}{2} + C$

C. $F(x) = x\ln x - x^2 + C$ **D.** $F(x) = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}x^2 + C$

9. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x$?

A. $F(x) = 2\cos 2x$ **B.** $F(x) = \sin^2 x$

C. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ **D.** $F(x) = -2\cos 2x$

10. Một nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = 9^x + 3x^2$ là:

A. $F(x) = 9^x + x^3$ **B.** $F(x) = 9^x \ln x + x^3$

C. $F(x) = \frac{9^x}{\ln 9} + x^3$ **D.** $F(x) = \frac{9^x}{9} + x^3$

11. Một nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = e^{\sin x}\cos x$ là:

A. $F(x) = e^{\sin x}\cos x$ **B.** $F(x) = e^{\cos x}$

C. $F(x) = e^{\sin x}$ **D.** $F(x) = e^{-\sin x}$

12. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$ là hàm số:

A. $F(x) = \ln(e^{2x} + 1) + C$ **B.** $F(x) = \frac{1}{2}\ln(e^{2x} + 1) + C$

C. $F(x) = (e^x + 1)\ln(e^x + 1) + C$ **D.** $F(x) = 2\ln(e^x + 1)$

13. Nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = x(2x^2+5)^{10}$ là:

A. $F(x) = \frac{(2x^2+5)^{11}}{22}$ B. $F(x) = \frac{(2x^2+5)^{11}}{44}$

C. $F(x) = \frac{(2x^2+5)^{11}}{33}$ D. $F(x) = \frac{(2x^2+5)^{11}}{55}$

14. Nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{e^x+3}$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{3}(x + \ln|e^x+3|)$ B. $F(x) = (x - \ln|e^x+3|)$

C. $F(x) = \frac{1}{3}(x - \ln|e^x+3|)$ D. $F(x) = (x + \ln|e^x+3|)$

15. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

$I. \int \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + C$

$II. \int \sin^2 x dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C$

$III. \int \frac{x+1}{x^2+2x+7}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+7| + C$

A. I B. II C. III D. I và III

16. Tính $I = \int xe^x dx$, ta được kết quả nào sau đây?

A. $xe^x - e^x + C$ B. $e^x x + e^x + C$ C. $\frac{x^2e^x}{2} + C$ D. $xe^x + C$

17. Một nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}$ là:

A. $F(x) = \tan x + \cot a n x$ B. $F(x) = \tan x - \cot a n x$

C. $F(x) = \cot a n x - \tan x$ D. $F(x) = -\tan x - \cot a n x$

18. Đâu là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \sin x$?

A. $F(x) = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2}$ B. $F(x) = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2}$

C. $F(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$ D. $F(x) = e^x \sin x - e^x \cos x$

19. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}$ là:

A. $F(x) = -\tan x \ln(\sin x) - x + C$ B. $F(x) = \tan x \ln(\sin x) - x + C$

C. C.$F(x) = \tan x \ln(\sin x) + x + C$ D. $F(x) = -\tan x \ln(\sin x) + x + C$

20. Giá trị của $I = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x + \cos x}} dx$ là:

A. $I = -2\sqrt{\sin x - \cos x} + C$ **B.** $I = 2\sqrt{\sin x - \cos x} + C$

C. $I = \sqrt{\sin x - \cos x} + C$ **D.** $I = -\sqrt{\sin x - \cos x} + C$

21. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{(x+3)(x+2)}$ là hàm số:

A. $F(x) = \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + C$ **B.** $F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + C$

C. $F(x) = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + C$ **D.** $F(x) = \ln\left|\frac{x+3}{x+2}\right| + C$

22. Nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ là hàm số:

A. $F(x) = \frac{ax}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + C$

B. $F(x) = \frac{cx}{a} + \frac{bc-a}{c^2}\ln|cx+d| + C$

C. $F(x) = -\frac{ax}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + C$

D. $F(x) = \frac{ax}{c} + (bc-ad)\ln|cx+d| + C$

23. Một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{3x+5}{x+2}$.

A. $F(x) = 3x + 4\ln|x+2| + C$ **B.** $F(x) = -3x + \ln|x+2| + C$

C. $F(x) = 3x - \ln|x+2| + C$ **D.** $F(x) = 3x + \ln|x+2| + C$

24. Một nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{(x+a)(x+b)}$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{a+b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C$ **B.** $F(x) = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C$

C. $F(x) = \frac{-1}{a+b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C$ **D.** $F(x) = \frac{-1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C$

25. Một nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = \cos^2 mx$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{2}(x + \sin 2mx) + C$

B. $F(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2m}\sin 2mx) + C$

C. $F(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2m}\sin 2mx) + C$

D. $F(x) = \frac{1}{2}(x - \sin 2mx) + C$

26. Tính tích phân $I = \int_1^4 \frac{x + \ln\left(1 + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$.

A. $I = 6\ln 3 - 4\ln 2 + \frac{8}{3}$

B. $I = 6\ln 3 - \ln 2 + \frac{8}{3}$

C. $I = \ln 3 - 4\ln 2 + \frac{8}{3}$

D. $I = \ln 3 - \ln 2 + \frac{2}{3}$

27. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ là:

A. $I = \frac{\pi}{2} - 1$

B. $I = \frac{\pi}{2}$

C. $I = \frac{\pi}{2} + 1$

D. $I = \frac{\pi}{3} - 1$

28. Tính tích phân: $I = \int_0^{\pi} (1 + \cos x) x dx$.

A. $I = \frac{\pi^2}{2} - 2$

B. $I = \frac{\pi^2}{2}$

C. $I = \frac{\pi^2}{3} - 2$

D. $I = \frac{\pi^2}{2} - 1$

29. Tính tích phân $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x \mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{e^2 + 3}{4}$.

B. $I = \frac{e^2 - 3}{4}$

C. $I = \frac{e^2 + 4}{3}$

D. $I = \frac{e^2 - 4}{3}$

30. Giá trị của a sao cho I = $\int_a^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos^2 x)\sin x dx = \frac{4}{3}$ là:

A. $a = 0$

B. $a = 1$

C. $a = 2$

D. $a = -3$

31. Tính tích phân sau $I = \int_0^1 \frac{2x + 1}{1 + \sqrt{3x + 1}} dx$.

A. $I = \frac{28}{27} - \frac{2}{3}\ln\frac{3}{2}$

B. $I = \frac{28}{27} - \frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}$

C. $I = \frac{28}{27} - \ln\frac{3}{2}$

D. $I = \frac{27}{28} - \frac{2}{3}\ln\frac{3}{2}$

32. Tính tích phân $\int_0^1 (x+3e^x)e^{2x}dx$.

A. $I = e^3 + \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4}$ **B.** $I = e^3 - \frac{3}{4}$

C. $I = \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4}$ **D.** $I = e^3 - \frac{3}{4}$

33. Tính tích phân $\int_0^3 \left(x^2 + \sqrt{x+1}\right)xdx$.

A. $I = \frac{1679}{60}$ **B.** $I = \frac{1769}{60}$ **C.** $I = \frac{1679}{63}$ **D.** $I = \frac{166}{3}$

34. Tính tích phân: $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{3+2x-x^2}}$.

A. $I = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $I = \frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3})$

C. $I = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $I = \frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$

35. Tính a thỏa mãn I = $\int_0^a \frac{dx}{1+\sin x} = 2$.

A. $a = \pi$ **B.** $a = -\pi$ **C.** $a = 2\pi$ **D.** $a = \frac{\pi}{2}$

36. Tích phân $I = \int_1^e \frac{3x+2\ln x+1}{x^2+x\ln x}dx$ là:

A. $I = 2+\ln(e^2+1)$ **C.** $I = \ln(e+1)$

B. $I = 2+\ln(e+1)$ **D.** $I = 2\ln(e+1)$

37. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x\right)^2}dx$ là:

A. $I = \frac{1}{4}\ln 2$ **B.** $I = \frac{1}{4}\ln 3$

C. $I = \frac{1}{2}\ln 3$ **D.** $I = e - \frac{1}{4}\ln 3$

38. Tích phân $I=\int_0^1 \frac{e^x+x}{e^x}dx$ là:

A. $I=1-\frac{2}{e}$ **B.** $I=2-\frac{2}{e}$ **C.** $I=2-\frac{1}{e}$ **D.** $I=\frac{2}{e}$

39. Tính phân $I=\int_1^e \frac{(x+1)\ln x}{x}dx$ là:

A. $I=\frac{1}{3}$ **B.** $I=\frac{3}{4}$ **C.** $I=\frac{3}{2}$ **D.** $I=\frac{2}{5}$

40. Tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x+x\sin x)dx$ là:

A. $I=6$ **B.** $I=-3$ **C.** $I=3$ **D.** $I=-6$

41. Tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx$ là:

A. $I=\frac{1}{2}-\ln 3$ **B.** $I=\ln 2$ **C.** $I=\frac{1}{2}+\ln 2$ **D.** $I=2\ln 2$

42. Tích phân $I=\int_0^{\ln 3}\left|e^x-2\right|dx$ là:

A. $I=\ln 2-2\ln 3.$ **B.** $I=4\ln 2-\ln 3.$

C. $I=4\ln 2-2\ln 3.$ **D.** $I=4\ln 2+2\ln 3.$

43. Tích phân $I=\int_0^1 x\left(\frac{2}{1+x^2}+e^x\right)dx$ là:

A. $I=1$ **B.** $I=\ln 2$ **C.** $I=2+\ln 2$ **D.** $I=1+\ln 2$

44. Tích phân $I=\int_0^1 x(x^2+e^x)dx$ là:

A. I = $\frac{1}{4}$ **B.** I = $\frac{5}{4}$ **C.** I = $\frac{2}{3}$ **D.** I = $\frac{3}{4}$

45. Tích phân $I=\int_5^{10}\frac{dx}{x-2\sqrt{x-1}}$ bằng:

A. $2\ln 2+1$ **B.** $2\ln 3+1$ **C.** $2\ln 2-5$ **D.** $4\ln 2+1$

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. D	4. B	5. B	6. B	7. B	8. A	9. C	10. C
11. C	12. B	13. B	14. C	15. B	16. A	17. D	18. B	19. B	20. B
21. A	22. A	23. C	24. B	25. B	26. A	27. A	28. A	29. A	30. A
31. A	32. A	33. A	34. D	35. A	36. B	37. B	38. B	39. C	40. C
41. C	41. C	43. D	44. B	45. A					

Bài 2. Ước lượng và các dạng đặc biệt

1. Dùng bất đẳng thức để ước lượng

$$m \le f(x) \le M \Rightarrow m\int_b^a dx \le \int_b^a f(x)dx \le M\int_b^a dx \Rightarrow m(a-b) \le \int_b^a f(x)dx \le M(a-b)$$

Ví dụ 1. Tính tích phân $\int_0^1 e^{x^2} x\,dx$.

A. $\frac{1}{2}(e-1)$ **B.** $\frac{1}{3}(e-1)$ **C.** $\frac{1}{4}(e-1)$ **D.** $\frac{1}{5}(e-1)$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức $e^x > x+1 \Rightarrow e^{x^2} > x^2+1$

$\Rightarrow \int_0^1 e^{x^2} x\,dx > \int_0^1 (x^2+1)x\,dx = \frac{3}{4}$

So sánh với các đáp án, ta chọn đáp án **A.**

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+8}}$.

A. $\ln 4 - \ln\sqrt{8}$ **B.** $\ln\sqrt{3} - \ln 4$ **C.** $\ln 4 - \ln 3$ **D.** $\ln 4 - \ln\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Vì $0 \le x \le 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{x^2+8}} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \le I \le 1$

Ta có công thức tổng quát: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$

Đáp án: **B.**

2. Lớp các tích phân đặc biệt

Tính chất 1: Nếu f (x) liên tục và là hàm lẻ trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Ví dụ. Tính tích phân $I = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} cos\,x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx$

A. 0 **B.** $\frac{\pi}{2}$ **C.** π **D.** 3π

Hướng dẫn giải

Nhận xét: Hàm số $f(x) = cos\,x.\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

Liên tục trên $\left[\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right]$

$f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm lẻ

Tính chất 2: Nếu f(x) liên tục và là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ thì:

$$I=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{m^x+1}dx=\int_0^a f(x)dx \text{ với } m>0, \forall a\in\mathbb{R}^+$$

Ví dụ. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.

A. $\frac{\pi}{4}$ **B.** 0 **C.** 1 **D.** e

Nhận xét: $\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\tan^{-1}(1)-\tan^{-1}(0)=\frac{\pi}{4}$. Đáp án: **A.**

Tính chất 3: Cho f(x) là hàm chẵn và liên tục thỏa mãn

$f(a+b-x)=-f(x)$ thì $I=\int_a^b f(x)dx=0$ (mở rộng tính chất 1)

Ví dụ. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$.

A. 0 **B.** e **C.** $\frac{\pi}{3}$ **D.** 1

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Nếu gọi $I=\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$ thì khẳng định nào sau đây là đúng?

A. I=1 **B.** I=$\frac{\pi}{4}$ **C.** I=ln9 **D.** I=ln3

2. Gọi $I=\int_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$ thì khẳng định nào sau đây là đúng?

A. I = 0 **B.** I = 1 **C.** I = $\frac{\pi}{4}$ **D.** I = $\frac{\pi}{3}$

3. Tính tích phân $I=\int_{-2}^{2}\frac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|}dx$.

A. 0 **B.** 1 **C.** $\sqrt{2}+1$ **D.** -1

4. Tính tích phân $I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx.$

A. 0 **B.** 1 **C.** π **D.** $-\pi$

5. Tính tích phân $I = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{x^4+1}dx$

A. 1 **B.** 0 **C.** -1 **D.** 2

6. Tính tích phân $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 2x}{x^2+1}dx.$

A. $-\pi$ **B.** π **C.** 0 **D.** 1

7. Nếu gọi $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^5+5x^3+10x}{\cos^2 x}dx$ thì khẳng định nào sau đây là đúng?

A. I = 0 **B.** I = 1 **C.** I = 2 **D.** I = $\frac{\pi}{2}$

8. Nếu gọi $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|dx$ thì khẳng định nào sau đây là đúng?

A. I = 0 **B.** I = 1 **C.** I =2 **D.** I = 3

9. Tính tích phân $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^4+x^2}{e^x+1}dx.$

A. $\frac{5}{120}$ **B.** $\frac{23}{480}$ **C.** 2 **D.** $\frac{1}{16}$

10. Tính tích phân $I = \int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{1+2^x}dx$

A. $\frac{\pi}{3}$ **B.** 0 **C.** π **D.** $\frac{2}{3}$

11. Tính tích phân $I=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2|\sin x|}{1+e^x}\,dx.$

A. $\pi-2$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\pi-\frac{5}{2}$ **D.** e

12. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt[3]{\sin x}-\sqrt[3]{\cos x}\right)dx.$

A. 0 **B.** e **C.** $\frac{\pi}{4}$ **D.** 1

13. Cho hàm số f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn: $f(x)+f(-x)=3-2\cos x.$

Tính tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx.$

A. $\frac{3\pi}{2}-2$ **B.** $\frac{\pi}{2}+2$ **C.** $\frac{\pi-1}{3}$ **D.** $\frac{\pi+1}{2}$

14. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\cos^2(\sin x)}-\tan^2(\cos x)\right]dx.$

A. 0 **B.** e **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** 1

15. Tính tích phân $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx.$

A. 0 **B.** 2 **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** 1

16. Tính tích phân $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2+1}{1+2^x}dx.$

A. 0 **B.** 2 **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 1

17. Tính tích phân $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{(4^x+1)(x^2+1)}$

A. $\frac{\pi}{4}$ **B.** $\frac{\pi}{2}$ e **C.** π **D.** 1

18. Tính tích phân $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \sin 3x \cos 5x}{1+e^x} dx$

A. $-\frac{25}{63}$ **B.** $\frac{25}{61}$ **C.** 0 **D.** 1

19. Tính tích phân $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x+1} dx$

A. $\frac{5\pi}{16}$ **B.** $\frac{5\pi}{32}$ **C.** π **D.** $\pi - 1$

ĐÁP ÁN

1. D	**2. D**	**3. A**	**4. A**	**5. B**	**6. C**	**7. A**
8. A	**9. B**	**10. D**	**11. A**	**12. A**	**13. A**	**14. C**
15. C	**16. C**	**17. A**	**18. A**	**19. B**		

Bài 3. Ứng dụng tích phân

1. Lý thuyết

a. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} x=a \\ x=b \\ y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$

Công thức: $S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx$

Lưu ý: Trục hoành $\Leftrightarrow$ $y=0$

+ Cận dưới thiếu a $\Rightarrow$ lấy nghiệm x_i bé nhất

+ Cận trên thiếu b $\Rightarrow$ lấy nghiệm x_i lớn nhất

+ Thiếu a và b $\Rightarrow$ cận từ nghiệm bé nhất $\Rightarrow$ lớn nhất.

b. Tính thể tích khối tròn xoay tạo bởi $(D):\begin{cases} x=a \\ x=b \\ y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$ quay quanh Ox

Công thức: $V=\int_a^b \pi f^2(x)dx$

Nếu $(D)\begin{cases} x=a \\ x=b \\ y=f_1(x) \\ y=f_2(x) \end{cases} \Rightarrow V=\pi\int_a^b \left|f_1^2(x)-f_2^2(x)\right|dx$

Ví dụ 1. Diện tích giới hạn bởi đường $y=x^2$, $y=x$ là:

A. 3 (đvdt) **B.** $\frac{1}{6}$ (đvdt) **C.** $\frac{1}{2}$ (đvdt) **D.** $\frac{1}{3}$ (đvdt)

Hướng dẫn giải

$x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$; $I=\int_0^1 \left|x^2-x\right|dx=\left|\int_0^1 (x^2-x)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\right|=\left|\frac{-1}{6}\right|=\frac{1}{6}$ (đvdt)

Đáp án: **B.**

Ví dụ 2. Diện tích giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = x^2 - x + 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ là:

A. 3 (đvdt) **B.** $\frac{1}{6}$ (đvdt) **C.** $\frac{1}{2}$ (đvdt) **D.** $\frac{1}{3}$ (đvdt)

Hướng dẫn giải

Xét $x^2 - x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$$S = \int_1^2 \left|(x^2 - x + 3) - (2x + 1)\right| dx = \int_1^2 \left|x^2 - 3x + 2\right| dx = \left|\int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx\right| = \frac{1}{6} \text{ (đvdt)}$$

Ví dụ 3. Thể tích của khối tròn xoay khi quay H: $\begin{cases} y = x\ln x \\ y = 0 \\ x = e \end{cases}$ quanh trục Ox là

A. $\frac{5e^3}{29} - \frac{2}{27}$ (đvtt) **B.** $\frac{5e^3}{29} + \frac{2}{27}$ (đvtt)

C. $\frac{5e^3}{28} - \frac{2}{27}$ (đvtt) **D.** $\frac{5e^3}{28} + \frac{2}{27}$ (đvtt)

Hướng dẫn giải

Xét $x\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow V = \int_1^e x^2 \ln^2 x dx = \frac{5e^3}{29} - \frac{2}{27}$ (đvtt)

Ví dụ 4. Tính diện tích giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = (e + 1)x \\ y = (1 + e^x)x \end{cases}$.

A. $\frac{e}{2} - 1$ (đvdt) **B.** $\frac{e}{2} + 1$ (đvdt)

C. $e - 2$ (đvdt) **D.** $e - 1$ (đvdt)

Hướng dẫn giải

Xét $(e + 1)x = (1 + e^x)x \Leftrightarrow x(e^x - e) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

$$S = \int_0^1 \left|(1 + e^x)x - (e + 1)x\right| dx = \int_0^1 \left|x(e^x - e)\right| dx = \left|\int_0^1 x(e^x - e) dx\right| = \frac{e}{2} - 1$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ.

A. $I=3\ln\dfrac{3}{2}$ **B.** $I=3\ln\dfrac{3}{2}-1$

C. $I=\ln\dfrac{3}{2}-1$ **D.** $I=3\ln\dfrac{3}{7}-1$

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=x^2-2x$, đường thẳng $y=x-2$ và trục tung.

A. $I=\dfrac{1}{3}$ **B.** $I=\dfrac{3}{4}$ **C.** $I=1$ **D.** $I=2$

3. Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường: $y=\ln x; y=0; x=e$.

A. $S=2$ **B.** $S=1$ **C.** $S=\dfrac{1}{2}$ **D.** $S=\dfrac{3}{4}$

4. Giá trị nào của a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đường $y=x-1$ và 2 đường thẳng x=a, x=2a (a>1) bằng 4?

A. a = 1 **B.** a = 2 **C.** a = 3 **D.** a = 4

5. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=x^2-2x+2$,tiếp tuyến với nó tại điểm M(3;5) và trục Oy là giá trị nào sau đây?(đvdt)

A. 4 **B.** 27 **C.** 9 **D.** 12

6. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: x = 0, x = 2, y = 0, $y=x^3-3x^2+x+2$ bằng (đvdt):

A. 2 **B.** $\dfrac{5}{2}$ **C.** 3 **D.** 4

7. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi $(H)=\{y=\sqrt{x}, x-2y=0\}$.

A. 1 **B.** $\dfrac{4}{3}$ **C.** 3 **D.** 4

8. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 3 đường cong $y=x^2$, $y=\dfrac{x^2}{8}$, $y=\dfrac{8}{x}$ có giá trị nào sau đây? (đvdt).

A. 8ln2 **B.** 2ln2 **C.** 6ln2 **D.** 4ln2

9 Tính diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và đường thẳng $y=x-1$.

A. 1 **B.** $\dfrac{4}{3}$ **C.** 3 **D.** 4

15. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 parabol $y=x^2-2x, y=-x^2+4x$ là giá trị nào sau đây ? (đvdt)

A. 4 B. 27 C. 9 D. 12

16. Nếu gọi V là thể tích của khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng được giới hạn bởi các đường y = x và $y^2=2x$ xung quanh trục 0x thì khẳng định nào sau đây là đúng?

A. V= $\frac{1}{3}\pi$ B. V= $\frac{4\pi}{3}$ C. V= $\frac{8\pi}{3}$ D. V= 4π

17. Nếu gọi V là thể tích của khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng được giới hạn bởi các đường y=0;y=x và y=4-x xung quanh trục 0x thì khẳng định nào sau đây là đúng?

A. V= $\frac{4\pi}{3}$ B. V= $\frac{16}{3}\pi$ C. V= $\frac{32\pi}{3}$ D. V= $\frac{64\pi}{3}$

18. Nếu gọi V là thể tích của khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng được giới hạn bởi các đường x = – 5; x = 0 ; y = 0 và y = $-\sqrt{25-x^2}$ xung quanh trục 0y thì khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $V=\frac{250}{3}$ B. $V=\frac{250\pi}{3}$ C. $V=\frac{125}{3}\pi$ D. $V=250\pi$

19. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường y = lnx, y = 0, x = e bằng (đvdt):

A. 1 B. e C. 2e D. 2e – 1

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. B	2. A	3. B	4. B	5. C	6. A	7. B	8. A	9. B	10. C
11. B	12. D	13. D	14. B	15. C	16. B	17. B	18. B	19. A	

7. Xét phương trình $\sqrt{x}=\frac{x}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Vậy $S(H)=\int_0^4\left|\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right|dx=\left|\int_0^4\left(\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right)dx\right|=\left|\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^4\right|=\frac{4}{3}$. (đvdt)

9. $x^2-3x+2=x-1\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

$S=\int_1^3\left|x^2-3x+2-(x-1)\right|dx=\int_1^3\left|x^2-4x+3\right|dx=\frac{4}{3}(dvdt)$ (dùng Casio).

CHƯƠNG VI. TƯ DUY GIẢI NHANH HÌNH TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

Bài 1. Mặt phẳng

I. LÝ THUYẾT

1. Phương trình mặt phẳng

Mặt phẳng (P) đi qua $I = (x_0, y_o, z_o)$ có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (A, B, C)$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$ có dạng:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2) \text{ trong đó } (D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0)$$

Dạng (2) được gọi là phương trình dạng tổng quát của mặt phẳng.

2. Phương trình theo đoạn chắn

Phương trình mặt phẳng qua 3 điểm có tọa độ $(a;0;0)$, $(0;b;0)$, $(0;0;c)$ $a, b, c \neq 0$ là các giao điểm của mặt phẳng với 3 trục Ox, Oy, Oz có dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ (phương trình đoạn chắn)}$$

3. Các dạng bài tập

a. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm

$A = (x_1, y_1, z_1)$; $B = (x_2, y_2, z_2)$; $C = (x_3, y_3, z_3)$ không thẳng hàng.

+) $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$

+) Sử dụng phương trình (1) $\rightarrow$ phương trình (2).

2. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A = (x_1, y_1, z_1)$

a) Mặt phẳng (P) đi qua A $\perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{CD}$

b) Mặt phẳng (P) đi qua A // (Q): $Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{n_Q}$

c) Mặt phẳng (P) $\perp$ 2 mặt phẳng (Q); (R) cho trước trong đó.

$$\begin{matrix} (Q): Ax + By + Cz + D = 0 \\ (R): A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_R}\right]$$

Ví dụ 1. Phương trình mặt phẳng qua 3 điểm $A(1;0;2), B(3;-1;1), C(4;2;-1)$ là:

A. $5x+3y-7z-19=0$ **B.** $5x+3y+7z+19=0$

C. $5x-3y+7z-19=0$ **D.** $5x+3y+7z-19=0$

Hướng dẫn giải

Gọi $\vec{n}$ là VTPT của (ABC) thì $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(5;3;7)$

Vậy phương trình (ABC) là: $5x+3y+7z-19=0$. Đáp án: **D.**

Ví dụ 2. Cho ba mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-z-1=0$; $(\beta): 3x-y-z+2=0$; $(\gamma): 4x-2y+z-3=0$. Điểm chung duy nhất của $(\alpha),(\beta),(\gamma)$ là:

A. $M_1(1;-2;3)$ **B.** $M_2(1;-2;-3)$

C. $M_3(1;2;3)$ **D.** $M_4(-1;2;3)$

Hướng dẫn giải

Giải hệ phương trình với 3 ẩn x, y, z: $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x-y-z=-2 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$. Đáp án: **C.**

Ví dụ 3. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-2), B(3;2;1), C(1;3;4)$.

Gọi P, Q, R lần lượt là hình chiếu của A, B, C lên các trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (PQR) là:

A. $x+4y+2z-4=0$ **B.** $4x+2y+z-4=0$

C. $2x+y+4z-4=0$ **D.** $x+2y+3z-3=0$

Hướng dẫn giải

Theo bài ra ta có tọa độ các điểm $P(1;0;0)$, $Q(0;2;0)$, $R(0;0;4)$

Vậy phương trình (PQR) là phương trình đoạn chắn:

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 4x+2y+z-4=0$$

Đáp án: **B.**

Chú ý: hình chiếu của 1 điểm
$$M(x,y,z)\xrightarrow{Ox}M(x,0,0)$$
$$M(x,y,z)\xrightarrow{Oy}M(0,y,0)$$
$$M(x,y,z)\xrightarrow{Oz}M(0,0,z)$$

3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho 2 mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$

(α) cắt (β): A:B:C ≠ A':B':C'

(α) song song (β) $\Leftrightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$

(α) trùng (β) $\Leftrightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$

4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Công thức khoảng cách từ điểm $M(x;y;z)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ là:

$$d(M,(\alpha))=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d(M,(\alpha))\leq MM_0\left(\forall M_0\in(\alpha)\right)$$

Ví dụ 1. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình: $3x-2y-5z-3=0$ và $3x-2y-5z+7=0$. Điểm $M(x;y;z)$ cách đều (P) và (Q) khi và chỉ khi M thuộc mặt phẳng:

A. $3x-3y-5z-10=0$ **B.** $3x-2y-5z+2=0$

C. $3x-2y-5z+4=0$ **D.** $3x-2y-5z-4=0$

Hướng dẫn giải

Ta thấy $(P)//(Q)$ nên điểm $M(x;y;z)$ cách đều (P) và $(Q)\Leftrightarrow M\in(R)$ là mặt phẳng nằm chính giữa 2 mặt (P) và (Q).

Khi đó $\overrightarrow{n_R}=(3;-2;-5)\Rightarrow(R): 3x-2y-5z+c=0$

Do tính chất nằm chính giữa 2 mặt (P) và (Q) nên $c=\frac{-3+7}{2}=2$.

Đáp án: **B.**

Ví dụ 2. Cho mặt phẳng $(\alpha): x+y-2z+1=0$ và $M(m;1;m)$. Tìm m để khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α) là bé nhất?

A. m = 8 **B.** m = 2 **C.** m = −4 **D.** m = 0

*) $d(M;(\alpha))=\frac{|m+1-2m+1|}{\sqrt{6}}=\frac{|m-2|}{\sqrt{6}}\geq 0$

Dấu bằng xảy ra ⇔ m = 2

Đáp án: **B.**

5. Chùm mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng d. Tập hợp các mặt phẳng chứa d gọi là chùm mặt phẳng xác định bởi (P) và (Q).

Ví dụ 1. Cho 2 mặt phẳng $(P): x-2y+z-1=0$ và $(Q): 2x+y+z+5=0.$ Phương trình của mặt phẳng phân giác của góc nhọn tạo bởi 2 mặt phẳng đó là:

A. $3x+y+2z-2=0$ **B.** $3x-y+2z-2=0$

C. $3x+y+2z+2=0$ **D.** $3x-y+2z+2=0$

Hướng dẫn giải

Gọi d là giao tuyến của (P) và (Q) thì d thuộc (R)

VTCP của d là $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(-3;1;5)$, chỉ có VTPT ở 2 đáp án B và D là vuông góc với $\overrightarrow{u_d}$.

Với đáp án B, chọn một điểm bất kì trên đó, giả sử $A(0;-2;0)$, thấy $d(A,(P))=\dfrac{3}{\sqrt{6}}=d(A,(Q))$ nên mặt phẳng $3x-y+2z-2=0$ có thể là phân giác góc nhọn hoặc phân giác góc tù tạo bởi (Q) và (P). Với đáp án D, chọn điểm $A'(0;2;0)$ thấy $d(A',(P))=\dfrac{5}{\sqrt{6}}\neq d(A',(Q))=\dfrac{7}{\sqrt{6}}$ nên không thể là đáp án D. Đáp án: **B.**

6. Góc giữa hai mặt phẳng

$$\text{Cos}((P),(Q)) = \left|\frac{A.A'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}\right|$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;-3;1), A_1, A_2$ lần lượt là hình chiếu của A lên Ox, Oy. Phương trình mặt phẳng (AA_1A_2) là:

A. $3x+2y-6z+6=0$ **B.** $3x-2y-6z-6=0$

C. $3x-2y-6z+6=0$ **D.** $3x-2y+6z-6=0$

2. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(5;1;3), B(1;6;2), C(5;0;4)$ và $D(4;0;6)$. Mặt phẳng (α) đi qua AB và song song với CD . Phương trình của $mp(\alpha)$ là:

A. $10x-9y+5z-74=0$ **B.** $10x+9y+5z-74=0$

C. $10x-9y-5z+74=0$ **D.** $-10x+9y-5z-74=0$

3. Mặt phẳng đi qua điểm $A(1;-2;1)$ và song song với mặt phẳng $(P): 4x-3y-z-5=0$, có phương trình là:

A. $4x-3y-z-5=0$ **B.** $4x-3y-z-3=0$

C. $4x-3y-z-8=0$ **D.** $4x-3y-z-9=0$

4. Cho điểm $M(-3;2;-1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha): x+3y-5z+3=0$, $(\beta): 2x-y-2z-5=0$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa điểm M, vuông góc với cả hai mặt phẳng (α) và (β). Phương trình của mặt phẳng (P) là:

A. $x+8y+7z+12=0$ **B.** $x+8y+7z-12=0$

C. $11x+8y+7z+24=0$ **D.** $11x+8y+7z-24=0$.

5. Mặt phẳng đi qua $A(2;3;0)$ song song với Oy và vuông góc với mặt phẳng $(P): 3x-y+4=0$, có phương trình là:

A. $3x-y+z=0$ **B.** $3x-y+5=0$

C. $4y-3z-1=0$ **D.** $z=0$

6. Trong không gian Oxyz cho tứ diện $SABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Cho tọa độ $S(1;2;-4)$, $A(2;-1;3)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

A. $x-3y+7z-26=0$ **B.** $x-3y+8z-14=0$

C. $x+3y-7z-26=0$ **D.** $2x+y-5z-18=0$

7. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;-1;4)$, $B(3;3;-2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn AB có phương trình là:

A. $2x+4y-6z-3=0$ **B.** $x+2y-3z+1=0$

C. $x+2y-3z-1=0$ **D.** $x+2y-3z-3=0$

8. Mặt phẳng (P) đối xứng với mặt phẳng $(Q): 4x-3y-7z+3=0$ qua điểm $I(1;-1;2)$. Phương trình của (P) là:

A. $4x-3y-7z-7=0$ **B.** $4x-3y-7-8=0$

C. $4x-3y-7z+11=0$ **D.** $4x-3y-7z=0$

9. Cho mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2z-1=0$.
Mặt phẳng $(\alpha'): 2x-my+4z-6+m=0$ không cắt mặt phẳng (α) khi:

A. $m\neq -4$ **B.** $m=-4$ **C.** $m\neq 4$ **D.** $m=4$

10. Với giá trị nào của m, n để hai mặt phẳng $(\alpha_1): 2x+(m-1)y-3z-7=0$ và $(\alpha_2): (n+1)x-6y+6z+3=0$ song song nhau?

A. $m=4, n=-5$
B. $m=-4, n=5$
C. $m=4, n=3$
D. $m=-5, n=4$

11. Cho hai mặt phẳng:

$(\alpha): 2x-my+3z+m-6=0$ và $(\beta): (m+3)x-2y+(5m+1)z-10=0$

Kết luận nào sau đây đúng?

I. $(\alpha) /\!/ (\beta) \Leftrightarrow m=1$.

II. (α) trùng với $(\beta) \Leftrightarrow m=1$.

III. (α) cắt $(\beta) \Leftrightarrow m \neq 1$.

A. Chỉ I.
B. Chỉ II.
C. Chỉ III.
D. II và III

12. Cho hai mặt phẳng:

$(\alpha): 2x-my+3z-6+m=0$ và $(\beta): (m+3)x-2y+(5m+1)z-10=0$.

Kết luận nào sau đây đúng nhất?

A. $(\alpha) /\!/ (\beta) \Leftrightarrow m = 1$.
B. $(\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow m = 1$.
C. (α) cắt $(\beta) \Leftrightarrow m \neq 1$.
D. Cả B và C đều đúng.

13. Hai mặt phẳng $-3x+2y+z+1=0$ và $3x-2y-z-1=0$:

A. Cắt nhau nhưng không vuông góc với nhau
B. Song song với nhau
C. Trùng nhau
D. Vuông góc với nhau

14. Cho hình lập phương *ABCD.A'B'C'D'* cạnh 1. Gọi M là trung điểm BC ta có khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'MD)$ là:

A. $\frac{2}{3}$
B. $\frac{3}{2}$
C. 2
D. 3

15. Những điểm nào sau đây vừa thuộc Ox, vừa cách đều gốc tọa độ O và mặt phẳng $x+2y+2z+2=0$?

A. $(1;0;0), \left(\frac{1}{2};0;0\right)$
B. $(1;0;0), \left(-\frac{1}{2};0;0\right)$
C. $(-1;0;0), \left(\frac{1}{2};0;0\right)$
D. $(-1;0;0), \left(-\frac{1}{2};0;0\right)$

16. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(\alpha): x-y+z+1=0$ và $(\alpha'): x-y+z+10=0$ là:

A. $3\sqrt{5}$
B. $3\sqrt{3}$
C. 5
D. $5\sqrt{5}$

17. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): x+5y-2z+1=0$, $(\beta): 2x-y+z+4=0$. Gọi là góc nhọn tạo bởi (α) và (β) thì giá trị đúng của $\cos\varphi$ là:

A. $\frac{5}{6}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}}{6}$ **C.** $\frac{\sqrt{6}}{5}$ **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$

18. Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm A(0;0;1) và B(3;0;0) tạo với mặt phẳng Oxy góc 60^0?

A. $x \pm \sqrt{26}y + 3z = 3$ **B.** $x - \sqrt{26}y \pm 3z = 3$

C. $x \pm 5y + 3z = 3$ **D.** $x - 5y \pm 3z = 3$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. B	**2. B**	**3. D**	**4. C**	**5. D**	**6. A**	**7. C**	**8. C**	**9. B**	**10. A**
11. D	**12. D**	**13. C**	**14. A**	**15. D**	**16. B**	**17. B**	**18. A**		

1. $A_1(2;0;0), A_2(0;-3;0) \Rightarrow n_{(AA_1A_2)} = (3;-2;-6) \Rightarrow (AA_1A_2): 3x-2y-6z-6=0$

2. Đáp án: **B.**

(α) có VTPT $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right] = (10;9;5)$ và đi qua $A(5;1;3)$ nên

$(\alpha): 10(x-5)+9(y-1)+5(z-3)=0 \Leftrightarrow 10x+9y+5z-74=0$.

3. Đáp án: **D.** (α) qua A và // với (P) nên (α) có cùng véctơ pháp tuyến với (P).

4. Đáp án: **C.** Véctơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{n_\alpha}; \overrightarrow{n_\beta}]$.

5. Đáp án: **D.**

Một véctơ chỉ phương của Oy là $\vec{u} = (0;1;0)$

Một véctơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (3; -1; 0)$

$[\vec{u}, \vec{n}]$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm.

6. Đáp án: **A.**

$\overrightarrow{SA}$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm (SA vuông góc với đáy)

Mặt phẳng cần tìm đi qua A và có véctơ $\vec{n} = \overrightarrow{SA}$

7. Đáp án: **C.**

$\overrightarrow{AB}$ là 1 véctơ pháp tuyến của mặt phẳng trung trực của đoạn AB, I trung điểm AB. Mặt phẳng trung trực được tính theo công thức:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

8. Đáp án: **C.**

(P) song song với (Q) nên 2 mặt phẳng này đều có VTPT $(4;-3;-7)$

Lấy điểm A bất kì thuộc (Q) rồi lấy A' đối xứng A qua I và kiểm tra xem thuộc mặt phẳng nào trong 4 đáp án

Giả sử chọn $A(0;1;0) \Rightarrow A'(2,-3,4) \in (P): 4x-3y-7z+11=0$. Đáp án: **C.**

9. Đáp án: **B.**

Hai mặt phẳng trên không cắt nhau $\Leftrightarrow$ trùng nhau hoặc song song. Khi đó

$\frac{1}{2}=\frac{2}{-m}=\frac{2}{4} \Leftrightarrow$ m= -4

10. Đáp án: **A.** Hai mặt phẳng song song $\Leftrightarrow \frac{2}{n+1}=\frac{m-1}{-6}=\frac{-3}{6}\neq\frac{-7}{3}$

14. Gán tọa độ với $A'(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $D(1;0;1)$, $M(1;1;\frac{1}{2})$

$\Rightarrow (A'DM): -2x+y+2z=0$

$d(A,(A'DM))=\frac{|-2.1|}{3}=\frac{2}{3}$. Đáp án: **A.**

15.

Gọi $M(0;0;0),(P): x+2y+2z+2=0$

$d(M,(P))=MO'$

$\Leftrightarrow \left|\frac{a+2}{3}\right|=|a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=\frac{-1}{2}\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Đáp án: **B.**

16. Đáp án: **B.** Chọn A bất kì thuộc (α), tính khoảng cách giữa A và (α')

17. Đáp án: **B.** $\operatorname{Cos}((\alpha);(\beta))=\frac{|1.2-5.1-2.1|}{\sqrt{30}.\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{5}}{6}$

18. Đáp án: **A.**

$\overrightarrow{AB}=(3;0;-1)$

Gọi 1 véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần lập, ta có:

$\overrightarrow{n_{(P)}}=(a;b;c)\ (a^2+b^2+c^2>0)$

$\Rightarrow$ 3a – c =0 (1). Một véctơ pháp tuyến của (Oxy) là (1 ;1 ;0)

Cos ((P) ; (Oxy)) = $\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ, giải hệ ta được mối quan hệ a; b; c.

Bài 2. Đường thẳng

I. Dạng viết phương trình đường thẳng *(Phương trình tham số, phương trình tổng quát và phương trình chính tắc)*

1. Véctơ chỉ phương

Nếu véctơ $\vec{u} = (a,b,c) \neq \vec{0}$ $(a^2+b^2+c^2 \neq 0)$ thỏa mãn: $\vec{u}$ có giá là d hoặc có giá // d thì gọi $\vec{u}$ là véctơ chỉ phương của d.

Kí hiệu: $\overrightarrow{u_d} = (a,b,c)$

2. Phương trình đường thẳng

Nếu đường thẳng d đi qua I = (x_0, y_0, z_0) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (a,b,c)$ thì:

a) Gọi hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ là phương trình dạng tham số của d

b) Với a, b, c $\neq 0$ thì gọi hệ $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ là dạng chính tắc của đường thẳng d.

Chú ý:

- Đường thẳng trong không gian không có khái niệm vectơ pháp tuyến
- Chương trình học theo Ban cơ bản chỉ có phương trình dạng tham số, Ban nâng cao có thêm phương trình chính tắc.
- Điểm M $\in d \Leftrightarrow M(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct)$
- Mỗi đường thẳng d có vô số véctơ chỉ phương có dạng

$$k\overrightarrow{u_d} = (ka, kb, kc) \quad k \neq 0, k \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 1. Phương trình đường thẳng AB qua $A(1;2;1), B(0;3;5)$ là:

A. $\begin{cases} x = t \\ y = 3+t \\ z = 5+4t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = t \\ y = 3+t \\ z = 5-4t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = t \\ y = 3-t \\ z = 5+4t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = -t \\ y = 3+t \\ z = 5+4t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;1;4)$ là 1 VTCP của AB.

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = -t \\ y = 3+t \\ z = 5+4t \end{cases}$. Đáp án: **D.**

Ví dụ 2. Cho $A(1;-1;1), B(-1;2;3)$ và $(P): -2x+y+3z-1=0$. Phương trình d đi qua A và song song với (P), vuông góc với AB.

A. $\frac{x-1}{-7}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{4}$ **B.** $\frac{x-1}{7}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{4}$

C. $\frac{x-1}{7}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{4}$ **D.** $\frac{x-1}{7}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-4}$

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{n_P}=(-2;1;3)$; $\overrightarrow{AB}=(-2;3;2)$

Đường thẳng $d//(P)$ và vuông góc với AB nên chọn

$\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{AB}\right]=(7;2;4)$

Phương trình đường thẳng d là $\frac{x-1}{7}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{4}$.

Đáp án: **C.**

Ví dụ 3. Cho $M(1;1;1), N(3;-2;5)$ và mặt phẳng $(P): x+y-2x-6=0$. Hình chiếu vuông góc của MN lên (P) có phương trình là:

A. $\frac{x-2}{-7}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2}$ **B.** $\frac{x-2}{7}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}$

C. $\frac{x-2}{7}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2}$ **D.** $\frac{x-2}{7}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{2}$

Cách 1: Gọi M', N' lần lượt là hình chiếu của *M, N* xuống (*P*)

Giải phương trình giao điểm, tìm được $M'(2;2;-1)$, $N'\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2};0\right)$

Phương trình hình chiếu cần tìm chính là phương trình đường thẳng M'N':

$$M'N': \frac{x-2}{7}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{2}$$

Cách 2: Các cách thử đáp án

Kiểm tra VTCP của đường thẳng có vuông góc với VTPT của mặt phẳng (P) hay không?

Tìm 1 số điểm thuộc đường thẳng ở đáp án để xem có thuộc (P) hay không?

II. Dạng bài vị trí tương đối giữa hai đường thẳng , giữa đường thẳng và mặt phẳng.

1. Vị trí của 2 đường thẳng

Cho Δ_1 đi qua $M_1(x_1, y_1, z_1)$ có VTCP $\vec{u}(a_1, a_2, a_3)$

Cho Δ_2 đi qua $M_2(x_2, y_2, z_2)$ có VTCP $\vec{v}(b_1, b_2, b_3)$

- Nếu $\left[\vec{u}, \vec{v}\right].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$ thì 2 đường chéo nhau
- Nếu $\begin{cases}\left[\vec{u}, \vec{v}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \\ a_1 : a_2 : a_3 \neq b_1 : b_2 : b_3\end{cases}$ thì 2 đường cắt nhau
- Nếu $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$ và hệ phương trình của $\begin{cases}\Delta_1 \\ \Delta_2\end{cases}$ vô nghiệm thì 2 đường song song (có thể lấy một điểm thuộc đường này thử tọa độ vào đường kia xem có thỏa mãn hay không)
- Nếu $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$ và hệ phương trình của $\begin{cases}\Delta_1 \\ \Delta_2\end{cases}$ có nghiệm thì 2 đường trùng nhau (thử một điểm thuộc đường này vào phương trình đường kia xem có thỏa mãn hay không)

2. Vị trí của đường thẳng và mặt phẳng

Cho Δ đi qua $M(x_0, y_0, z_0)$ với VTCP: $\vec{u} = (a, b, c)$

Mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0,\ VTPT\ \vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$

- Nếu $\vec{n}.\vec{u} \neq 0 \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc \neq 0$ thì Δ cắt (α)
- Nếu $\vec{n}$ cùng phương $\vec{u} \Leftrightarrow a : b : c = A : B : C$ thì Δ cắt (α)
- Nếu $\begin{cases}\vec{n}.\vec{u} = 0 \\ M \notin (\alpha)\end{cases} \Leftrightarrow \Delta$ song song (α)
- Nếu $\begin{cases}\vec{n}.\vec{u} = 0 \\ M \in (\alpha)\end{cases} \Leftrightarrow \Delta \subset (\alpha)$

Ví dụ 1. Đường thẳng Δ qua $A(1;2;1)$ cắt Ox và đường thẳng $d: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{4}$. Hoành độ giao điểm của Δ và Ox là:

A. $x_0 = 0$ **B.** $x_0 = -3$ **C.** $x_0 = -2$ **D.** $x_0 = -6$

Hướng dẫn giải

Gọi giao điểm cần tìm là $B(x,0,0)$; d đi qua $C(-3;0;3)$ có VTCP là $\vec{u}\ (1;1;2)$. Vì AB cắt d thì $\left[\overrightarrow{BA};\vec{u}\right].\overrightarrow{CA}=0 \Leftrightarrow x=-2$

Thử lại điều kiện tỷ lệ của 2 VTCP thấy thỏa mãn. Đáp án: **C.**

III. Dạng bài khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau - đoạn vuông góc chung

1. Khoảng cách từ một điểm $M(x_1;y_1;z_1)$ đến đường thẳng Δ đi qua

$I(x_0;y_0;z_0)$ có VTCP $\overrightarrow{u_\Delta}=(a;b;c)$ là:

$$d(M,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{IM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}$$

Chú ý: Nếu mặt phẳng (P) chứa Δ sao cho khoảng cách từ $M(x_1;y_1;z_1)$ đến (P) lớn nhất thì $d(M,\Delta)=d(M,(P))$

Ví dụ: Khoảng cách từ điểm $A(2;-1;0)$ đến đường thẳng

$$d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-1} \text{ là:}$$

A. 0 **B.** $\sqrt{29}$ **C.** 5 **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $d(M,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{IM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}=\sqrt{29}$.

Đáp án: **B.**

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b khi đó khoảng cách giữa chúng được tính theo công thức:

$$d(a;b)=\frac{\left|[\overrightarrow{u_a},\overrightarrow{u_b}].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|[\overrightarrow{u_a},\overrightarrow{u_b}]\right|}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm phương trình đường vuông góc chung hai đường thẳng chéo nhau

$$(d):\begin{cases}x=3-4t\\y=-2+t\\z=-1+t\end{cases} \text{ và } (d'):\begin{cases}x=6t'\\y=1+t'\\z=2+2t'\end{cases}$$

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}$ **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{2}$

C. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{2}$ **D.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$

2. Cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$ và $d_2:\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$. Điểm $A\in d_1$, $A'\in d_2$ và AA' vuông góc với d_1 và d_2. Tọa độ của A là:

A. $\left(\frac{1}{4};\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{4};-\frac{5}{4};-\frac{3}{4}\right)$ **C.** $\left(-\frac{1}{4};\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{4};-\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)$

3. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' biết A(a,0,0) ; B(-a,0,0) ; C(0,1,0) và B'(-a,0,b) với a, b>0. Tính khoảng cách giữa B'C VÀ AC'.

A. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **B.** $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **C.** $\frac{3ab}{a^2+b^2}$ **D.** $\frac{a^2+b^2}{3ab(a+b)}$

4. Cho điểm $A(0,0,a\sqrt{3})$; $B(a,0,0)$; $C(0,a\sqrt{3},0)$ $(a>0)$ M là trung điểm BC. Tính d(AB,OM).

A. $\frac{a^2\sqrt{15}}{5}$ **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{15}$ **C.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{3}$ **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{5}$

5. Cho 3 điểm $A(-4;4;0)$, $B(2;0;4)$, $C(1;2;-1)$. Khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng:

A. $\sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{17}$ **C.** $\sqrt{26}$ **D.** $\sqrt{19}$

6. Khoảng cách từ điểm A(2,-1,0) đến đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-1}$ là:

A. 0 **B.** $\sqrt{\frac{155}{6}}$ **C.** $\frac{155}{6}$ **D.** $\sqrt{\frac{6}{155}}$

7. Khoảng cách giữa 2 đường $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-2}$ và $d':\begin{cases}x=2t\\y=-1+t\left(t\in\mathbb{R}\right)\\z=2-t\end{cases}$ là:

A. $\sqrt{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$

8. Cho hình bình hành $ABCD$ có $C(-2;3;5);D(0;4;7)$ và giao điểm của hai đường chéo là $M(1;2;\frac{7}{2})$. Phương trình cạnh AB là:

A. $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$ **B.** $\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$

C. $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{2}$ **D.** $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$

9. Đường thẳng Δ qua $A(1;2;1)$ cắt Ox và đường thẳng $d:\frac{x+3}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{4}$

Hoành độ giao điểm của Δ với Ox là:

A. $x_0=0$ **B.** $x_0=-3$ **C.** $x_0=-2$ **D.** $x_0=-6$

10. Cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{4}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-3}{3}$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ vuông góc với d, cắt d và nằm trên mặt phẳng $(\alpha):x-y+z-2=0$ là:

A. $\frac{x+3}{5}=\frac{y+5}{1}=\frac{z}{6}$ **B.** $\frac{x-5}{5}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-6}{-6}$

C. $\frac{x+3}{5}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z}{-6}$ **D.** $\frac{x+3}{5}=\frac{y+5}{1}=\frac{z}{6}$

11. Cho đường thẳng d đi qua $A(1;1-2)$, song song với $(P):x-y-z-1=0$ và vuông góc với $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3}$. Phương trình của d là:

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+2}{-3}$ **B.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z+2}{3}$

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{3}$ **D.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-2}{-3}$

12. Cho $A(1;2;1), B(3;1;0)$ và $C(3;-1;2)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A là:

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{-4}$ **B.** $\frac{x+1}{-4}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{-4}$

C. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$ **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}$

13. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng d_1, d_2

$$d_1: -\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2} \qquad d_2: \begin{cases} x=-1-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

A. Trùng nhau **B.** Song song **C.** Cắt nhau **D.** Chéo nhau

14. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2;-1;1)$; $B(-2;3;7)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{-3}$. Khẳng định nào đúng ?

A. Đường thẳng AB cắt d

B. Đường thẳng AB và d nằm trong cùng một mặt phẳng

C. Đường thẳng AB và d trùng nhau

D. Đường thẳng AB và d chéo nhau.

15. Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1},\ d_2: \begin{cases} 3x-z+1=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$$

Khẳng định nào đúng ?

A. d_1, d_2 cắt nhau và góc giữa d_1, d_2 là 60^o

B. d_1, d_2 chéo nhau và góc giữa d_1, d_2 là 90^o

C. d_1, d_2 cắt nhau và vuông góc với nhau

D. d_1, d_2 song song với nhau

16. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình $d_1:\begin{cases} x=5+2t_1 \\ y=1-t_1 \\ z=5-t_1 \end{cases}$,

$d_2:\begin{cases} x=3+2t_2 \\ y=-3-t_2 \\ z=1-t_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$

Khẳng định nào đúng ?

A. Hai đường thẳng $d_1; d_2$ chéo nhau

B. Hai đường thẳng d_1, d_2 song song và mặt phẳng chứa hai đường thẳng có phương trình là: $y-z+4=0$

C. Hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau với giao điểm $I(7;0;4)$

D. Hai đường thẳng d_1, d_2 trùng nhau

17. Cho mặt phẳng (P_m): $x+(m-1)y+2mz-m+3=0$ và đường thẳng

$$d \begin{cases} x=1-3t \\ y=2+t \quad (t\in \mathbb{R}) \\ z=-1+4t \end{cases}$$

Tập S gồm tất cả các giá trị của m để d và (P_m) cắt nhau là

A. S = $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{9}{4}\right\}$ **B.** S = $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-9}{4}\right\}$ **C.** S = $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ **D.** S = $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-2}{3}\right\}$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

1. C	**2. C**	**3. A**	**4. A**	**5. B**	**6. B**	**7. B**	**8. D**
9. C	**10. C**	**11. A**	**12. D**	**13. C**	**14. B**	**15. B**	**16. A**
17. A							

1. Đáp án: **C.**

2. Đáp án: **C.** Tham số hóa A(m; 1-m; 1+m) ∈ d_1; A'(1-n; 1+n; n) ∈ d_2

Tìm véctơ $\overrightarrow{AA'}$ theo hai tham số m; n, ta có: $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{d_1} = 0$; $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{d_2} = 0$

giải hệ được m, n, suy ra tọa độ điểm A.

3. Đáp án: **A.**

Dựng hệ trục tọa độ Oxyz, với trục Ox là đường thẳng AB, O(0; 0; 0) là trung điểm AB, trục Oy là đường thẳng OC, trục Oz vuông góc với (OBC), Oz// BB', B' thuộc (Oxz).

Nhìn vào hệ trục ta có: C'(0; 1; b); C(0; 1; 0); B'(-a; 0; b); A(a; 0; 0)

$\overrightarrow{B'C} = (a;1;-b)$; $\overrightarrow{AC'} = (-a;1;b)$; $[\overrightarrow{B'C};\overrightarrow{AC'}] = (b;0;a)$

Phương trình mặt phẳng qua AC', // với B'C là: bx + az = 0

$$d(B'C;AC') = \frac{|b.a+0.0+a.0|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

4. Đáp án: **A.**

Chuẩn hóa a = 1

Có $\overrightarrow{AB} = (1,0,-\sqrt{3})$; $\overrightarrow{OM}\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$, $\overrightarrow{OB}(1,0,0) \Rightarrow d(AB,OM) = \frac{\sqrt{15}}{5}$

5. Đáp án: **B.** (có thể áp dụng công thức $d(C,AB) = \frac{\left|[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \sqrt{13}$)

Viết phương trình đường thẳng AB: qua A và có 1 VTCP $\overrightarrow{u_{AB}} = \overrightarrow{AB}$, sau đó tìm hình chiếu của C lên AB (CH $\perp$ AB , H$\in$ AB) , độ dài AH là kết quả cần tìm.

6. Đáp án: **B.**

Tìm hình chiếu H của A trên d, độ dài AH là khoảng cách từ A tới d.

7. Đáp án: **B.**

Lấy A bất kì thuộc d, tìm hình chiếu H của A trên d', với H thuộc d' và AH vuông góc với d', suy ra H. Độ dài đoạn AH là khoảng cách cần tìm.

8. Đáp án: **D.**

Lấy đối xứng C qua M được A; lấy đối xứng D qua M được B, viết phương trình AB.

9. Đáp án: **C.** Xem ví dụ dạng 2.

10. Đáp án: **C.**

+) Giao điểm của d và Δ cũng là giao điểm của d và α. Ta có $\overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_\alpha}]$

$\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{u_d}\right] = (-5,1,6)$, nên ta loại đáp án A và D. Thử $M(5;-1;6) \in \Delta_B$ vào phương trình α thấy không thỏa mãn nên loại đáp án B.

11. Đáp án: **A.**

$\vec{n}(1,-1,-1)$ là 1 VTPT của (P); $\overrightarrow{u_1}(2,1,3)$ là 1 VTCP của Δ

Vì d vuông góc với Δ và song song với (P) nên VTCP của d là $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{u_1}, \vec{n}\right]$

(Bấm máy: Gán véctơ (1,-1,-1) cho VctA, véctơ (2,1,3) cho VctB rồi nhân 2 véctơ VctA x VctB)

12. Đáp án: **D.**

1 VTCP $\overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]$ $\Rightarrow$ thử đáp án thấy D có véctơ chỉ phương đúng $\Rightarrow$ D

13. Đáp án: **C.** Áp dụng công thức

Hai đường thẳng không thể trùng nhau hoặc song song do tỉ lệ VTCP khác nhau $\Rightarrow$ C hoặc D, cho 1 điểm tham số H thuộc d_1, thay vào d_2 $\Rightarrow$ vô nghiệm $\Rightarrow$ cắt nhau.

14. Đáp án: **B.**

Cho d có 1 VTCP $\vec{v}(2,-2,-3)$

AB có 1 VTCP là $\vec{u}(2,-2,-3)$

Vì 2 VTCP tỷ lệ nên d và AB hoặc trùng nhau hoặc song song, nhưng 2 đường thẳng này không có điểm chung nên không thể trùng nhau.
Vậy kết luận 2 đường thuộc cùng mặt phẳng là đúng.

15. Đáp án: **B.**

Góc giữa ($d_1;d_2$) = góc giữa ($\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}$) $\Rightarrow$ hai đường thẳng vuông góc, áp dụng công thức $\Rightarrow$ hai đường thẳng chéo nhau.

16. Đáp án: **B.** Tỉ lệ VTCP bằng nhau $\Rightarrow$ song song hoặc trùng nhau, hệ phương trình vô nghiệm $\Rightarrow$ song song.

17. Đáp án: **A.** 1 VTCP $\overrightarrow{u_d} = (-3;1;4)$; 1 VTPT $\overrightarrow{n_P} = (1;m-1;2m)$, d và (P_m) cắt nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_{P_m}}.\overrightarrow{u_d} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{9}{4}$

Bài 3. Mặt cầu

Mặt cầu tâm I = (a; b; c), bán kính R (R > 0) có phương trình mặt cầu ở dạng chính tắc là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

1. Dạng bài: Phương trình mặt cầu biết tâm I (m; n; p)

a. Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$

Bán kính: R $=d(I;(P))=\dfrac{|Am+Bn+Cp+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

b. Mặt cầu cắt mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$ theo một đường tròn có bán kính R' cho trước.

Bán kính mặt cầu: $R^2=R'^2+\left[d\left(I,(P)\right)\right]^2$

c. Mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng d: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

Bán kính mặt cầu: $R=d\left(I,d\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}$

d. Mặt cầu cắt đường thẳng d theo 1 dây cung có độ dài l cho trước :

Bán kính mặt cầu: $R^2=\left(\dfrac{l}{2}\right)^2+\left[d(I,d)\right]^2$

Ví dụ 1. Cho mặt phẳng (P): $2x+y-2z+15=0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm I(1; -1; 2) tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Hướng dẫn giải

$$R=d(I;(P))=\frac{|2.1+(-1)-2.2+15|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=4$$

Nên mặt cầu có phương trình là $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16$

Ví dụ 2. Cho đường thẳng d có phương trình: $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-8}{-2}$. Phương trình mặt cầu có tâm I(1; -1; -2) và tiếp xúc với đường thẳng d là...

Hướng dẫn giải

$\vec{u}(3;2;-2)$; $M(-3;-2;8)\in d$; $\overrightarrow{MI}(4;1;-10)$;

$$R=d\left(I,(d)\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}=\frac{\sqrt{833}}{\sqrt{17}}=7$$

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=49$.

2. Dạng bài: Phương trình mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng d

$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ và thỏa mãn điều kiện cho trước.

+ Từ giả thiết suy ra d: $\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}\Rightarrow$ tâm $I(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$

+ Sử dụng các công thức ở dạng 1 $\Rightarrow$ tìm t = ?

$\Rightarrow$ tâm I = ?, bán kính R = ? $\Rightarrow$ phương trình chính tắc của mặt cầu.

Ví dụ 3. Cho đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-2}$,

mặt phẳng $(P): x+2y-2z-2=0$, mặt phẳng (Q): $x+2y-2z+4=0$.

Viết phương trình mặt cầu tâm I nằm trên đường thẳng d và tiếp xúc với 2 mặt phẳng (P); (Q).

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $\Rightarrow I(2+3t;1-2t;1-2t)$ nhận thấy (P)//(Q)

$\Rightarrow d(I;(P))=d(I;(Q))=R=\dfrac{1}{2}d((P);(Q))$.

Giải phương trình tìm được t=−1 khi đó I(−1;3;3), R=1.

Khi đó phương trình mặt cầu là $(S):(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$

3. Dạng bài: Phương trình mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P)

$Ax+By+Cz+D=0$ tại $M(x_0;y_0;z_0)\in(P)$ (cho trước).

+ Mặt cầu tiếp xúc mặt phẳng (P) tại M $\Leftrightarrow\begin{cases}IM\perp(P)\\ R=IM\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{u_{IM}}=\overrightarrow{n_P}=(A;B;C)\\ R=IM\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I = (x_0 + At; y_0 + Bt; z_0 + Ct) \\ R = \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}\,|t| \end{cases}$$

+ Sử dụng các công thức ở dạng 1 từ đó tìm ra t = ?

$\Rightarrow I = ?\ R = ? \Rightarrow$ phương trình chính tắc của mặt cầu.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2xm + 2my - 4mz = 0$. Khi m thay đổi thì tâm I của (S) dao động trên:

A. Đường thẳng có phương trình $x = -y = \frac{z}{2}$

B. Mặt phẳng có phương trình $x + y + 2z = 0$

C. Đường thẳng có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = z$

D. Mặt phẳng có phương trình $2x - 2y - 2z + 1 = 0$

2. Mặt cầu (S) qua các điểm $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;2)$ và $D(1;1;2)$. Phương trình mặt cầu (S) là:

A. $x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z + 1 = 0$ **B.** $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - 2z = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - 2z - 1 = 0$ **D.** $x^2 + y^2 + z^2 - x + y - 2z + 1 = 0$

3. Cho tứ diện $ABCD$ có $A(3;6;-2)$, $B(6;0;1)$, $C(-1;2;0)$, $D(0;4;1)$. Tâm I của mặt cầu ngọa tiếp tứ diện $ABCD$ có tọa độ:

A. $I(3;-2;1)$ **B.** $I(3;2;-1)$ **C.** $I(-3;2;1)$ **D.** $I(3;-2;1)$

4. Cho tứ diện ABCD với $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;4;6)$. Tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4$ là mặt cầu có phương trình:

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ **B.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1$

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 1$ **D.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$

5. Cho $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Tập hợp những điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $MA^2 + MB^2 = MC^2$ là mặt cầu bán kính bằng:

A. 4 **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** $3\sqrt{2}$

6. Phương trình mặt cầu tâm $I(0;4;-2)$ và đi qua $A(-2;1;1)$ là:

A. $x^2+y^2+z^2-8y+4z-3=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2-8y+4z-2=0$

C. $x^2+y^2+z^2+8x+2y-4z-1=0$ **D.** $x^2+y^2+z^2-8y-4z-2=0$

7. Trong không gian cho $A(3,-2,-2)$; $B(3,2,0)$; $C(0,2,1)$; $D(-1,1,2)$. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCD).

A. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=9$ **B.** $(x-3)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=25$

C. $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=14$ **D.** $(x-3)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=14$

8. Phương trình mặt cầu đi qua $A(1;1;0)$, $B(-1;1;2)$, $C(1;-1;2)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$ là:

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$ **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=2$ **D.** $(x-4)^2+y^2+(z-2)^2=4$

9. Phương trình mặt cầu đi qua $A(0;1;0), B(1;0;0), C(0;0;1)$ và tâm I thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z+3=0$ là:

A. $x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-1=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$

C. $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z+1=0$ **D.** $x^2+y^2+z^2-4x-4y+z-1=0$

10. Phương trình mặt cầu qua $A(1;2;-4), B(1;-3;1), C(2;2;3)$ và có tâm I thuộc mặt phẳng (xOy) là:

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-10=0$ **B.** $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2-15=0$

C. $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=26$ **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=50$

11. Phương trình mặt cầu đi qua $A(3;1;0)$, $B(5;5;0)$ và có tâm I thuộc trục Ox là:

A. $x^2+y^2+z^2-x-y-z=3$ **B.** $(x+10)^2+y^2+z^2-15=0$

C. $(x-10)^2+y^2+z^2+50=0$ **D.** $(x-10)^2+y^2+z^2=50$

12. Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(4;0;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 3x+4z-3=0$ là:

A. $x^2+y^2+z^2-8x+2z+16=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2-8y-2-16=0$

C. $x^2+y^2+z^2+8x-2z-16=0$ **D.** $x^2+y^2+z^2-4x+4z+16=0$

Mặt cầu với đường thẳng và mặt phẳng

13. Mặt cầu : $x^2+y^2+z^2-2mx+4my+4m^2-1=0$, tiếp xúc với mặt phẳng : $x+y-z-2=0$ khi và chỉ khi tổng các giá trị m bằng:

A. –2 **B.** 2 **C.** –4 **D.** 4

14. Cho mặt cầu (S) tâm $I(\sqrt{2},-1,1)$ và đi qua $A(0,0,2)$ và mặt phẳng $(P):\sqrt{2}x-y+z=0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. (S) cắt (P) tại hai điểm phân biệt **B.** (S) tiếp xúc với (P)

C. (S) là (P) không cắt nhau **D.** (S) cắt (P) theo một đường tròn

15. Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=11$ và hai đường thẳng $(d_1):\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$; $(d_2):\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$. Trong các mặt phẳng sau đây, mặt phẳng nào song song với $(d_1),(d_2)$ và tiếp xúc với (S).

$(I).3x-y-z+7=0$

$(II).3x+y+z-7=0$

$(III).3x-y-z-15=0$

$(IV).3x+y+z+15=0$

A. (I) và (II) **B.** (I) và (III) **C.** (II) và (IV) **D.** (I) và (IV)

16. Cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$.
Mặt phẳng (P) đi qua giao điểm của mặt cầu với ba trục Ox, Oy, Oz (khác gốc O). Phương trình của mặt phẳng (P) là:

A. $3x+6y-12z-12=0$ **B.** $12x+3y-6z+12=0$

C. $6x+3y+2z-12=0$ **C.** $6x-3y-2z+12=0$

17. Cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2z-10y-2z-1=0$ và đường thẳng $(d):\frac{x-m}{1}=\frac{y+l}{3}=\frac{z+l}{-1}$.

Để d cắt (S) tại M và N mà độ dài MN lớn nhất thì giá trị của m và l là:

A. $m=-3;\ l=1$ **B.** $m=2;\ l=-2$ **C.** $m=-3;\ l=3$ **D.** $m=1;\ l=3$

18. Cho (S) là mặt cầu tâm $I(1,2,3)$ qua gốc O và D là đường thẳng có phương trình $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. D là tiếp tuyến của mặt cầu (S)

B. D cắt (S) tại $A(2,0,0); B(0,4,0)$

C. D và (S) không cắt nhau

D. D song song với đường thẳng I qua O

19. Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x-2y+4z+5=0$ và điểm $M(4;3;0) \in (S)$. Tiếp diện của (S) tại M có phương trình :

A. $x+2y+2z+10=0$ **B.** $x+2y+2z-10=0$

C. $x-2y+2z+2=0$ **D.** $x-2y-2z-10=0$

20. Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x+4y-4z=0$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+8=0$. Có hai tiếp diện của (S) cũng song song với (α) đó là:

A. $2x-y+2z-4=0$ và $2x-y+2z+4=0$

B. $2x-y+2z+13=0$ và $2x-y+2z-5=0$

C. $2x-y+2z-13=0$ và $2x-y+2z+5=0$

D. $2x-y+2z+12=0$ và $2x-y+2z-8=0$

21. Cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$. Đường tròn giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy) có bán kính là:

A. $r=\sqrt{5}$ **B.** $r=2$ **C.** $r=\sqrt{6}$ **D.** $r=4$

22. Cho đường tròn (C) là giao của mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4=0$ và mặt phẳng (P) : $x+z-2=0$. (C) có tâm H và bán kính r bằng :

A. $H(1;1;0)$, $r=\sqrt{2}$ **B.** $H(1;0;1)$, $r=\sqrt{2}$

C. $H(0;1;1)$, $r=\sqrt{2}$ **D.** $H(1;0;-1)$, $r=\sqrt{2}$

23. Cho đường tròn $(C)=(P)\cap(S)$; $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$; $(P): 2x-2y-z+9=0$. Tâm H của (C) là điểm nào ?

A. $H(1;-2;3)$ **B.** $H(1;2;-3)$ **C.** $H(1;2;3)$ **D.** $H(-1;2;3)$

24. Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4z-4=0$ và ba điểm $A(3;1;0)$, $B(2;2;4)$, $C(-1;2;1)$ nằm trên mặt cầu (S). Tâm H của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là điểm có tọa độ:

A. $H\left\{\frac{4}{3};\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right\}$ **B.** $H\left\{\frac{4}{3};-\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right\}$

C. $H\left\{\frac{4}{3};-\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right\}$ **D.** $H\left\{\frac{4}{3};\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right\}$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. A	**2. B**	**3. B**	**4. A**	**5. D**	**6. B**	**7. D**	**8. A**	**9. A**	**10. C**
11. D	**12. A**	**13. B**	**14. B**	**15. B**	**16. C**	**17. B**	**18.**	**19. B**	**20. C**
21. A	**22. B**	**23. D**	**24. A**						

1. Tâm I có tọa độ $(m;-m;2m)$ nên sẽ thuộc mặt đường thẳng $x=-y=\frac{z}{2}$

Lưu ý: I cũng nằm trên mặt phẳng $x-y-2z=0$ nhưng quỹ tích của I không phải là mặt phẳng trên, mà chỉ là 1 phần mặt phẳng chính là đường thẳng $x=-y=\frac{z}{2}$.

3. *Cách 1*: Gọi tọa độ I(x,y,z) và giải phương trình 3 ẩn bậc hai: $IB^2=IA^2=IC^2=ID^2$.

Cách 2: Thử đáp án, chỉ có đáp án B thỏa mãn: $IB=IA=IC=ID=\sqrt{17}$

Cách 3 : Gọi phương trình mặt cầu dạng tổng quát rồi thay tọa độ 4 điểm vào giải hệ 4 ẩn 4 phương trình (dùng máy Vinacal sẽ tính được hệ này)

4. Chứng minh điểm M thỏa mãn đẳng thức trên luôn cách điểm G(1,2,3) một khoảng cách bằng 1.

5. Gọi tọa độ M(x,y,z). Vì:

$MA^2+MB^2=MC^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+z^2+x^2+(y-2)^2+z^2=x^2+y^2+(z-3)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+2z^2=z^2-6z+9$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=18$

Vậy quỹ tích M là đường tròn tâm I(1,2,-3) có bán kính bằng $3\sqrt{2}$.

6. Tâm I(0;4;–2) bán kính R = IA.

7. Phương trình (BCD) là $x+2y+3z=7$, $d(A,(BCD))=\sqrt{14}$.

8. *Cách 1:* Gọi tọa độ I(x,y,z) giải hệ bậc nhất ba ẩn

Cách 2: Tâm I phải thuộc mặt phẳng (P) nên loại đáp án D

Nếu I(1,1,2) thì $R^2=IA^2=4=IB^2=IC^2 \Rightarrow$ đáp án A

Cách 3: Ta có thể thay trực tiếp tọa độ 2 điểm A, B, C vào các phương án.

9. Nhận thấy chỉ có tâm của phương án A thuộc (P) nên đáp án: **A.**

10, 11. Tương tự cách làm bài 8

12. $d(I,(P))=R=1$

$\Rightarrow (S): x^2+y^2+z^2-8x+2z+16=0$

Đáp án: **A.**

13. Đáp án: **B**

Mặt cầu: $x^2+y^2+z^2-2mx+4my+4m^2-1=0$, tiếp xúc với mặt phẳng:

$$x+y-z-2=0 \Leftrightarrow d(I,mp)=R \Leftrightarrow \frac{|m+2|}{\sqrt{3}}=\sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$$

Vậy tổng các giá trị cần tìm của m là 2

14. Đáp án: **B.**

$$\begin{matrix} IA=2=R \\ d(I,P)=2 \end{matrix} \Rightarrow \text{(S) tiếp xúc với (P)}$$

15.

Có $(I),(II)$ thỏa mãn tiếp xúc (S)

Có:

$$\begin{matrix} 3.1-1.1-2.1=0 \\ 3.1-2.1-1.1=0 \end{matrix} \Rightarrow (I).(II) \text{ thỏa mãn song song } (d_1),(d_2)$$

16. (P) đi qua (2 ;0 ;0) ; (0 ;4 ;0) ; (0 ;0 ;6)

$\Rightarrow$ Thử 3 tọa độ vào các đáp án.

17.

Để MN max thì MN=R, d phải đi qua tâm của (S)

I(-1,5,1) thuộc d $\Leftrightarrow \frac{-1-m}{1}=\frac{5+l}{3}=\frac{1+l}{-1} \Leftrightarrow m=2,\ l=-2$

18.

$$\begin{matrix} R=IO=\sqrt{14} \\ d(I,d)=3 \end{matrix} \Rightarrow \text{(d) cắt (S)}$$

Gọi $M(1+a;2-2a;0)$ Thay M vào (S) giải a

19.

Thử đáp án: Xem mặt phẳng nào đi qua điểm M, chọn B, C.

Mặt phẳng nào mà khoảng cách từ tâm (S) đến mặt phẳng đó bằng bán kính mặt cầu là đáp án đúng.

20. Tâm I(-1;-2;2) bán kính R= 3. Ta thử xem khoảng cách từ I đến các mặt phẳng trong đáp án có bằng 3 hay không.

21.

(S) có tâm $I(1;2;3), \mathrm{R}=\sqrt{14}$

$d(I,\mathrm{Oxy}))=3$

$\rightarrow r=\sqrt{R^2-d^2(I,(\mathrm{Oxy}))}=\sqrt{5}$

22. C là giao tuyến của mặt phẳng (P) : $x+z-2=0$ và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-4=0$ tâm I(0,0,0) bán kính R=2, vì cả 4 đáp án đều có r giống nhau nên ta chỉ xét đến các tọa độ của H, thử xem điểm H nào thỏa mãn IH vuông góc với (P) thì thấy chỉ có đáp án B thỏa mãn.

23.

Viết $(d)\begin{cases} //(P) \\ qua\, I(3;-2;1) \end{cases}$ có dạng $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-2-2t \\ z=1-t \end{cases}$

Gọi $H(3+2a,-2-2a,1-a)\in(d)$

Thay H vào (P)

$\Rightarrow a=-2$

$\rightarrow H(-1;2;3)$

Đáp án: **D.**

24. Tương tự bài 23

Bài 4. Các bài toán về góc

1. Góc giữa hai mặt phẳng.

Cho 2 mặt phẳng có phương trình: (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng trên, ta có:

$$cos\varphi = \frac{|AA'+BB'+CC'|}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}}$$

2. Góc giữađường thẳng và mặt phẳng:

Cho mặt phẳng (α) có 1 VTPT $\vec{n}$ và đường thẳng d có 1 VTCP $\vec{a}$ thì góc nhọn φ tạo bởi (α) và d là:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}.\vec{a}|}{|\vec{n}|.|\vec{a}|}$$

3. Góc giữa 2 đường thẳng:

Cho hai đường thẳng d_1 có VTCP $\overrightarrow{u_1}$ và d_2 có VTCP $\overrightarrow{u_2}$ thì góc nhọn φ giữa d_1 và d_2 là:

$$cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}|.|\overrightarrow{u_2}|}$$

4. Cách tính

Cách 1: Tính toán thông thường: Sử dụng các công thức bên trên

Cách 2: Sử dụng máy tính Casio (Xem lại phần kĩ năng sử dụng Casio)

Ví dụ 1. Cho hai mặt phẳng $\alpha: x-\sqrt{2}y+z-4=0;\ \beta: x+y\sqrt{2}-z=0$

Tìm góc tạo bởi α và β tính theo đơn vị độ là:

Hướng dẫn giải

[MODE][8][1][1]: Mở VctA gán $(1;-\sqrt{2};1)$

[SHIFT][5][2][2][1]: Mở VctB gán $(1;\sqrt{2};-1)$

Viết biểu thức tính toán

[SHIFT][cos][( ] [SHIFT][5][3] [SHIFT][5][7](Dot) [SHIFT][5][4][ )][:][(] [SHIFT][hyp](Abs) [SHIFT][5][3][)] [SHIFT][hyp](Abs) [SHIFT][5][4] [))]

Biểu thức hiện lên màn hình có dạng

$\cos^{-1}(VctA.VctB : (\text{Abs}(\text{VctA})\ \text{Abs}(\text{VctB}))$

Kết quả là 60^o.

5. Các dạng bài

a. Dạng bài góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Ví dụ 1. Cho đường thẳng d là giao của hai mặt phẳng (P): $x-y+z-2=0$ và (Q): $x-2z+1=0$, mặt phẳng $(\alpha): x-2y+3z-4=0$. Tính góc tạo bởi d và (α).

A. $cos\theta=\dfrac{11}{14}$ **B.** $cos\theta=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$ **C.** $\sin\theta=\dfrac{1}{14}$ **D.** $\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{5}}{14}$

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng (α) có VTPT: $(1;-2;3)$

Đường thẳng d có 1 VTCP là $\vec{u}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right)=(2,3,1)$

Áp dụng công thức trên ta có: $\sin\theta=\dfrac{|2-6+3|}{\sqrt{1+4+9}.\sqrt{1+4+9}}=\dfrac{1}{14}$

Đáp án: **C.**

Ví dụ 2. Góc giữa đường thẳng $d:\begin{cases}x=5+t\\ y=-2+t \quad (t\in\mathbb{R})\\ z=4+\sqrt{2}t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x-y+\sqrt{2}z-7=0$ là:

A. 30^0 **B.** 60^0 **C.** 45^0 **D.** 90^0

Hướng dẫn giải

Gọi α là góc giữa d và (P), áp dụng công thức ta có:

$$\sin\alpha=\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|1.1+(-1).1+\sqrt{2}.\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1+2}.\sqrt{1+1+2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=30^0$$

Đáp án: **A.**

b. Dạngbài tìm điều kiện tham số để thỏa mãn điều kiện về góc, lập phương trình để thỏa mãn điều kiện về góc.

Ví dụ 3. Cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$; $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{1}$

Phương trình mặt phẳng (α) chứa d_1 và tạo với d_2 góc $\varphi=\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

A. $\left[\begin{array}{l}-x+y+z=0\\ 2y-z=0\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}x+z=1\\ y+z=2\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}x+y+2z=3\\ 2x+y+3z=4\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}-x+2y+z-3=0\\ 2x-y+z=0\end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Tính toán trực tiếp

Vì (α) chứa d_1 nên phương trình tổng quát của (α) là :

$$ax+by+(a+b)z=a+2b$$

Kết hợp với điều kiện về góc giải phương trình bậc 2 chứa a,b :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{|2(a+b)|}{\sqrt{2(a^2+b^2+ab)}.\sqrt{3}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\b=0\end{array}\right.$$

Vậy có 2 mặt phẳng thỏa mãn đề là: $\left[\begin{array}{l}x+z=1\\y+z=2\end{array}\right.$. Đáp án: **B.**

Cách 2: Thử đáp án

Hướng 1: Tìm VTCP của d_1 và kiểm tra sự vuông góc với VTPT của các mặt phẳng trong đáp án, chọn được đáp án B, D và C. Kiểm tra thêm điều kiện khác để loại tiếp.

Hướng 2: Tìm điểm thuộc d_1 và xem nó có thuộc các mặt phẳng trong đáp án không, sẽ chọn được B, C. Khi đó kết hợp thêm điều kiện về góc để loại đáp án C.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho đường thẳng d là giao của (P): $x-y+z-2=0$ và (Q): $x-2z+1=0$, mặt phẳng $(\alpha):x-2y+z-4=0$. Góc θ tạo bởi d và (α) thỏa mãn:

A. $\sin\theta=\frac{\sqrt{21}}{14}$ **B.** $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ **C.** $\sin\theta=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ **D.** $\sin\theta=\frac{1}{6}$

2. Cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha):x+y-2z+3=0$. Góc tạo bởi d và (α) là:

A. 60^0 **B.** 45^0 **C.** 30^0 **D.** 90^0

3. Trong hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng: $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+3t\\z=2-t\end{cases}$ và $(\alpha):3x-y+z-1=0$. Số đo của góc giữa d và (α) bằng: (chính xác tới phút)

A. $9^016'$ **B.** $16^012'$ **C.** $16^015'$ **D.** $16^020'$

4. Trong hệ trục tọa độ Oxyz cho đường thẳng $d:\begin{cases}2x-y+3z-1=0\\x-y-z+2=0\end{cases}$ và $(\alpha):3x-y+z-1=0$. Số đo của góc giữa d và (α) bằng: (chính xác tới phút)

A. $16^0 14'$ **B.** $16^0 12'$ **C.** $16^0 15'$ **D.** $16^0 20'$

5. Cho đường thẳng d trong hệ trục tọa độ *Oxyz* có phương trình $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+2}{\sqrt{3}}$. Gọi φ là góc nhọn tạo bởi d và trục Oz. Giá trị của φ là:

A. $\frac{\pi}{6}$ **B.** $\frac{\pi}{3}$ **C.** $\frac{\pi}{4}$ **D.** Một giá trị khác

6. Cho đường thẳng d_1 là giao của hai mặt phẳng là (P): $mx-y+z-2=0$ và $(Q):x+2y-z+3=0$; $d_2:\frac{x-2}{m}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{m-2}$. Tìm m để $d_1\perp d_2$.

A. $m=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$ **B.** $m=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

C. $m=\frac{\sqrt{17}\pm 3}{4}$ **D.** $m=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$

7. Cho $(\alpha):(a-2)x+2(a+3)y-(a^2+6)z+2a^2+2a+6=0$ và

$$\Delta:\begin{cases}x=1+3t\\y=2-\frac{3}{2}t\\z=3-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$$

Giá trị của a để góc tạo bởi Δ; (α) bằng $\varphi=\arcsin\frac{2}{7}$:

A. $a=\frac{-2\pm\sqrt{13}}{4}$ **B.** $a=\frac{-4\pm\sqrt{14}}{3}$ **C.** $a=-2$ **D.** $a=\frac{-2\pm\sqrt{11}}{7}$

8. Cho $(\alpha):(a-2)x+(2a-4)y-z+2a^2+2a+6=0$ và $\Delta:\begin{cases}x=1+3t\\y=2-\frac{3}{2}t\\z=3-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$

Giá trị của a để góc tạo bởi Δ; (α) bằng $\varphi=\text{arsin}\frac{3\sqrt{5}}{7}$

A. $a=-1$ **B.** $a=0$ **C.** $a=2$ **D.** Đáp án khác

9. Phương trình mặt phẳng (α) vuông góc OM tại M biết $OM = 2$ và $\overrightarrow{OM}$ tạo với ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các góc bằng $60^0, 45^0, 60^0$ là :

A. $\sqrt{3}x+\sqrt{2}y-\sqrt{3}z-8=0$ **B.** $\sqrt{2}x+y+\sqrt{2}z-\sqrt{2}=0$

C. $x+\sqrt{2}y+z-4=0$ **D.** $x+\sqrt{2}y+2z-4=0$

10. Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm A(0,0,1) và B(3,0,0) tạo với mặt phẳng Oxy góc 60^0.

A. $x\pm\sqrt{26}y+3z=3$ **B.** $x-\sqrt{26}y\pm3z=3$

C. $x\pm5y+3z=3$ **D.** $x-5y\pm3z=3$

11. Trong hệ trục tọa độ Oxyz cho bốn điểm $A(3,-1,0)$; $B(0,-7,3)$; $C(-2,1,-1)$; $D(3,2,6)$. Câu nào sau đây đúng?

A. ABCD là một tứ giác **B.** $AB\perp CD$

C. $AD\perp BC$ **D.** DABC là tứ diện trực tâm.

12. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' biết $A'(0,0,0)$; $B'(a,0,0)$; $D'(0,a,0)$; $a>0$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm AB và B'C'.

12a. Tìm phương trình mặt phẳng qua M và song song với AN, BD' (theo tham số a)

A. $x+4y+3z-\frac{7a}{2}=0$ **B.** $x-4y+3z+\frac{7a}{2}=0$

B. $-x+3y+4z-\frac{7a}{2}=0$ **D.** $-x+3y+4z+\frac{7a}{2}=0$

12b. Tính thể tích tứ diện ANBD'.

A. $\frac{a^3}{12}$ **B.** $\frac{a^3}{6}$ **C.** $\frac{a^3}{2}$ **D.** $\frac{a^3}{4}$

12c. Tính góc và khoảng cách giữa AN và BD'.

A. $\varphi=\arccos\frac{1}{9}$ **B.** $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$

C. $\varphi=\arccos\frac{1}{3}$ **D.** $\varphi=\arccos\frac{1}{3\sqrt{3}}$

13. Cho trong hệ trục tọa độ Oxyz, một hình lập phương OABC.O'A'B'C' có $A(a,0,0)$; $B(a,a,0)$; $C(0,a,0)$; $O'(0,0,a)$.

Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (AB'O') và (C'OB) là:

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ **B.** 1 **C.** 0 **D.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. A	2. C	3. A	4. B	5. A	6. A	7. D
8. D	9. C	10. A	11. D	12a. A	12b. A	12c. A
13. B						

1. $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{n_Q}\right] = (2;3;1)$

$$\sin\theta = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|} = \frac{\sqrt{21}}{14}$$

Đáp án: **A.**

2.

$$\sin(d,(\alpha)) = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|} = \frac{1}{2}.$$ Đáp án: **C.**

3.

$$\sin(d,(\alpha)) = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|} = \frac{\sqrt{154}}{77} \Rightarrow \left(d,(\alpha)\right) \approx 9^o16'$$

4.

$$\vec{\gamma} = (2;-1;3), \vec{\beta}(1;-1;-1) \rightarrow \overrightarrow{u_d} = \left[\vec{\gamma}.\vec{\beta}\right] = (4;5;-1)$$

$$\sin(d,(\alpha)) = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|} = \frac{\sqrt{462}}{77} \approx 16^0 12'.$$ Đáp án: **B.**

5.

$$\begin{matrix} \overrightarrow{u_{0z}} = (0;0;1) \\ \overrightarrow{u_d} = \left(1;0;\sqrt{3}\right) \end{matrix} \Rightarrow \cos(d, \mathrm{Oz}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$ Đáp án: **A.**

6.

$$\overrightarrow{u_{d_1}} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{u_{(Q)}}\right] = (-1; m+1; 2m+1);\ (d_1) \perp (d_2) \Rightarrow \overrightarrow{u_{d_1}}.\overrightarrow{u_{d_2}} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Đáp án: **A.**

7.

$$\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{u_D}.\overrightarrow{n_\alpha}\right|}{\left|\overrightarrow{u_D}\right|.\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|} = \frac{\left|a^2-9\right|}{\frac{7}{2}\sqrt{(a-2)^2 + 4(a+3)^2 + \left(a^2+6\right)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2+4(a+3)^2+(a^2+6)^2}=|a^2-9|$$

$$\Leftrightarrow 35a^2+20a-5=0 \Leftrightarrow a=\frac{-2\pm\sqrt{17}}{7}$$

Đáp án: **D.**

8.

Tương tự câu 7, Ta có: $\dfrac{1}{\frac{7}{2}\sqrt{(a-2)^2+4(a-2)^2+1}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

$$\Leftrightarrow 5(a-2)^2+1=\frac{16}{2205} \text{ (vô nghiệm)}$$

Đáp án: **D.**

9.

Có $d(0,\alpha)=2 \Rightarrow$ C thỏa mãn.

Đáp án: **C.**

10.

$(P): ax+by+cz+d=0 \ (a^2+b^2+c^2=0)$

(P) qua $A, B \Rightarrow \begin{cases} d=-c \\ c=3a \end{cases}$

$$\cos((P),(Oxy))=\cos 60^0=\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.1}\right|=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3c^2=a^2+b^2$$

$$\Leftrightarrow 26a^2=b^2$$

Chọn $a=1 \Rightarrow b=\pm\sqrt{26} \Rightarrow (P): x\pm\sqrt{26}y+3z=3$

Đáp án: **A.**

11.

$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}=(-3;-6;3)\\ \overrightarrow{CD}=(5;1;7)\end{matrix}\right. \Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$. Đáp án: **B.**

12. Cho $a=1$

$B'(1;0;0)$, $D'(0;1;0)$, $A(0;0;1)$, $D(0;1;1)$, $C'(1;1;0)$, $B(1;0;1)$

$\rightarrow M\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $N\left(1;\frac{1}{2};0\right)$

12a.

$\overrightarrow{AN}=\left(1;\dfrac{1}{2};-1\right), \overrightarrow{BD'}=(-1;1;-1)$

$\overrightarrow{n_p}=\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BD}\right]=\left(\dfrac{1}{2};2;\dfrac{3}{2}\right)$

$\rightarrow (P)$ qua $M\left(\dfrac{1}{2};0;1\right)$ có dạng $x+4y+3z-\dfrac{7}{2}=0$

Đáp án: **A.**

12b.

$\overrightarrow{AB}=(1;0;0),\ \overrightarrow{AD'}=(0;1;-1)$

$\rightarrow V_{ANBD'}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AN}\right|=\dfrac{1}{12}$

Đáp án: **A.**

12c.

$\cos(\widehat{AN,BD'})=\dfrac{\left|\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{BD'}\right|}{AN.BD}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

Đáp án: **D.**

13.

Gọi $P(0;0;b)\in Oz$

$\overrightarrow{n_{(PAB)}}=\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}\right]=\left(ab;ab;a^2\right)$

$\rightarrow$ Chọn $\overrightarrow{n_{(PAB)}}=(b;b;a)$

$\cos\left((PAB),(xOy)\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_{(PAB)}}.\overrightarrow{n_{xOy}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(PAB)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{xOy}}\right|}=\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+2b^2}.1}$

$\Rightarrow b=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$\overrightarrow{AO}=\left(-a;0;0\right)$

$V_{P.OAB}=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AO}.\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|=\dfrac{a^3}{6\sqrt{2}}$

CHƯƠNG VII. TƯ DUY GIẢI NHANH PHẦN SỐ PHỨC

Bài 1. Số phức và các khái niệm

I. Dạng đại số

Số phức có dạng $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$ được gọi là dạng đại số của số phức z.

Trong đó a được gọi là phần thực và b là phần ảo của số phức z.

Ta có các khái niệm sau về số phức:

- Số phức thuần ảo (số ảo) nếu a = 0, thuần thực (số thực) nếu b = 0, số 0 vừa là số thực vừa là số thuần ảo.
- Hai số phức bằng nhau nếu phần thực bằng nhau và phần ảo bằng nhau.
- Số phức liên hợp của $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ được kí hiệu là $\overline{z}$

$$\overline{z} = a - bi;\ \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}';\ \overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z}'$$

- Số phức nghịch đảo của $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ là $\dfrac{1}{z}$
- Môđun của $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$|z| = |\overline{z}| = \sqrt{z.\overline{z}};\ |z|.|z'| = |z.z'|;\ |z^n| = |z|^n;\ \frac{|z|}{|z'|} = \left|\frac{z}{z'}\right|\ (z' \neq 0)$$

Ví dụ 1. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)^2 z = 2 - 4i$. Tìm phần thực của z là:

A. -2 **B.** -3 **C.** 3 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Dùng máy tính Casio chuyển sang môi trường phức (MODE + 2)

Nhập biểu thức $\dfrac{2-4i}{(1+i)^2}$ được kết quả $z = -2 - i$

Đáp án: **A.**

Ví dụ 2. Cho $\dfrac{z}{2-3i} = 5 + i$, môđun của số phức $w = z^2 + \overline{z}$ là:

A. $3\sqrt{26}$ **B.** $13\sqrt{66}$ **C.** $3\sqrt{626}$ **D.** $13\sqrt{626}$

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Ta có $\frac{z}{2-3i}=5+i\Rightarrow z=13-13i\Rightarrow w=(13-13i)^2+(13+13i)=13-325i$

Vậy $|w|=\sqrt{13^2+325^3}=13\sqrt{626}$. Đáp án: **D.**

Cách 2:

Bấm máy tính MODE 2 (đưa vào môi trường phức), nhập $(2-3i)(5+i)$

$\Rightarrow z=13-13i$, sau đó gán cho A rồi bấm Shift Abs

$(A^2+\textbf{conjg}\,A)\rightarrow=13\sqrt{626}$ (bấm shift 2 để xuất hiện **conjg** - lấy số phức liên hợp)

Ví dụ 3. Cho số phức $z=3-2i$. Phần thực và phần ảo của số phức $w=iz-\overline{z}$ là:

A. Phần thực là -1, phần ảo là -1
B. Phần thực là -1, phần ảo là 1
C. Phần thực là -2, phần ảo là 1
D. Phần thực là -1, phần ảo là 2

Hướng dẫn giải

Dùng Casio nhập biểu thức $i(3-2i)-(3+2i)$ ta được kết quả $-1+i$.

Đáp án : **B.**

Ví dụ 4. Cho số phức z thỏa mãn $(1-2i)z+\frac{1-3i}{1+i}=2-i$. Phần ảo của số phức $w=z+\frac{1}{z+2i}$ là:

A. $-\frac{1}{10}$
B. $\frac{5}{8}$
C. $\frac{8}{3}$
D. $\frac{3}{5}$

Hướng dẫn giải

Biến đổi $z=\frac{2-i-\frac{1-3i}{1+i}}{1-2i}$

Dùng Casio nhập biểu thức $\left(2-i-\frac{1-3i}{1+i}\right):(1-2i)=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$ gán cho A.

Tiếp tục dùng Casio để tính w, nhập biểu thức $A+\frac{1}{conjgA+2i}$

$\Rightarrow w=\frac{7}{10}-\frac{1}{10}i$

Đáp án: **A.**

II. Dạng hình học

Cho số phức $z=a+bi$ khi đó ta cho tương ứng mỗi số phức z với một điểm $M(a;b)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Điểm $M(a;b)$ được gọi là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$.

Ta có một số các tính chất sau:

- M biểu diễn số phức z, M' biểu diễn z' khi đó $MM'=|z-z'|$
- Các điểm trên trục hoành biểu diễn số thực, các điển trên trục tung biểu diễn số ảo. Mặt phẳng Oxy biểu diễn các số phức được gọi là mặt phẳng phức.

Ví dụ 1. Tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-2i+1|=|iz+i-1|$ là:

A. Prabol: $y=x^2-1$ **B.** Đường thẳng: $x-1=0$

C. Prabol: $y=2x^2$ **D.** Đường thẳng: $2y-1=0$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi $M(x;\ y)$ biểu diễn số phức z

$\Rightarrow |x+yi-2i+1|=|i(x+yi)+i-1|$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(-y-1)^2$

$\Leftrightarrow 2y-1=0$

Cách 2: $|z|=|iz|=|-iz| \Rightarrow |z-2i+1|=|z+1+i|$ nên M nằm trên đường trung trực của AB với A(-1; 2) và B(-1;-1) nên trung điểm AB thuộc tập hợp cần tìm, từ đó ta thấy chỉ có đáp án D thỏa mãn.

Đáp án: **D.**

Ví dụ 2. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $|z-1+i|=1$ là: $y=2x-1$

A. Parabol $y=x^2$

B. Đường thẳng

C. Đường tròn tâm I(1; -1). Bán kính R=1

D. Đường tròn tâm I(-1;0) và R=1

Hướng dẫn giải

Gọi M(x;y) là điểm biểu diễn số phức z.

$|x+yi-1+i|=1 \Leftrightarrow |(x-1)+i(y+1)|=1 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=1$

Đây là đường tròn tâm $I(1;-1)$ bán kính R = 1.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng phức cho tam giác ABC vuông tại C. Biết rằng A, B lần lượt biểu diễn các số phức: $z_1 = -2+4i, z_2 = -2-2i$. Khi đó, C biểu diễn số phức:

A. $z = 2-4i$ **B.** $z = -1-2i$ **C.** $z = 1+i$ **D.** $z = -2+2i$

Hướng dẫn giải

Ta có do A, B lần lượt biểu diễn các số phức $z_1 = -2+4i, z_2 = -2-2i$ nên $A(-2;4)$; $B(-2;-2)$. Gọi $C(x;y)$ có $\overrightarrow{AC}(x+2;y-4)$; $\overrightarrow{BC}(x+2;y+2)$ khi đó tam giác ABC vuông tại C

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-4)(y+2)^2 = 0(*)$.

Khi đó ta xét $(x;y) = \{(2;-4),(-1;-2),(1;1),(-2;2)\}$ là tọa độ điểm C tương ứng với các phương án. Nhận thấy cặp $(1;1)$ thỏa mãn $(*)$. Đáp án: **C.**

III. Dạng lượng giác

Số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trong đó r>0 được gọi là dạng lượng giác của số phức $z \neq 0$. $r = |z|$.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi); z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$

$z.z' = r.r'(\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi'))$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}(\cos(\varphi-\varphi') + i\sin(\varphi-\varphi'))\ (z' \neq 0)$

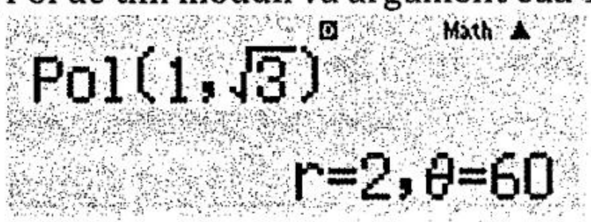
$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

Ví dụ 1: Tìm dạng lượng giác của số phức sau $z = 1+\sqrt{3}i$

Hướng dẫn giải

Có 2 cách, với cách thông thường ta có $z = 2.\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

Sử dụng chức năng Pol để tìm môđun và argument của 1 số phức



Vậy dạng lượng giác của $z = 1+\sqrt{3}i$ là $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

Ví dụ 2. Số phức $z = \dfrac{\sin 17^o + i\cos 17^o}{\cos 28^o + i\sin 28^o}$ có dạng đại số là:

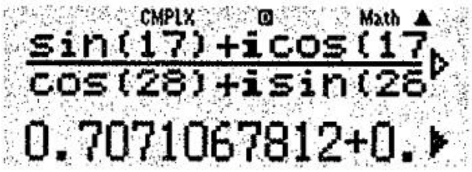
A. $1+i$ **B.** $1-i$ **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Hướng dẫn giải

Bấm Mode 2 để vào môi trường phức.

Sử dụng các phép toán trong môi trường phức bằng **(SHIFT 2)** để giải toán

Cụ thể ta có các thao tác trên Casio sau



Đáp án: **D.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm môđun của số phức thỏa mãn điều kiện $z - 2\bar{z} = 3 + 4i$

A. $\dfrac{\sqrt{97}}{3}$ **B.** $\sqrt{5}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ **D.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$

2. Môđun của số phức $z = 1 - 3i$ là:

A. $\sqrt{5}$ **B.** $\sqrt{10}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

3. Cho số phức z=2+i. Môđun của số phức $w = z^2 - 1$ là:

A. $\sqrt{5}$ **B.** $2\sqrt{5}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

4. Số phức z thỏa mãn $\dfrac{z}{1+i} = \bar{z} - \dfrac{1}{2}(3+i)$ là:

A. $z = 4 - i$ **B.** $z = 4 + 3i$ **C.** $z = 4 - 2i$ **D.** z=4+i

5. Cho số phức z thỏa mãn: $(2+i)z = 4 - 3i$. Môđun của số phức $w = iz + 2\bar{z}$ là:

A. $2\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{41}$ **C.** $\sqrt{32}$ **D.** 5

6. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z + 2\bar{z} = 2$. Môđun của số phức $w = z + 2 + 3i$ là:

A. 9 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 3

7. Tính $(1+i)^{2008}$ có kết quả là:

A. -2^{1004} **B.** 2^{1004} **C.** $-2^{1004}i$ **D.** $2^{1004}i$

8. Tính căn bậc hai số phức $z = 8 + 6i$ kết quả:

A. $\left[\begin{array}{l} z_1 = 3 + i \\ z_2 = -3 - i \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} z_1 = 3 - i \\ z_2 = 3 + i \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} z_1 = -3 + i \\ z_2 = 3 - i \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} z_1 = 3 - i \\ z_2 = -3 + i \end{array}\right.$

9. Tính $(1+i)^{2006}$ kết quả:

A. $2^{2003}i$ **B.** $-2^{2003}i$ **C.** 2^{2003} **D.** -2^{2003}

10. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai.

I. Cho z là số phức $z = a + bi$ thì $|\overline{z}| = |z|$

II. z_1, z_2 là hai số phức thì $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

III. Hai số phức z và $\overline{z}$ liên hợp với nhau thì $(z.\overline{z}) = |z|^2$

IV. Cho hai số phức z_1, z_2 thì $\arg(z_1.z_2) = \arg z_1.\arg z_2$

A. I **B.** II **C.** III **D.** IV

11. Trong các số phức sau, số nào là số thực:

A. $(\sqrt{3} + i) - (\sqrt{3} - i)$ **B.** $(2 + i\sqrt{5})(2 - i\sqrt{5})$

C. $\dfrac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - i}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2} - i}{\sqrt{2} + i}$

12. Cho số phức $z \neq 0$. Biết rằng số phức nghịch đảo của z bằng số phức liên hợp của nó. Trong các kết luận nào đúng?

A. $z \in \mathbb{R}$ **B.** z là 1 số thuần ảo

C. $|z| = 1$ **D.** $|z| = 2$

13. Tổng $i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3}$ bằng:

A. i **B.** $-i$ **C.** 1 **D.** 0

14. Cho số phức $z = 2 - 2\sqrt{3}i$. Kết luận nào sau đây là sai?

A. Số phức liên hợp của z là $2(1 + \sqrt{3}i)$ **B.** Một căn bậc hai của z là $\sqrt{3} - i$

C. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\sqrt{3}i + 1}{8}$ **D.** $z^3 = 64$

15. Cho hai số phức $z_1 = 2 - \sqrt{3}i, z_2 = 4 + 3i$. Lựa chọn phương án đúng

A. $|z_1 + z_2| \geq 8$ **B.** $|z_1 - z_2| = 5\sqrt{7}$ **C.** $|z_1.z_2| = 5$ **D.** $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$

16. Số phức nào sau đây cũng là số thực?

A. $z = \frac{1-2i}{3-4i} + \frac{1+2i}{3-4i}$ **B.** $z = \frac{1+2i}{3-4i} - \frac{1-2i}{3+4i}$

D. $z = \frac{1-2i}{3-4i} - \frac{1+2i}{3+4i}$ **C.** $z = \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{1-2i}{3+4i}$

17. Cho hai số phức $z_1 = 1+i, z_2 = 1-i$. Kết luận nào sau đây là sai?

A. $\frac{z_1}{z_2} = i$ **B.** $z_1 + z_2 = 2$ **C.** $|z_1.z_2| = 2$ **D.** $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$

18. Cho hai số phức $z_1 = 4+3i, z_2 = -4+3i, z_3 = z_1.z_2$

Lựa chọn phương án đúng

A. $\overline{z_1} = \overline{\overline{z_2}}$ **B.** $z_3 = |z_1|^2$ **C.** $\overline{z_1 + z_2} = z_1 + z_2$ **D.** $|z_3| = 25$

19. Tìm mệnh đề sai:

A. $|\overline{z}| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

B. Tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = 1$ là đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$

C. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$

D. Hai số phức bằng nhau khi và chỉ khi phần thực và phần ảo tương ứng bằng nhau.

20. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A biểu diễn số phức $z_1 = 1+2i$, B là điểm thuộc đường thẳng $y = 2$ sao cho tam giác OAB cân tại O. B biểu diễn số phức nào sau đây:

A. $z = -1+2i$ **B.** $z = 2-i$ **C.** $z = 1-2i$ **D.** $z = 3+2i$

21. Tromg mặt phẳng phức cho hai điểm $A(4,0); B(0,-3)$ Điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ C biểu diễn số phức:

A. $z = 4-3i$ **B.** $z = -3+4i$

C. $z = 4+3i$ **D.** $z = -3-4i$

22. Cho các kết luận sau, kết luận nào sai:

A. Hai số phức z_1, z_2 có $|z_1| = |z_2|$ thì các điểm z_1, z_2 biểu diễn trên mặt phẳng phức cùng nằm trên đường tròn gốc tọa độ.

B. Phần thực và phần ảo của số phức z bằng nhau thì z nằm trên đường phân giác góc phần tư thứ nhất và thứ ba.

C. Cho hai số phức u và v và hai số phức liên hợp $\overline{u}$ và $\overline{v}$ thì $\overline{uv} = \overline{vu}$

D. Cho $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ thì $\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) + (ad + bc)i$

23. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = -1 + 3i,\ z_2 = 1 + 5i,\ z_3 = 4 + i$. Số phức với điểm biểu diễn D sao cho tứ giác ABCD là một hình bình hành là:

A. $2 + 3i$ **B.** $2 - i$ **C.** $2 + 3i$ **D.** $3 + 5i$

24. Biểu diễn số phức sau dưới dạng lượng giác $z = 1 - \sqrt{3}i$ kết quả:

A. $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ **B.** $z = 2\left(\cos-\frac{\pi}{3} + i\sin-\frac{\pi}{3}\right)$

C. $z = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin-\frac{\pi}{3}\right)$ **D.** $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin-\frac{\pi}{3}\right)$

25. Cho $z_1 = 3(\cos 15^0 + i\sin 15^0), z_2 = 4(\cos 30^0 + i\sin 30^0)$. Tích $z_1.z_2$ bằng:

A. $12(1 - i)$ **B.** $6\sqrt{2}(1 + i)$ **C.** $3\sqrt{2}(1 - 2i)$ **D.** $\sqrt{2}(2 + i)$

26. Cho $z_1 = 3(\cos 20^0 + i\sin 20^0), z_2 = 2(-\cos 110^0 + i\sin 110^0)$. Tích $z_1.z_2$ bằng:

A. $6(1 - 2i)$ **B.** $4i$ **C.** $6i$ **D.** $6(1 - i)$

27. Biểu diễn $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^{10}$ dạng lượng giác là:

A $2^{10}\left(\cos-\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{-5\pi}{3}\right)$ **B.** $2^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

C. $2^{10}\left(\cos-\frac{10\pi}{3} + i\sin-\frac{10\pi}{3}\right)$ **D.** $2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. A	2. B	3. B	4. D	5. B	6. B	7. B	8. A	9. B	10. D
11. B	12. C	13. D	14. D	15. D	16. C	17. D	18. D	19. C	20. A
21. A	22. D	23. B	24. B	25. B	26. C	27. A			

1. $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow\bar{z}=a-bi;\ z-2\bar{z}=3+4i\Leftrightarrow -a+3bi=3+4i$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow|z|=\sqrt{3^2+\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{97}}{3}.$$

Đáp án: A.

2. $z=1-3i\Rightarrow|z|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}\Rightarrow$ **Đáp án: B.**

3. $w=z^2-1=(2+i)^2-1=2+4i;|w|=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}\Rightarrow$ **Đáp án: B.**

4. Gọi $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow\bar{z}=a-bi$

$$\frac{z}{1+i}=\bar{z}-\frac{1}{2}(3+i)\Leftrightarrow\frac{(a+bi)}{1+i}=(a-bi)-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=1\end{cases}\Rightarrow z=4+i\Rightarrow$$ **Đáp án: D.**

5. $z=\dfrac{4-3i}{2+i}=1-2i\Rightarrow\bar{z}=1+2i,\ w=iz+2\bar{z}=i(1-2i)+2(1+2i)=4+5i$

$\Rightarrow|w|=\sqrt{41}\Rightarrow$ **Đáp án: B.**

6. $z=a+bi(a,b\in R)\Rightarrow\bar{z}=a-bi$;

$(1+i).z+2\bar{z}=2\Leftrightarrow(1+i)(a+bi)+2(a-bi)=2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=+1\\ b=+1\end{cases}\Rightarrow z=1+i\Rightarrow w=(1+i)+2+3i=3+4i,|w|=\sqrt{9+16}=5.$$

Đáp án: B.

7. $(1+i)^{2008}=\left[(1+i)^2\right]^{2004}=(2i)^{2004}=2^{2004}\Rightarrow$ **Đáp án: B.**

8. $z=(8+6i)=(3+i)^2=(-3-i)^2\Rightarrow$ Chọn **A.**

9. $(1+i)^{2006}=\left[(1+i)^2\right]^{1003}=(2i)^{1003}=2^{1003}.i^{1003}=2^{1003}(-i)$

Đáp án: A.

10. IV sai vì : $\arg(z_1.z_2)=\varphi_1+\varphi_2$; $\arg z_1.\arg z_2=\varphi_1.\varphi_2$. **Đáp án: D.**

11. Thấy đáp án B : $\left(2+i\sqrt{5}\right)\left(2-i\sqrt{5}\right)=4+5=9\Rightarrow$ **Đáp án: B.**

12. $z=a+bi(a,b\in R)$; $\bar{z}=\dfrac{1}{z}\Leftrightarrow a-bi=\dfrac{1}{a+bi}\Leftrightarrow a^2+b^2=1\Leftrightarrow|z|=1.$

Đáp án: C.

13. $i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = i^k(1+i+i^2+i^3) = 0 \Rightarrow$ Đáp án: **D.**

14. Đáp án **D** sai vì : $z^3 = (2-2\sqrt{3}i)^3 = -64$.

15. $z_1 + z_2 = 6 + \left(3-\sqrt{3}\right)i \Rightarrow \left|z_1 + z_2\right| = \sqrt{36 + \left(3-\sqrt{3}\right)^2} < 8 \Rightarrow$ A sai.

$z_1 - z_2 = -2 - \left(3+\sqrt{3}\right)i \Rightarrow \left|z_1 - z_2\right| = \sqrt{4 + \left(3+\sqrt{3}\right)^2} \neq 5\sqrt{7} \Rightarrow$ B sai.

$z_1.z_2 = 8 + 3\sqrt{3} + (6-4\sqrt{3})i \Rightarrow \left|z_1.z_2\right| \neq 5 \Rightarrow$ C sai.

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2-\sqrt{3}i}{4+3i} = \dfrac{8-3\sqrt{3}}{25} - \dfrac{6+4\sqrt{3}}{25}i \Rightarrow \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{\sqrt{7}}{5} \Rightarrow$ **D** đúng. Đáp án: **D.**

16. Thử các đáp án ta thấy D ta có : $z = \dfrac{1+2i}{3-4i} + \dfrac{1-2i}{3+4i} = \dfrac{-2}{5} \Rightarrow$ Đáp án: **D.**

17. Thử các đáp án ta thấy ở đáp án D: $z_1 - z_2 = 2i; \left|z_1 - z_2\right| = 2.$ Vậy đáp án D sai
Đáp án: **D.**

18. Thử các đáp án ta thấy D $z_3 = z_1.z_2 = -25 \Rightarrow \left|z_3\right| = 25 \Rightarrow$ Đáp án: **D.**

19. $z_1 = z_2 \Rightarrow \left|z_1\right| = \left|z_2\right|$ là đúng, $\left|z_1\right| = \left|z_2\right| \Rightarrow z_1 = z_2$ là sai. Vậy đáp án C sai $\Rightarrow$
Đáp án: **C.**

20. Điểm $A(1;2)$; B thuộc đường thẳng $y = 2 \Rightarrow B(t;2)$

$\overrightarrow{OA} = \left(1;2\right)$; $\overrightarrow{OB} = \left(t;2\right)$; ΔOAB cân tại $O \Rightarrow OA = OB \Leftrightarrow OA^2 = OB^2$

$\Rightarrow 5 = t^2 + 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (loại)} \\ t = -1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow B(-1;2) \Rightarrow z = -1 + 2i \Rightarrow$ Đáp án: **A.**

21. $\overrightarrow{OA} = \left(4;0\right); \overrightarrow{OB} = \left(0;-3\right); \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (4;-3) = \overrightarrow{OC} \Rightarrow C(4;-3)$

$\Rightarrow z = 4 - 3i \Rightarrow$ Đáp án: **A.**

22. $z_1.z_2 = (a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i \Rightarrow \overline{z_1.z_2} = ac - bd - (ad+bc)i$

$\Rightarrow$ Đáp án D sai $\Rightarrow$ Đáp án: **D.**

23. $A(-1;3);\ B(1;5);\ C(4;1);\ D(x;y)$

$\overrightarrow{AB} = \left(2;2\right); \overrightarrow{DC} = \left(4-x;1-y\right)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x = 2 \\ 1 - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow z = 2 - i$

$\Rightarrow$ Đáp án: **B.**

24. $z=1-\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)\Rightarrow$ Chọn **B.**

25. $z_1.z_2=3.4\left(\cos\left(15^0+30^0\right)\right)+i\sin\left(\left(15^0+30^0\right)\right)=12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=6\sqrt{2}\left(1+i\right)$

$\Rightarrow$ Chọn **B.**

26. $z_1.z_2=3.2\left(\cos\left(20^0+70^0\right)\right)+i\sin\left(\left(20^0+70^0\right)\right)=6\left(0+i\right)=6i$

(Vì $\cos 70^0=-\cos 110^0;\sin 110^0=\sin 70^0$)

$\Rightarrow$ **Đáp án: C.**

27. $z=\left(\sqrt{3}-i\right)^{10}=2^{10}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)^{10}=2^{10}\left(\cos\left(\frac{-10\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-10\pi}{6}\right)\right)$

$=2^{10}\cos\left(\left(\frac{-5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-5\pi}{3}\right)\right)$

Đáp án: A.

Bài 2. Phương trình trên tập số phức

I. LÝ THUYẾT

1. Căn bậc 2

ω được gọi là căn bậc 2 của số phức z $\Leftrightarrow \omega^2 = z$.

Ví dụ: $(2+3i)^2 = -5+12i$. Vậy $-5+12i$ có 2 căn bậc 2 là

$$\omega_1 = 2+3i; \omega_2 = -2-3i$$

Lưu ý: $z \in \mathbb{R}$

+) $z > 0$ thì z có 2 căn bậc 2 là $\sqrt{z}$ và $-\sqrt{z}$

+) $z = 0$ thì z chỉ có 1 căn bậc 2 là 0

+) $z < 0$ thì z có 2 căn bậc 2 là $\sqrt{|z|}$ và $-\sqrt{|z|}$

Ví dụ 1. Các căn bậc hai của số phức $z = 21-20i$ là:

A. $5+2i$ và $-5+2i$ **B.** $5+2i$ và $-5-2i$

C. $5-2i$ và $-5+2i$ **D.** $-5-2i$ và $-5+2i$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi $x+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là một căn bậc hai của z.

Ta có: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 & (1) \\ 2xy = -20 & (2) \end{cases}$

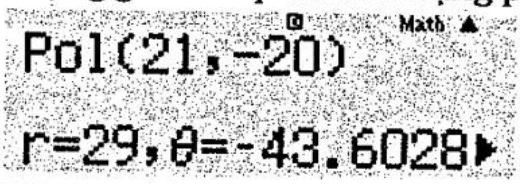
(2) $\Leftrightarrow y = -\dfrac{10}{x}$. Thay $y = -\dfrac{10}{x}$ vào (1) ta được

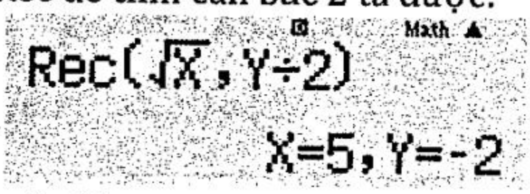
$x^2 - \dfrac{100}{x^2} = 21 \Leftrightarrow x^4 - 21x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$

$x = 5 \Rightarrow y = -2; x = -5 \Rightarrow y = 2$

Đáp án: **C**.

Cách 2: Sử dụng chức năng Pol trong Casio chuyển $z = 21-20i$ về dạng lượng giác. Tiếp đến sử dụng phím Rec để tính căn bâc 2 ta được:





Vậy $z = 21-20i$ có 1 căn bậc 2 là $w = 5-2i$.

Đáp án: C.

2. Phương trình bậc hai trên tập số phức $ax^2+bx+c=0$

$\Delta = b^2-4ac$

Trường hợp 1: $\Delta = 0 \Rightarrow$ (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

Trường hợp 2: $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt

Giả sử σ là 1 căn bậc hai của Δ thì PT (1) có 2 nghiệm phân biệt là

$$x_1 = \frac{-b-\sigma}{2a}; x_2 = \frac{-b+\sigma}{2a}.$$

Ta cùng xem lại 1 ví dụ trong phần kĩ năng casio

Ví dụ 2. Cho z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2+2(1+i)x+5-10i=0$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A $z_1^2+z_2^2=-10+28i$ **B.** $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=-\dfrac{66+8i}{25}$

C. $z_1^3+z_2^3=106-46i$ **D.** $z_2z_1^2+z_1z_2^2=-30+10i$

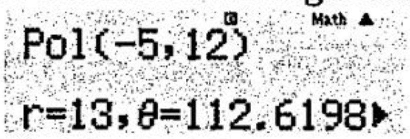
Hướng dẫn giải

Bước 1: Tìm nghiệm z_1, z_2

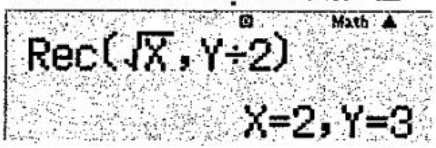
+ Tính căn bậc hai của Δ'

- Có $\Delta' = (i+1)^2-5+10i=-5+12i$

- Sử dụng chức năng Pol để tìm môđul và argument của Δ



- Sử dụng chức năng Rec để tính căn bậc n của Δ



Do ta đang cần tính căn bậc 2 nên nhập $\sqrt{X}, \dfrac{Y}{2}$ nếu là căn bậc n thì ta sẽ nhập $\sqrt[n]{X}, \dfrac{Y}{n}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là

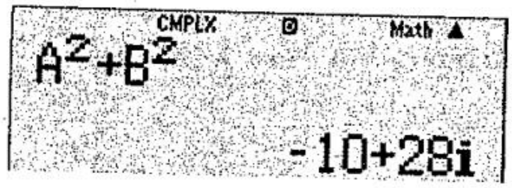
$$z_1 = -(1+i)+2+3i = 1+2i$$
$$z_2 = -(1+i)-(2+3i) = -3-4i$$

Ta gán $z_1 \to A, z_2 \to B$

Khi đó ta tính từng đáp án

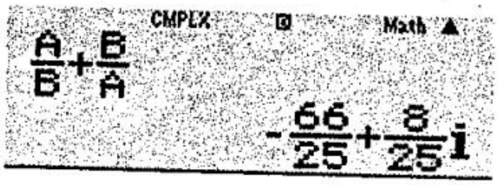
$A. z_1^2 + z_2^2 = -10 + 28i$

Được kết quả đúng



$B. \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} = -\dfrac{66+8i}{25}$

Được kết quả



Đáp án: **B.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

1. Gọi là 2 nghiệm phức của phương trình $2(1+i)z^2 - 4(2-i)z - 5 - 3i = 0$. Tính $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$ được kết quả là:

A. 9 **B.** $\sqrt{21}$ **C.** 8 **D.** $2\sqrt{2}$

2. Số phức nào sau đây là nghiệm của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$?

A. $z = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ **B.** $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ **C.** $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ **D.** $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$

3. Hệ phương trình: $\begin{cases} (1+i)x - 3y = i \\ x + (1-i)y = -i \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = \dfrac{1-2i}{5} \\ y = \dfrac{1-2i}{5} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = \dfrac{1-2i}{5} \\ y = \dfrac{1+2i}{5} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = \dfrac{1+2i}{5} \\ y = \dfrac{1-2i}{5} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = \dfrac{1+2i}{5} \\ y = \dfrac{1+2i}{5} \end{cases}$

4. Nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 1 - 2i = 0$ là:

A. $\begin{cases} z_1 = i - 2 \\ z_2 = -i \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} z_1 = i + 2 \\ z_2 = -i \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} z_1 = i + 2 \\ z_2 = 2 - i \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} z_1 = 2 - i \\ z_2 = -i \end{cases}$

5. Cho phương trình $z^2-2=2i(z-2)$. Gọi z_1, z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. ${z_1}^3+{z_2}^3=8+4i$ **B.** ${z_1}^2.{z_2}^2=4$

C. ${z_1}^2+{z_2}^2=-8i$ **D.** ${z_1}^3z_2+{z_2}^3z_1=32+16i$

6. Giải phương trình $(3+4i)x=(1+2i)(4+i)$ có nghiệm là:

A. $\frac{45}{25}+\frac{19}{25}i$ **B.** $\frac{44}{25}+\frac{19}{25}i$ **C.** $\frac{42}{25}+\frac{19}{25}i$ **D.** $\frac{41}{25}+\frac{19}{25}i$

7. Khai căn bậc hai số phức $z=-3+4i$ có kết quả:

A. $\left[\begin{array}{l} z_1=1+2i \\ z_2=1-2i \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} z_1=1+2i \\ z_2=-1-2i \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} z_1=1+2i \\ z_2=-1+2i \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} z_1=-1+2i \\ z_2=-1-2i \end{array}\right.$

8. Phương trình $3z^2-6z+15=0$ có nghiệm phức là:

A. $z=1+2i$ và $z=1-2i$ **B.** $z=1+2i$

C. $z=2+2i$ và $z=2-2i$ **D.** $z=2+2i$

9. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm $\alpha=4+3i;\beta=-2+i$ có kết quả:

A. $z^2-(2+4i)z-(11+2i)=0$ **B.** $z^2+(2+4i)z-(11+2i)=0$

C. $z^2-(2+4i)z+(11+2i)=0$ **D.** $z^2+(2+4i)z+(11+2i)=0$

10. Giải phương trình $2x^2+x+1=0$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{7}i\right) \\ x_2=\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{7}i\right) \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{7}i\right) \\ x_2=\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{7}i\right) \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{7}i\right) \\ x_2=\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{7}i\right) \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{7}i\right) \\ x_2=\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{7}i\right) \end{array}\right.$

11. Phương trình $x^2+(2-3i)x-6i=0$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x_1=3i \\ x_2=-2 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x_1=-3i \\ x_2=-2+3i \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x_1=-2+3i \\ x_2=-2-3i \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x_1=2-3i \\ x_2=-2-3i \end{array}\right.$

12. Phương trình bậc 2 có 2 nghiệm $x_1=a+bi;x_2=a-bi$ là:

A. $x^2+2ax+a^2+b^2=0$ **B.** $x^2+2ax+a^2-b^2=0$

C. $x^2-2ax+a^2+b^2=0$ **D.** $x^2-2ax+a^2-b^2=0$

13. Cho z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2+(2-i)x+3+5i=0$. Các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng:

A. $z_1^2+z_2^2=-3-14i$ **B.** $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=-\frac{79+27i}{14}$

C. $z_1^3+z_2^3=-(53+46i)$ **D.** $z_1^4+z_2^4=-155-24i$

14. Phương trình bậc hai có hai nghiệm $z_1=3+2i$ và $z_2=2+3i$ là:

A. $z^2-(5-5i)z+13i=0$ **B.** $z^2-(5+5i)z+13i=0$

C. $z^2-(5+5i)z-13i=0$ **D.** $z^2-(5-5i)z-13i=0$

15. Nghiệm của phương trình $z^3-8=0$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} z_1=2 \\ z_2=1+\sqrt{3}i \\ z_3=1-\sqrt{3}i \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} z_1=2 \\ z_2=-1+\sqrt{3}i \\ z_3=-1-\sqrt{3}i \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} z_1=-2 \\ z_2=-1+\sqrt{3}i \\ z_3=-1-\sqrt{3}i \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} z_1=-2 \\ z_2=1+\sqrt{3}i \\ z_3=1-\sqrt{3}i \end{array}\right.$

16. Trong $\mathbb{C}$, phương trình $z^4+4=0$ có nghiệm là:

A. $\pm(1-i),\ \pm(1+i)$ **B.** $\pm(1-2i),\ \pm(1+2i)$

C. $\pm(1-3i),\ \pm(1+3i)$ **D.** $\pm(1-4i),\ \pm(1+4i)$

17. Cho phương trình $z^2+bz+c=0$. Nếu phương trình nhận $z=1+i$ làm một nghiệm thì b và c bằng:

A. $b=3,\ c=5$ **B.** $b=1,\ c=3$

C. $b=4,\ c=3$ **D.** $b=-2,\ c=2$

18. Cho phương trình $z^3+az^2+bz+c=0$ Nếu $z=1+i$ và $z=2$ là hai nghiệm của phương trình thì a, b, c bằng:

A. $a=-4,\ b=6,\ c=-4$ **B.** $a=2,\ b=1,\ c=4$

C. $a=4,\ b=5,\ c=1$ **D.** $a=0,\ b=-1,\ c=2$

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. A	**2. C**	**3. A**	**4. B**	**5. C**	**6. C**	**7. B**	**8. A**	**9. A**	**10. A**
11. A	**12. C**	**13. A**	**14. B**	**15. B**	**16. A**	**17. D**	**18. A**		

1. $2(1+i).z^2-4(2-i).z-5-3i=0$

Sử dụng Casio ta tính được: $\left[\begin{array}{l} z_1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ z_2=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i \end{array}\right.$

$\Rightarrow |z_1|^2+|z_2|^2=9 \Rightarrow$ Đáp án: **A.**

2. $z^2-z+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$ (Sử dụng máy tính Casio)

$\Rightarrow$ Đáp án: **C**

3. $\begin{cases}(1+i)x-3y=i \\ x+(1-i)y=-i\end{cases} \Rightarrow -3y-(1-i)(1+i)y=i+i(1+i) \Leftrightarrow y=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

$\Rightarrow x=-i-(1-i)y=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i \Rightarrow$ Đáp án: **A.**

4. $z^2-2z+1-2i=0$.

Sử dụng Casio ta có: $\left[\begin{array}{l} z_1=i+2 \\ z_2=-i \end{array}\right. \Rightarrow$ Đáp án: **B.**

5. Phương trình $\Leftrightarrow z^2-2iz+4i-2=0$

Theo định lý Vi-et, ta có: $z_1+z_2=2i$; $z_1.z_2=4i-2$

Thử đáp án thấy **C** thỏa mãn.

6. $x=\frac{(1+2i)(4+i)}{3+4i}=\frac{42}{25}+\frac{19}{25}i \Rightarrow$ Đáp án: **C.**

7. Sử dụng Casio ta có $(1+2i)^2=-3+4i \Rightarrow$ Đáp án: **B.**

8. Sử dụng Casio có : $3z^2-6z+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+2i \\ z=1-2i \end{array}\right. \Rightarrow$ Đáp án: **A.**

9. $\alpha+\beta=2+4i$; $\alpha.\beta=-11-2i \Rightarrow$ Phương trình cần lập:

$z^2-(\alpha+\beta)z+\alpha\beta=0 \Leftrightarrow z^2-(2+4i)-11-2i=0$

$\Rightarrow$ Đáp án: **A.**

10. Sử dụng Casio có : $2x^2+x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{7}}{4}i \\ x=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{7}}{4}i \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Đáp án: **A.**

11. Dùng Casio thử các đáp án thấy $x=3i$ và $x=-2$ thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án: **A.**

12. $x_1.x_2=a^2+b^2; x_1.x_2=2a$

Theo định lý Vi- ét thì x_1, x_2 là nghiệm của của phương trình:

$x^2-2ax+a^2+b^2=0$

Đáp án: **C.**

13. Theo định lý Vi- ét $z_1.z_2=3+5i; z_1+z_2=i-2$

Thay vào các đáp án thấy: ${z_1}^2+{z_2}^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2 = -3-14i$

$\Rightarrow$ Đáp án: **A.**

14. $z_1+z_2=5+5i; z_1.z_2=13i$

Phương trình cần tìm: $z^2-(5+5i).z+13i=0 \Rightarrow$ Đáp án: **B.**

15. Sử dụng Casio $\Rightarrow$ Đáp án: **B.**

16. Thử các đáp án ta thấy A đúng $\Rightarrow$ Đáp án: **A.**

17. Thay $z=1+i$ vào phương trình:

$(1+i)^2+b(1+i)+c=0 \Leftrightarrow b+c+(b+2)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Đáp án: **D.**

18. Thay $z=1+i$ và $z=2$ vào phương trình:

$\Rightarrow \begin{cases} 8+4a+2b+c=0 \\ (1+i)^3+a(1+i)^2+b(1+i)+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=6 \\ c=-4 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Đáp án: **A.**

Cách khác: Thay a,b,c trong các đáp án vào phương trình và tính nghiệm

CHƯƠNG VIII. PHƯƠNG PHÁP TƯ DUY GIẢI CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN

1. Cấp số cộng: $u_1, u_n = u_1 + (n-1)d$.

Tổng của n số hạng đầu của cấp số cộng được gọi là tổng riêng thứ n.

Ta có: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$.

2. Cấp số nhân: $u_1;\ u_n = u_1.q^{n-1}$

Ta có $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 + u_1.r + ... + u_1.r^{n-1} = \frac{u_1(r^n - 1)}{r-1}$.

3. Bài toán lãi suất ngân hàng

Thông thường có hai hình thức tính lãi gồm lãi đơn (phần lãi của mỗi kì được tính trên số tiền gốc ban đầu) và lãi kép (phần lãi của kì sau được tính trên số tiền gốc kì trước cộng với phần lãi của kì trước).

Giả sử số tiền gốc là A; lãi suất r%/kì hạn gửi (có thể là tháng, quý hay năm).

+) *Lãi đơn:* Tiền lãi của kì trước không được tính vào vốn của kì tiếp theo, đến kì hạn người gửi không rút lãi ra.

Số tiền lãi nhận được nếu gửi theo hình thức lãi đơn sau n kì hạn gửi là $n.A.r$, số tiền nhận được cả gốc và lãi sau n kì hạn gửi là

$C = A + n.Ar = A(1 + n.r)$

+) *Lãi kép:* Đến kì hạn người gửi không rút tiền lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kì tiếp theo

Số tiền nhận được cả gốc và lãi sau n kì hạn gửi với hình thức lãi kép là $A(1+r)^n$, số tiền lãi nhận được sau n kì hạn gửi là $C = A\left[(1+r)^n - 1\right]$

Tương tự có thể xây dựng cho các bài toán mà số tiền gốc bị giảm đi từ kì hạn gửi thứ k.

Ví dụ *(Câu 21- Đề minh họa THPT quốc gia 2017).* Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách : Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu ? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m = \frac{100.(1,01)^3}{3}$ (triệu đồng) **B.** $m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3 - 1}$ (triệu đồng)

C. $m = \frac{100.1,03}{3}$ (triệu đồng) **D.** $m = \frac{120.(1,12)^3}{(1,12)^2 - 1}$ (triệu đồng)

Hướng dẫn giải

P=100 triệu, 12%/Năm $\Rightarrow$ 1%/tháng, r = 0,01, rP = 1.

Ta giả sử các tháng là:

1/03 $\xrightarrow{thang 1}$ 1/04 $\rightarrow$ Lãi rp; $m = m_1 + rp$

$\searrow$ Trả gốc $m_1 \Rightarrow$ Còn nợ P-m1

01/4 $\xrightarrow{thang 2}$ 1/05 $\rightarrow$ Lãi r(p- m_1) $\longrightarrow m = m_2 + r(p - m_1)$

$\searrow$ Trả gốc m_2 $\longrightarrow$ Còn nợ P-m1-m2

01/05 $\xrightarrow{thang 3}$ 1/06 $\rightarrow$ Lãi r(p−m1−m2) $m = m_3 + r(p - m_1 - m_2)$

$\searrow$ Trả nốt gốc $m_3 = p - m_1 - m_2$

Theo đề

$$\Rightarrow m_1 + rP = m_2 + r(P - m_1) \Rightarrow m_2 = m_1(1+r);\ m_3 = m_2(1+r) = m_1(1+r)^2$$

$$m_1 + m_2 + m_3 = P \Rightarrow m_1 = \frac{rP}{(1+r)^3 - 1} \Rightarrow m = m_1 + rP = rP.\frac{(1+r)^3}{(1+r)^3 - 1}$$

Đáp án: **B.**

Công thức chung: $m_k = m_1(1+r)^{k-1}$ và số tiền trong mỗi lần đóng sẽ là:

$$m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_k = P \Rightarrow m_1 = \frac{rP}{(1+r)^k - 1} \Rightarrow m = m_1 + rP = rP.\frac{(1+r)^k}{(1+r)^k - 1}$$

Nhận xét: Đối với bài toán về tiền lãi thì quan trọng nhất là ta xác định được tiền gốc cho lần kì hạn tiếp theo.

4. Bài toán ứng dụng tích phân

Các đại lượng vật lí có mối liên hệ toán học với nhau, ta có thể xem đại lượng này là đạo hàm của đại lượng kia tại một thời điểm nào đó. Từ đó có sự liên hệ về nguyên hàm và tích phân trong việc tính giá trị các đại lượng đó. Chúng ta thường gặp nhất là sự liên hệ giữa quãng đường, vận tốc và gia tốc của chất điểm trong quá trình chuyển động.

5. Bài toán cực trị

Trong thực tế ta luôn có nhu cầu tối ưu một vấn đề nào đó, đơn giản nhất đó là lợi ích một cách tối đa và chi phí một cách tối thiểu. Chính vì vậy các bài toán về tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất luôn cần thiết trong đời sống hàng ngày.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Biết rằng tỉ lệ lam phát hàng năm của một quốc gia trong 10 năm qua là 5%. Năm 1994 tiền nạp xăng cho một ô tô là 24,95 USD. Năm 2000, tiền nạp xăng cho xe ô tô đó phải là:

A. $33,44\ USD$ **B.** $23,44\ USD$ **C.** $34,43\ USD$ **D.** $43,34\ USD$

2. Tỉ lệ tăng dân số hàng năm của In-đô-nê-xi-a là $1,5\%$. Năm 1998, dân số của nước này là 212 942 000 người. Dân số của In-đô-nê-xi-a vào năm 2006 là:

A. 240 091 000 **B.** 250 091 000

C. 260 091 000 **D.** 230 091 000

3. Năm 1994, tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí là $\frac{358}{10^6}$. Biết rằng tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí tăng $0,4\%$ hàng năm. Năm 2004, tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí là:

A. 373.10^{-7} **B.** 373.10^{-6} **C.** 273.10^{-6} **D.** 373.10^{-7}

4. Biết rằng tỉ lệ giảm dân số hàng năm của Nga là $0,5\%$ Năm 1998, dân số của Nga là 146 861 000 người. Năm 2008 dân số của Nga sẽ là:

A. 139 899 000 **B.** 149 699 000

C. 159 899 000 **D.** 139 699 000

5. Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu là mmHG) suy giảm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức là P giảm theo công thức

$$P = P_0.e^{xi}$$

Trong đó $P_0 = 760mmHg$ là áp suất ở mức nước biển $(x = 0)$, i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000m thì áp suất không khí là 672,71mmHg. Áp suất không khí ở độ cao 3000m (gần đúng) là:

A. $530,23mmHg$ **B.** $630,23mmHg$

C. $430,23mmHg$ **D.** $330,23mmHg$

6. Vận tốc của một vật chuyển động là $v(t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin(\pi t)}{\pi}(m/s)$. Tính quãng đường di chuyển của vật đó trong khoảng thời gian 1,5 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là:

A. $0,34(m)$ **B.** $0,034(m)$ **C.** $0,34(cm)$ **D.** $3,4(cm)$

7. Một vật di chuyển với vận tốc của một vật chuyển động là $v(t)=1,2+\frac{t^2+4}{t+3}(m/s)$. Quãng đường di chuyển của vật đó trong khoảng thời gian 4 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là:

A. $11,81(m)$ **B.** $12,81(m)$ **C.** 11,21 **D.** 12.21

8. Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính $\sqrt{3}$ cm, hình trụ có thể tích lớn nhất là:

A. $3\pi\,\text{cm}^3$ **B.** $2\pi\,\text{cm}^3$ **C.** $4\pi\,\text{cm}^3$ **D.** $5\pi\,\text{cm}^3$

9. Cho con lắc lò xo dao động với phương trình : $x=3\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\ (m)$

Tính độ lớn gia tốc của vật tại thời điểm $t=5s$.

A. $6\pi^2$ **B.** $7\pi^2$ **C.** $8\pi^2$ **D.** $9\pi^2$

10. Để làm một lon cà phê Birdy, người ta phải làm một lon hình trụ có thể tích thực là $200ml$ bằng nhôm, giá nhôm là 70.000 đồng trên một mét vuông . Hỏi lon cà phê có chiều cao bao nhiêu để số tiền làm lon là ít nhất?

A. $\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$ **B.** $\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ **C.** $\sqrt[3]{\frac{300}{\pi}}$ **D.** $\sqrt[3]{\frac{350}{\pi}}$

11. Thể tích V của 1kg nước ở nhiệt độ T (T nằm giữa 0^0 và 30^0) được cho bởi công thức

$V=999,87-0,06426T+0,0085043T^2-0,0000679T^3(cm^3)$. Để nước có khối lượng riêng lớn nhất thì nhiệt độ lúc đó là: (tính gần đúng)

A. $T\approx 0,96\left({}^0C\right)$ **B.** $T\approx 3,9665\left({}^0C\right)$ **C.** $T\approx 2,9665\left({}^0C\right)$ **D.** $T\approx 1,96\left({}^0C\right)$

12. Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm được cho bởi công thức

$$f(\text{v})=\frac{290,4v}{0,36v^2+13,2v+264}\ \text{(xe/giây)},$$

Trong đó v(km/h) là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là:

A. 27,08 (km/h); 8,9 (xe/giây) **B.** 27,08 (km/h); 9,8 (xe/giây)

C. 25,08 (km/h); 8,9 (xe/giây) **D.** 25,08 (km/h); 9,8 (xe/giây)

13. Một người ném xiên một viên đá lên không trung theo quỹ đạo parabol có phương trình $y=-2x^2+8x-3$, vị trí viên đá di chuyển gắn với trục tọa độ Oxy . Khi đạt vị trí cao nhất , được biểu diễn là số phức nào?

A. $z=2+5i$ **B.** $z=5+2i$ **C.** $z=1-4i$ **D.** $z=4-i$

14. Trong tất cả các hình hộp chữ nhật có diện tích toàn phần là 96 , thì hình hộp chữ nhật có diện tích lớn nhất là:

A. 64 **B.** 125 **C.** 27 **D.** 216

15. Thầy giáo Nam gửi ngân hàng 100 triệu với lãi suất 10% một năm, và lãi hàng năm được cộng vào vốn , sau 5 năm thầy gửi thêm 100 triệu nữa vào tài khoản . Hỏi sau 10 năm thầy Nam nhận được bao nhiêu (lấy giá trị gần nhất)?

A. 420 triệu **B.** 421 triệu **C.** 422 triệu **D.** 423 triệu

16. Vào $10:00 p.m$, ngày 30/1/1952, khi sử dụng máy tính tự động Western U.S National Bureau of standords, người ta đã tìm ra số Mersenne M_{521} : $2^{521}-1$ là số nguyên tố . Hỏi khi viết ở hệ thập phân , số M_{521} có bao nhiêu chữ số?

A. 155 **B.** 156 **C.** 157 **D.** 158

17. Hàng ngày mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy chiều , độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong một ngày cho bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+12$ xác định trên $[16;21]$

Mực nước trong kênh thấp nhất tại thời điểm t bằng:

A. 17 **B.** 18 **C.** 19 **D.** 16

18. Một vật chuyển động với gia tốc $v(t)$ m/s , có gia tốc $a=t^2+t\ (m/s^2)$.

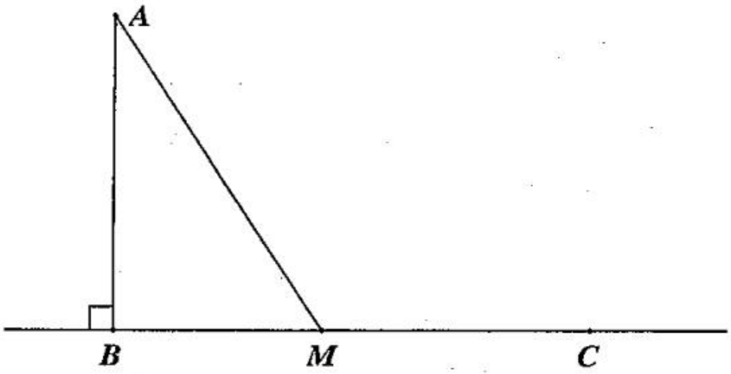
Vận tốc ban đầu của vật là $7m/s$. Hỏi sau 7s, vận tốc của vật là bao nhiêu (tính giá trị gần nhất)?

A. $398m/s$ **B.** $400m/s$ **C.** $399m/s$ **D.** $256m/s$

19. Sau khi phát hiện bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là : $f(t)=45t^2-t^3$. Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) thì tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ:

A. 12 **B.** 15 **C.** 20 **D.** 25

20. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển 1 khoảng AB = 5km. Trên bờ có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h (hình vẽ). Để người đó đến kho nhanh nhất thì BM bằng



A. $2\sqrt{6}$ **B.** $2\sqrt{5}$ **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** $2\sqrt{2}$

21. Một công ti bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì có thêm hai căn hộ bỏ rỗng. Để thu nhập cao nhất, công ti đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá một tháng là:

A. 2.100.000 **B.** 2.200.000 **C.** 2.225.000 **D.** 2.250.000

22. Một khu rừng có trữ lượng gỗ 4.10^5 mét khối . Biết tốc độ sinh trưởng của các cây trong rừng đó là 4% mỗi năm . Hỏi sau 5 năm , khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ?

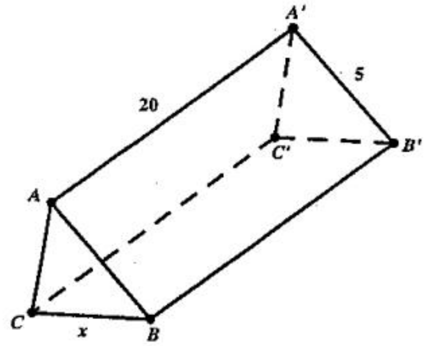
A. $4,8666.10^5$ **B.** $5,8666.10^5$ **C.** $6,8666.10^5$ **D.** $7,8666.10^5$

23. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = 6t^2 - t^3$. Thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là:

A. t = 1 **B.** t = 2 **C.** t = 3 **D.** t = 4

24. Một hành lang giữa hai nhà có hình dạng của một lăng trụ đứng (hình vẽ). Hai mặt ABB'A' và ACC'A'là hai tấm kính chữ nhật dài 20m, rộng 5m. Gọi x (mét) là độ dài cạnh BC.

Thể tích lớn nhất của lăng trụ có thể đạt được là:

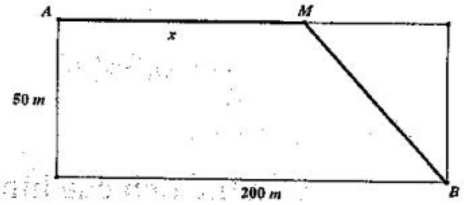


A. 250 **B.** $\frac{250}{3}$ **C.** 300 **D.** 100

25. Một con lắc lò xo dao động với phương trình: $x = 3\cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})$ (m). Độ lớn của gia tốc của vật tại thời điểm t = 5s là:

A. $6\pi^2$ **B.** $-8\pi^2$ **C.** $8\pi^2$ **D.** $-6\pi^2$

26. Một vận động viên tập luyện một môn thể thao bao gồm cả chạy phối hợp với bơi từ góc này sang góc đối diện của một hồ nước hình chữ nhật chiều rộng 50m, chiều dài 200m. Sau khi chạy được quãng đường x thì người đấy chuyển sang bơi đến đích. Giá trị của x để thời gian người ấy về đích nhanh nhất là bao nhiêu? Biết vận tốc bơi là 1.5 m/s, vận tốc chạy là 4.5 m/s.



A. 50 **B.** 100 **C.** 150 **D.** 200

27. Cắt bỏ hình quạt tròn AOB (hình phẳng có nét gạch trong hình 1.3) từ một mảnh các tông tròn bánh kính R rồi dán hai bán kính OA và OB của hình quạt tròn còn lại với nhau để được một cái phễu có dạng một hình nón. Gọi x là góc ở tâm của quạt tròn dung làm phễu (h.1.3), $0 < x < 2\pi$.

Thể tích lớn nhất của hình nón là:

A. $\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{27}\pi R^3$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{18}\pi R^3$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{18}\pi R^3$

28. Một sợi dây chiều dài L được cắt thành 2 đoạn: đoạn 1 uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn 2 uốn thành đường tròn bán kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ là:

A. π B. 2π C. 3π D. 4π

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1. A	**2. A**	**3. B**	**4. D**	**5. A**	**7. A**	**6. A**	**8. C**	**9. A**	**10. A**
11. B	**12. A**	**13. A**	**14. A**	**15. A**	**16. C**	**17. D**	**18. C**	**19. B**	**20. B**
21. D	**22. A**	**23. B**	**24. A**	**25. A**	**26. D**	**27. A**	**28. A**		

1. Công thức tổng quát $C = A(1+0,05)^n\ USD$; Tiền nạp xăng năm 2000 cho ô tô đó là $33,44\ USD$. Đáp án: **A.**

2. $C = A(1+0,015)^n$; Dân số của In-đô-nê-xi-a vào năm 2006 là $240\ 091\ 000$. Đáp án: **A.**

3. Đáp án: **B.**

4. Đáp án: **D.**

5. Đáp án: **A.**

Trước tiên tìm i từ đẳng thức

$672,71 = 760.e^{1000.i} (i \approx 0,00012)$

Từ đó $p \approx 760.e^{3000.(-0,00012)}$

6. Đáp án: **A.**

$$\frac{3}{4\pi} + \frac{1}{\pi^2} \approx 0,34(m)$$

7. Đáp án: **A.** $0,8 - 13\ln 3 + 13\ln 7 \approx 11,81(m)$

8. Kí hiệu chiều cao , bán kính đáy và thể tích của hình trụ nội tiếp hình cầu lần lượt là h , r và V. khi đó, $V = \pi r^2 h$.

Vì $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$ nên $V = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h = \pi\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$V(h)=\pi\left(R^2h-\frac{h^3}{4}\right), h\in(0;2R)$. $V_{max}=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ khi $h=\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Khi $R=\sqrt{3}$ thì ta được kết quả. Đáp án: **C.**

9. Có $a=x''(t)=-12\pi^2\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\ (m/s^2)$

Tại $t=5s \Rightarrow |a|=6\pi^2$. Đáp án: **A.**

10. Có $h\pi R^2=200\Rightarrow h=\frac{200}{\pi R^2}$; $Stp=\pi R^2+2\pi Rh=\pi R^2+\frac{400}{R}=f(R)$

$\Rightarrow f'(R)=2\pi R-\frac{400}{R^2}\Rightarrow f'(R)=0\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}\Rightarrow f(R)\min\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$

Đáp án: **A.**

11. Để khối lượng riêng của nước lớn nhất thì thể tích của 1 kg nước phải nhỏ nhất. Ta có V_{min} đạt tại $T\approx 3,9665\left({}^0C\right)$

Đáp án: **B.**

12. Đáp án: **A.**

$f'(v)=290,4.\frac{-0,36v^2+264}{\left(0,36v^2+13,2v+264\right)^2}, v>0$

$$f'(v)=0\Leftrightarrow v=\frac{\sqrt{264}}{0,6}$$

f đạt giá trị lớn nhất khi $v=\frac{\sqrt{264}}{0,6}\approx 27,08$ (km/h)

$$f\left(\frac{\sqrt{264}}{0,6}\right)\approx f(27,08)\approx 8,9$$

13. Đáp án: **A.** $\max y=5\Leftrightarrow x=2\Rightarrow z=2+5i$

14. Đáp án: **A.**

$Stp=2(ab+bc+ca)=96$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca=48$. Lại có $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\le ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow abc\le\sqrt{\frac{(ab+bc+ca)^3}{3}}=64\Rightarrow V_{max}=64$

15. Đáp án: **A.**

Sau 5 năm, thầy Nam có tổng số tiền là: $A = P(1+r)^n = 100(1+0,1)^5 \approx 161$ triệu.

5 năm tiếp theo thầy giáo của Nam có $A' = (A+100)(1+10\%)^5 \approx 420$ triệu.

16. Đáp án: **C.**

Số của M_{521} là $\left[\log\left(2^{521}-1\right)\right]+1 = 157$ số $\Rightarrow C$

17. Đáp án: **D.**

$h = 3\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)+12$. Có $9 \le h \le 15 \Rightarrow \min\limits_{t\in[16;21]} h = 9 \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi t}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right) = -1$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi t}{6}+\dfrac{\pi}{3} = -\pi + k2\pi \Leftrightarrow \dfrac{t}{6} = -\dfrac{4}{3}+2k \Rightarrow t = 16\,(k=2)$

18. Đáp án: **C.**

Cách 1: Có $a = v'(t) = 3t^2+2t \Rightarrow v = t^3+t^2+C$

$v_{(0)} = 7 \Rightarrow c = 7 \Rightarrow v(7) = 7+7^3+7^2 = 399m/s$

Cách 2: $v(t) = 7+\int_0^7 (3t^2+2t)dt = 399m/s$

19.

$f'(t) = 90t-3t^2, f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$. Ngày thứ 15 thì tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất.

20.

Đặt x=BM $0 \le x \le 7$ khi đó $AM = \sqrt{x^2+25}, MC = 7-x$

Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là:

$T(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}+\dfrac{7-x}{6}$ (giờ), $0 \le x \le 7$

Hàm số T đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 2\sqrt{5}$

Đáp án: **B.**

21.

Gọi n là số nhà bị bỏ rỗng, $n \in \mathbb{N}$

Số tiền công ty thu được hàng tháng là:

$$T = (2000000+\frac{n}{2}.100000)(50-n)$$
$$= -50000n^2+500000n+100000000$$

$\Rightarrow T_{max} \Leftrightarrow n = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{500000}{2.50000} = 5$

Khi đó giá thuê mỗi căn hộ là: $2000000 + \dfrac{5}{2}.100000 = 2250000$ (đồng)

Đáp án: **D.**

22. Gọi trữ lượng gỗ ban đầu là V_o , tốc độ sinh trưởng hằng năm của rùng là i phần trăm . Ta có :

– Sau 1 năm , trữ lượng gỗ là :

$$V_1 = V_0 + iV_0 = V_0(1+i);$$

– Sau 2 năm , trữ lượng gỗ là :

$$V_2 = V_1 + iV_1 = V_1(1+i) = V_0(1+i^2);$$

...

– Sau 5 năm , trữ lượng gỗ là :

$$V_5 = V_0(1+i)^5.$$

Thay ta được

$$V_5 = 4.10^5(1+0,04)^5 \approx 4,8666.10^5(m^3).$$

Đáp án: **A.**

23. Vận tốc chuyển động là $v = s'$, tức là $v = 12t - 3t^2$.

Ta có: $v' = 12 - 6t,$

$v' = 0 \Leftrightarrow t = 2.$

Hàm số đồng biến trong khoảng $(0;2)$ và nghịch biến trong khoảng $(2;+\infty)$

Vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t = 2$

Đáp án: **B.**

24. $V = 5x\sqrt{100 - x^2}\,(m^3), 0 < x < 10$

Hình lăng trụ có thể tích lớn nhất khi $x = 5\sqrt{2}(m)$.

$$\max_{x \in (0;10)} V = V(5\sqrt{2}) = 250(m^3)$$

25. $a = x'' = -12\pi^2\cos(2\pi t + \dfrac{\pi}{3})$. Thay t =5 vào a, tìm được $|a| = 6\pi^2\ (m/s^2)$

26. Quãng đường bơi là: $\sqrt{(200-x)^2 + 50^2}$

Thời gian đi cả quãng đường là: $f(x)=\frac{x}{4,5}+\frac{\sqrt{(200-x)^2+50^2}}{1,5}$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=200-\frac{25}{\sqrt{2}} \Rightarrow Minf(x) \Leftrightarrow x=200-\frac{25}{\sqrt{2}} \approx 182(m)$$

Đáp án: **D.**

27. $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}, 0<x<2\pi$

Ta tìm $x\in(0;2\pi)$ sao cho tại đó V đạt giá trị lớn nhất

$$V'=\frac{R^3}{24\pi^2}.\frac{x\left(8\pi^2-3x^2\right)}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}$$

Với $0<x<2\pi$, ta có

$$V'=0 \leftrightarrow 8\pi^2-3x^2=0 \leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi=1,63\pi$$

Hình nón có thể tích lớn nhất khi $x=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi=1,63\pi$

$$\max_{x\in(0;2\pi)} V=V\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right)=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3$$

28. Tổng diện tích 2 hình là: $a^2+\pi r^2=a^2+\frac{r^2}{\frac{1}{\pi}}\geq\frac{(a+r)^2}{\frac{1}{\pi}+1}=\frac{L^2}{\frac{1}{\pi}+1}$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{1}=\frac{r}{\frac{1}{\pi}} \Leftrightarrow \frac{a}{r}=\pi$. Đáp án: **A.**