NEW

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TRẮC NGHIỆM NÂNG CAO

NÓN-TRỤ-CẦU

(CHINH PHỤC ĐIỂM 8, 9, 10)

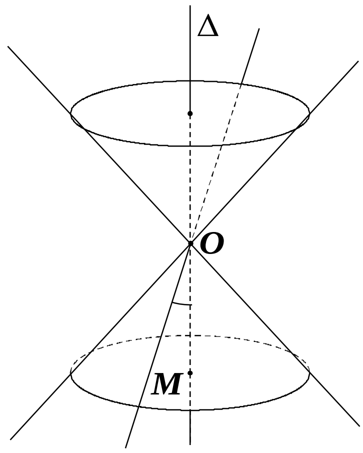
(CÓ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT)

ÔN THI THPT QUỐC GIA

MẶT NÓN – KHỐI NÓN

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa mặt nón



Cho đường thẳng Δ. Xét 1 đường thẳng l cắt Δ tại O và không vuông góc với Δ.

Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l như thế khi quay quanh Δ gọi là mặt nón tròn xoay hay đơn giản là mặt nón

- Δ gọi là trục của mặt nón
- l gọi là đường sinh của mặt nón
- O gọi là đỉnh mặt nón
- Nếu gọi α là góc giữa l và Δ thì 2α gọi là góc ở đỉnh của mặt nón $\left(0^0 < 2\alpha < 180^0\right)$

1. Hình nón và khối nón

Cho mặt nón N với trục Δ, đỉnh O và góc ở đỉnh 2α. Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng vuông góc với Δ tại I khác O.

Mặt phẳng $\left(P\right)$ cắt mặt nón theo đường tròn $\left(C\right)$ có tâm I. Gọi $\left(P'\right)$ là mặt phẳng vuông góc với Δ tại O. Khi đó:

- Phần của mặt nón N giới hạn bởi 2 mặt phẳng $\left(P\right)$ và $\left(P'\right)$ cùng với hình tròn xác định bởi $\left(C\right)$ gọi là hình nón.
- Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là khối nón.

2. Diện tích hình nón và thể tích khối nón

- Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi Rl$ với R là bán kính đáy, l là độ dài đường sinh.
- Thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2.h$ với R là bán kính đáy, h là chiều cao.

Lý thuyết ngắn gọn là thế, tuy nhiên sẽ có rất nhiều bài tập vận dụng cao đòi hỏi khả năng tư duy cao.

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

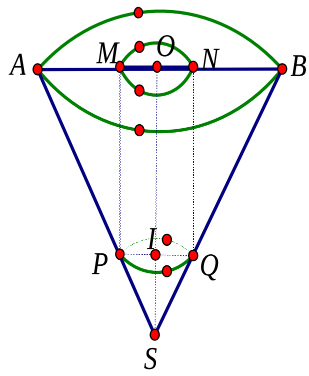
Câu 1: Hình nón tròn xoay nội tiếp trong tứ diện đều cạnh bằng a có diện tích xung quanh bằng:

A. $S_{xq} = \dfrac{\pi}{4}a^2$ **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi}{6}a^2\sqrt{2}$ **C.** $S_{xq} = \dfrac{\pi}{6}a^2\sqrt{3}$ **D.** $S_{xq} = \dfrac{2\pi}{3}a^2$

Câu 2: Hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều cạnh bằng a có diện tích xung quanh bằng:

A. $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2}{3}$ **B.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$ **C.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{6}$

Câu 3: Một bình đựng nước dạng hình nón (không đáy) đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $\frac{16\pi}{9}dm^3$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt trên của hình nón, các điểm trên đường tròn đáy còn lại đều thuộc các đường sinh của hình nón (như hình vẽ) và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của bình nước là:



A. $S_{xq}=\frac{9\pi\sqrt{10}}{2}dm^2$. **B.** $S_{xq}=4\pi\sqrt{10}\ dm^2$. **C.** $S_{xq}=4\pi\ dm^2$. **D.** $S_{xq}=\frac{3\pi}{2}\ dm^2$.

Câu 4: Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h=20\,cm$, bán kính đáy $r=25\,cm$. Một mặt phẳng (P) đi qua 2 đỉnh của khối nón và có khoảng cách đến tâm O của đáy là 12 cm. Khi đó diện tích thiết diện của (P) với khối nón bằng:

A. 500 cm^2 **B.** 475 cm^2 **C.** 450 cm^2 **D.** 550 cm^2

Câu 5: Cho tam giác ABC có độ dài cạnh huyền 5. Người ta quay tam giác ABC quanh một cạnh góc vuông để sinh ra hình nón. Hỏi thể tích V khối nón sinh ra lớn nhất là bao nhiêu.

A. $V=\frac{250\sqrt{3}\pi}{27}$ **B.** $V=\frac{25\sqrt{2}\pi}{27}$ **C.** $V=\frac{20\sqrt{3}\pi}{27}$ **D.** $V=\frac{250\sqrt{6}\pi}{27}$

Câu 6: Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB=1$, đáy lớn $CD=3$, cạnh bên $AD=\sqrt{2}$ quay quanh đường thẳng AB. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=3\pi$. **B.** $V=\frac{4}{3}\pi$. **C.** $V=\frac{7}{3}\pi$. **D.** $V=\frac{5}{3}\pi$.

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{BAD}=\alpha\left(0^0<\alpha<90^0\right), AD=a$ và $\widehat{ADB}=90^0$. Quay $ABCD$ quanh AB, ta được vật tròn xoay có thể tích là:

A. $V=\pi a^3\sin^2\alpha$ **B.** $V=\pi a^3\sin^2\alpha.\cos\alpha$

C. $V=\pi a^3\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$ **D.** $V=\pi a^3\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$

Câu 8: Cho khối nón đỉnh O, trục OI. Mặt phẳng trung trực của OI chia khối chóp thành hai phần. Tỉ số thể tích của hai phần là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

Câu 9: Cho hình nón $\mathscr{N}$ có bán kính đáy R, đường cao SO. Gọi (P) mà mặt phẳng vuông góc với SO tại O_1 sao cho $SO_1=\frac{1}{3}SO$. Một mặt phẳng qua trục hình nón cắt phần khối nón $\mathscr{N}$ nằm giữa (P) và đáy hình nón theo thiết diện là hình tứ giác có hai đường chéo vuông góc. Tính thể tích phần hình nón $\mathscr{N}$ nằm giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng chứa đáy hình nón $\mathscr{N}$.

A. $\frac{7\pi R^3}{9}$ **B.** $\frac{\pi R^3}{9}$ **C.** $\frac{26\pi R^3}{81}$ **D.** $\frac{52\pi R^3}{81}$

Câu 10: Hình nón tròn xoay có trục $SO = R\sqrt{3}$ với R là bán kính đáy, thiết diện qua trục của hình nón tạo thành tam giác SAB là tam giác đều. Gọi I là trung điểm của SO và E, F $\in SO$ sao cho $\frac{EI}{EO} = \frac{FI}{FO} = \frac{1}{2}$. Khi đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón là điểm:

A. I **B.** E **C.** F **D.** O

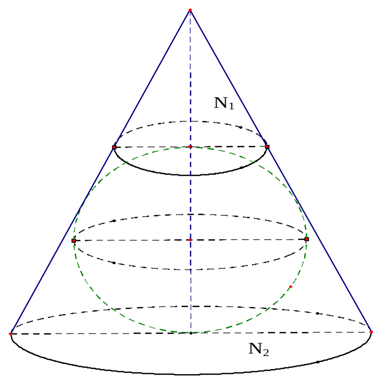
Câu 11: Cho hình nón tròn xoay đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O, bán kính $R = 5$. Một thiết diện qua đỉnh S tạo thành tam giác SAB sao cho tam giác SAB đều, cạnh bằng 8. Khoảng cách từ O đến thiết diện (SAB) là:

A. $d = \frac{4}{3}\sqrt{13}$ **B.** $d = \frac{3}{4}\sqrt{13}$ **C.** $d = 3$ **D.** $d = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Câu 12: Cho một hình nón có bán kính đáy là R, chiều cao là $2R$, ngoại tiếp một hình cầu $S(O;r)$. Khi đó, thể tích của khối trụ ngoại tiếp hình cầu $S(O;r)$ là

A. $\frac{16\pi R^3}{\left(\sqrt{5}-1\right)^3}$. **B.** $\frac{4\pi R^3}{1+2\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{16\pi R^3}{\left(1+\sqrt{5}\right)^3}$. **D.** $\frac{4\pi R^3}{2\sqrt{5}-1}$.

Câu 13: Một hình nón bị cắt bởi mặt phẳng (P) song song với đáy. Mặt phẳng (P) chia hình nón làm hai phần (N_1) và (N_2). Cho hình cầu nội tiếp (N_2) như hình vẽ sao cho thể tích hình cầu bằng một nửa thể tích của (N_2). Một mặt phẳng đi qua trục hình nón và vuông góc với đáy cắt (N_2) theo thiết diện là hình thang cân, tang góc nhọn của hình thang cân là



A. 2 **B.** 4 **C.** 1 **D.** $\sqrt{3}$

Câu 14: Trong các hình nón nội tiếp một hình cầu có bán kính bằng 3, tính bán kính mặt đáy của hình nón có thể tích lớn nhất.

A. $R = 6\sqrt{2}$.. **B.** $R = 4\sqrt{2}$. **C.** $R = \sqrt{2}$. **D.** $R = 2\sqrt{2}$.

Câu 15: Trong tất cả các hình nón có độ dài đường sinh bằng a, tìm hình nón có thể tích lớn nhất

A. $\text{Max}V = \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. **B.** $\text{Max}V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\text{Max}V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\text{Max}V = \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 16: Trong các hình nón tròn xoay cùng có diện tích toàn phần bằng π. Tính thể tích hình nón lớn nhất?

A. $\frac{\pi\sqrt{2}}{9}$. **B.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

Câu 17: Giá trị lớn nhất của thể tích khối nón nội tiếp trong khối cầu có bán kính R là

A. $\frac{1}{3}\pi R^3$. **B.** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **C.** $\frac{4\sqrt{2}}{9}\pi R^3$. **D.** $\frac{32}{81}\pi R^3$.

Câu 18: Tìm hình nón có thể tích nhỏ nhất ngoại tiếp mặt cầu bán kính r cho trước có thể tích bằng:

A. $\frac{1}{6}\pi r^3$ **B.** $\frac{8}{3}\pi r^3$ **C.** $\frac{2}{3}\pi r^3$ **D.** $\frac{4}{3}\pi r^3$

Câu 19: Cho một hình nón (N) có đáy là hình tròn tâm O. Đường kính $2a$ và đường cao $SO = a$. Cho điểm H thay đổi trên đoạn thẳng SO. Mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại H và cắt hình nón theo đường tròn (C). Khối nón có đỉnh là O và đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2\pi a^3}{81}$. **B.** $\frac{4\pi a^3}{81}$. **C.** $\frac{7\pi a^3}{81}$. **D.** $\frac{8\pi a^3}{81}$.

Câu 20: Cho hình nón có chiều cao h. Tính chiều cao x của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình nón theo h.

A. $x = \frac{h}{2}$. **B.** $x = \frac{h}{3}$. **C.** $x = \frac{2h}{3}$. **D.** $x = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

Câu 21: Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, góc ở đỉnh bằng $120°$. Trên đường tròn đáy, lấy điểm A cố định và điểm M di động. Có bao nhiêu vị trí điểm của điểm M để diện tích tam giác SAM đạt giá trị lớn nhất?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** vô số.

Câu 22: Hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp một mặt cầu bán kính R cho trước bằng:

A. $\frac{64\pi R^3}{81}$ **B.** $\frac{32\pi^2 R^3}{81}$ **C.** $\frac{32\pi R^3}{81}$ **D.** $\frac{64\pi^2 R^3}{81}$

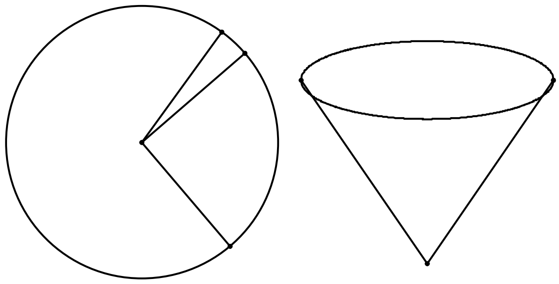
Câu 23: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đó, đặt $\alpha = \widehat{CAB}$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Tìm α sao cho thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\alpha = 60°$. **B.** $\alpha = 45°$. **C.** $\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\alpha = 30°$.

Câu 24: Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của một hình nón. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích hình nón và thể tích hình cầu nội tiếp hình nón. Khi r và h thay đổi, tìm giá trị bé nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. $\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 2

Câu 25: Với một miếng tôn hình tròn có bán kính bằng $R=6cm$. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của hình tròn này
và gấp phần còn lại thành hình nón (Như hình vẽ).



Hình nón có thể tích lớn nhất khi người ta cắt cung tròn của hình quạt bằng:

A. $4\pi\sqrt{6}cm$ **B.** $6\pi\sqrt{6}cm$ **C.** $2\pi\sqrt{6}cm$ **D.** $8\pi\sqrt{6}cm$

Câu 26: Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của một hình nón. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và thể tích của khối cầu nội tiếp hình nón. Giá trị bé nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 27: Cho hình nón có chiều cao *h*, đường tròn đáy bán kính R. Một mặt phẳng (P) song song với đáy cách đáy một khoảng bằng d cắt hình nón theo đường tròn (L). Dựng hình trụ có một đáy là (L), đáy còn lại thuộc đáy của hình nón và trục trùng với trục hình nón. Tìm d để thể tích hình trụ là lớn nhất.

A. $d=\frac{h}{3}$ **B.** $d=\frac{h}{2}$ **C.** $d=\frac{h}{6}$ **D.** $d=\frac{h}{4}$

Câu 28: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính $50cm$. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

A. $10\sqrt{2}cm$ **B.** $20cm$ **C.** $50\sqrt{2}cm$ **D.** $25cm$

C – HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Hình nón tròn xoay nội tiếp trong tứ diện đều cạnh bằng a có diện tích xung quanh bằng:

A. $S_{xq}=\dfrac{\pi}{4}a^2$ **B.** $S_{xq}=\dfrac{\pi}{6}a^2\sqrt{2}$ **C.** $S_{xq}=\dfrac{\pi}{6}a^2\sqrt{3}$ **D.** $S_{xq}=\dfrac{2\pi}{3}a^2$

Hướng dẫn giải:

Gọi $S.ABC$ là tứ diện đều cạnh a.

Gọi H là trung điểm cạnh BC.

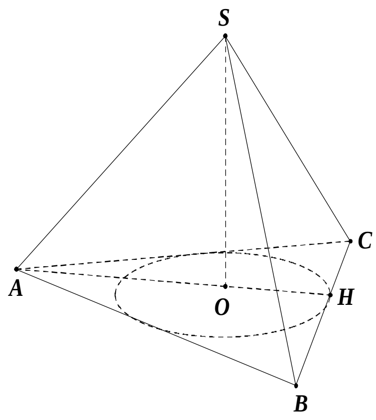
Kẻ $SO\perp(ABC)$ thì $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

là đường sinh của hình nón.

Ba điểm A,O,H thẳng hàng.

$HO=\dfrac{1}{3}AH=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$S_{xq}=\pi.OH.SH=\pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi a^2}{4}$.



Chọn A.

Câu 2: Hình nón tròn xoay ngoại tiếp tứ diện đều cạnh bằng a có diện tích xung quanh bằng:

A. $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2}{3}$ **B.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}$ **C.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{6}$

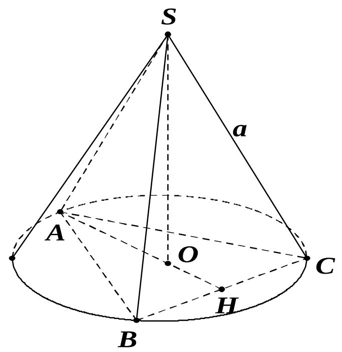
Hướng dẫn giải:

Kẻ $SO\perp(ABC), SH\perp BC\Rightarrow OH\perp BC$

Ta có: $OA=\dfrac{2}{3}AH=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

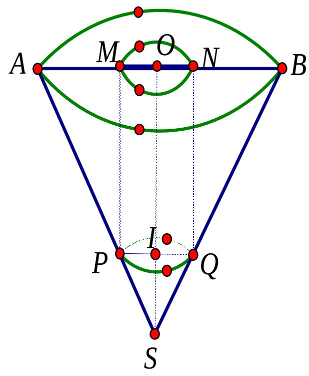
$S_{xq}=\pi.OA.SA=\pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.a$

$S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$



Chọn C.

Câu 3: Một bình đựng nước dạng hình nón (không đáy) đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $\dfrac{16\pi}{9}dm^3$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt trên của hình nón, các điểm trên đường tròn đáy còn lại đều thuộc các đường sinh của hình nón (như hình vẽ) và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của bình nước là:



A. $S_{xq}=\dfrac{9\pi\sqrt{10}}{2}dm^2$. **B.** $S_{xq}=4\pi\sqrt{10}\ dm^2$. **C.** $S_{xq}=4\pi\ dm^2$. **D.** $S_{xq}=\dfrac{3\pi}{2}\ dm^2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Xét hình nón: $h = SO = 3r$, $r = OB,\ l = SA$. Xét hình trụ: $h_1 = 2r = NQ$, $r_1 = ON = QI$

$\Delta SQI \sim \Delta SBO \Rightarrow \dfrac{QI}{BO} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow r_1 = \dfrac{r}{3} \Rightarrow$ Thể tích khối trụ là:

$V_t = \pi r_1^2 h_1 = \dfrac{2\pi r^3}{9} = \dfrac{16\pi}{9} \Rightarrow r = 2 \Rightarrow h = 6 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = 2\sqrt{10}$

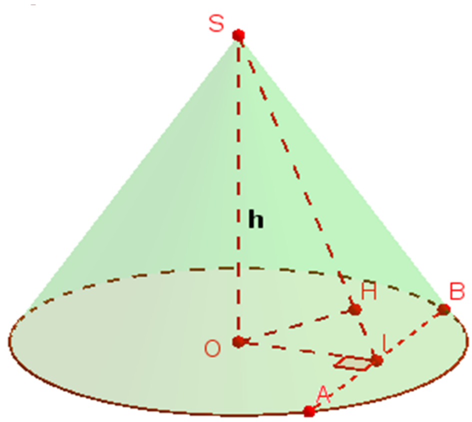
$\Rightarrow S_{xq} = \pi r l = 4\pi\sqrt{10}\ dm^2$

Câu 4: Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h = 20cm$, bán kính đáy $r = 25cm$. Một mặt phẳng (P) đi qua 2 đỉnh của khối nón và có khoảng cách đến tâm O của đáy là 12 cm. Khi đó diện tích thiết diện của (P) với khối nón bằng:

A. 500 cm^2 **B.** 475 cm^2 **C.** 450 cm^2 **D.** 550 cm^2

Hướng dẫn giải:

Gọi S là đỉnh của khối nón. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S cắt khối nón theo hai đường sinh bằng nhau là $SA = SB$ nên ta có thiết diện là tam giác cân SAB.



Gọi I là trung điểm của đoạn AB, ta có $OI \perp AB$.
Từ tâm O của đáy ta kẻ $OH \perp SI$ tại H, ta có $OH \perp (SAB)$ và do đó theo giả thiết ta có $OH = 12\,cm$. Xét tam giác vuông SOI ta có:

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2}$$

$$\Rightarrow OI = 15(cm)$$

Mặt khác, xét tam giác vuông SOI ta còn có:
$OS.OI = SI.OH$

Do đó $SI = \dfrac{OS.OI}{OH} = \dfrac{20.15}{12} = 25(cm)$

Gọi S_t là diện tích của thiết diện SAB. Ta có: $S_t = \dfrac{1}{2}AB.SI$, trong đó $AB = 2AI$

Vì $AI^2 = OA^2 - OI^2 = 25^2 - 15^2 = 20^2$ nên $AI = 20\,cm$ và $AB = 40\,cm$

Vậy thiết diện SAB có diện tích là: $S_t = \dfrac{1}{2}.40.25 = 500\left(cm^2\right)$.

Chọn A.

Câu 5: Cho tam giác ABC có độ dài cạnh huyền 5. Người ta quay tam giác ABC quanh một cạnh góc vuông để sinh ra hình nón. Hỏi thể tích V khối nón sinh ra lớn nhất là bao nhiêu.

A. $V=\dfrac{250\sqrt{3}\pi}{27}$ **B.** $V=\dfrac{25\sqrt{2}\pi}{27}$ **C.** $V=\dfrac{20\sqrt{3}\pi}{27}$ **D.** $V=\dfrac{250\sqrt{6}\pi}{27}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi x^2y=\dfrac{1}{3}\pi\left(25-y^2\right)y=\dfrac{25}{3}\pi y-\dfrac{1}{3}\pi y^3$.

Xét hàm số $V=\dfrac{25}{3}\pi y-\dfrac{1}{3}\pi y^3$ với $0<y<5$.

Ta có $V'=\dfrac{25}{3}\pi-\pi y^2=0\Rightarrow y=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

Khi đó thể tích lớn nhất là $V=\dfrac{250\sqrt{3}\pi}{27}$.

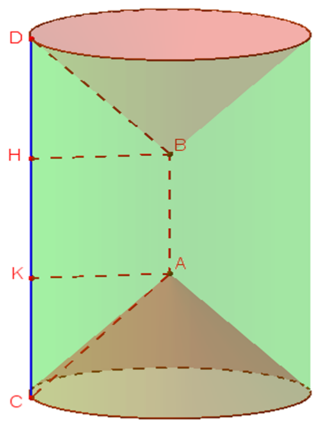
Chọn A.

Câu 6: Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AB=1$, đáy lớn $CD=3$, cạnh bên $AD=\sqrt{2}$ quay quanh đường thẳng AB. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=3\pi$. **B.** $V=\dfrac{4}{3}\pi$. **C.** $V=\dfrac{7}{3}\pi$. **D.** $V=\dfrac{5}{3}\pi$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Theo hình vẽ: $AH=HD=1$.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng thể tích khối trụ có bán kính $r=AH=1$, chiều cao $CD=3$ trừ đi thể tích hai khối nón bằng nhau (khối nón đỉnh A, đỉnh B và đáy là đáy của hình trụ).

Vậy $V=\pi.AH^2.CD-2.\dfrac{1}{3}\pi.AH^2.HD=\pi\left(3-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{7}{3}\pi$.

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{BAD}=\alpha\left(0^0<\alpha<90^0\right), AD=a$ và $\widehat{ADB}=90^0$. Quay $ABCD$ quanh AB, ta được vật tròn xoay có thể tích là:

A. $V=\pi a^3\sin^2\alpha$ **B.** $V=\pi a^3\sin^2\alpha.\cos\alpha$

C. $V=\pi a^3\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$ **D.** $V=\pi a^3\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$

Hướng dẫn giải:

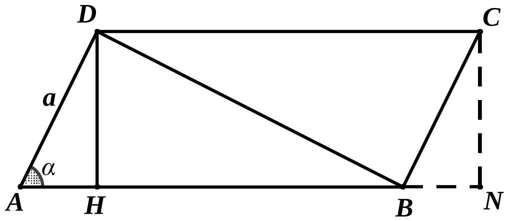
Kẻ $DH\perp AB, CN\perp AB$.

Các tam giác vuông HAD và NBC bằng nhau.

$DH = CN = a.\sin\alpha$

$AH = BN = a.\cos\alpha$

$\Rightarrow HN = AB = \dfrac{a}{\cos\alpha}$



Khi quay quanh AB, các tam giác vuông AHD và NBC tạo thành hai hình nón tròn xoay bằng nhau nên:

$$V = \frac{1}{3}\pi.DH^2.AH + \left(\pi.DH^2.HN - \frac{1}{3}\pi.CN^2.BN\right) = \pi.DH^2.AB = \pi.a^2.\sin^2\alpha.\frac{a}{\sin\alpha} = \pi a^3\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$

Chọn C.

Câu 8: Cho khối nón đỉnh O, trục OI. Mặt phẳng trung trực của OI chia khối chóp thành hai phần. Tỉ số thể tích của hai phần là:

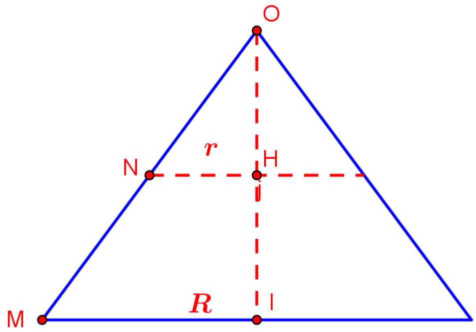
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi R là bán kính đáy của khối nón trục OI.

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2.OI$



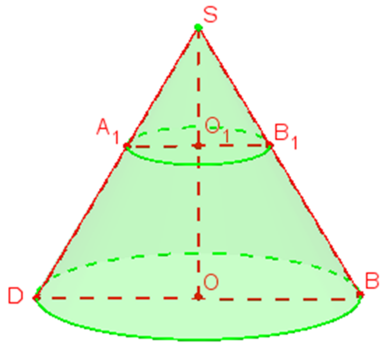
Giả sử mặt phẳng trung trực của OI cắt trục OI tại H, cắt đường sinh OM tại N. Khi đó mặt phẳng này chia khối nón thành 2 phần, phần trên là khối nón mới có bán kính $r = \frac{R}{2}$, có chiều cao là $\frac{OI}{2}$ $\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\left(\frac{OI}{2}\right) = \frac{\pi.R^2.OI}{24}$. Phần dưới là khối nón cụt có thể tích $V_2 = V - V_1 = \frac{\pi R^2.OI}{3} - \frac{\pi R^2.OI}{24} = \frac{7\pi R^2.OI}{24}$.

Vậy tỉ số thể tích là: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\dfrac{\pi R^2.OI}{24}}{\dfrac{7\pi R^2.OI}{24}} = \dfrac{1}{7}$

Câu 9: Cho hình nón $\mathscr{N}$ có bán kính đáy R, đường cao SO. Gọi (P) mà mặt phẳng vuông góc với SO tại O_1 sao cho $SO_1 = \frac{1}{3}SO$. Một mặt phẳng qua trục hình nón cắt phần khối nón $\mathscr{N}$ nằm giữa (P) và đáy hình nón theo thiết diện là hình tứ giác có hai đường chéo vuông góc. Tính thể tích phần hình nón $\mathscr{N}$ nằm giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng chứa đáy hình nón $\mathscr{N}$.

A. $\frac{7\pi R^3}{9}$ **B.** $\frac{\pi R^3}{9}$ **C.** $\frac{26\pi R^3}{81}$ **D.** $\frac{52\pi R^3}{81}$

Hướng dẫn giải:



Gọi thiết diện thu được là AA_1B_1B

Vì $SO_1 = \frac{1}{3}SO$ nên $A_1B_1 = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}.2R$

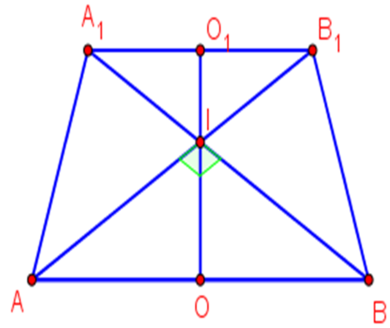
Mặt khác $AB_1 \perp A_1B$ tại I nên

$IO = \frac{1}{2}AB, IO_1 = \frac{1}{2}A_1B_1$

Vậy $OO_1 = R + \frac{R}{3} = \frac{4R}{3}$

Dễ thấy $SO_1 = \frac{1}{2}OO_1 = \frac{2R}{3}$

Từ đó $SO = 2R$



Gọi thể tích phần hình nón phải tính là V* thì $V^* = V_1 - V_2$, trong đó:

V_1 là thể tích của hình nón $\mathscr{N}$.

V_2 là thể tích hình nón đỉnh S và đáy là thiết diện của $\mathscr{N}$ được cắt bởi (P).

Ta có thể tích phần hình nón phải tính là

$$V^* = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi OB^2.SO - \frac{1}{3}\pi O_1B_1^2.SO_1 = \frac{1}{3}\pi\left(R^2.2R - \frac{R^2}{9}.\frac{2R}{3}\right) = \frac{52\pi R^3}{81}$$

Câu 10: Hình nón tròn xoay có trục $SO = R\sqrt{3}$ với R là bán kính đáy, thiết diện qua trục của hình nón tạo thành tam giác SAB là tam giác đều. Gọi I là trung điểm của SO và E, F $\in SO$ sao cho $\frac{EI}{EO} = \frac{FI}{FO} = \frac{1}{2}$. Khi đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón là điểm:

A. I **B.** E **C.** F **D.** O

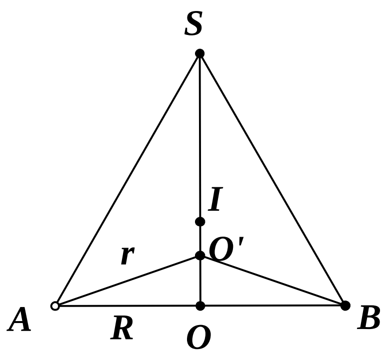
Hướng dẫn giải:

Gọi O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón thì:
$r = O'S = O'A = O'B$

Ta có: $OO' = OS - r = R\sqrt{3} - \frac{R}{\cos 30^0}$

$OO' = R\sqrt{3} - \frac{2R\sqrt{3}}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow \frac{OO'}{OI} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{3}}{\frac{R\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{OO'}{OI} = \frac{2}{3}$$



Vậy $O' \equiv E$.

Chọn B.

Câu 11: Cho hình nón tròn xoay đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O, bán kính $R=5$. Một thiết diện qua đỉnh S tạo thành tam giác SAB sao cho tam giác SAB đều, cạnh bằng 8. Khoảng cách từ O đến thiết diện (SAB) là:

A. $d=\frac{4}{3}\sqrt{13}$ **B.** $d=\frac{3}{4}\sqrt{13}$ **C.** $d=3$ **D.** $d=\frac{\sqrt{13}}{3}$

Hướng dẫn giải:

$SO \perp (OAB)$, kẻ $SH \perp AB \Rightarrow OH \perp AB$

$AB \perp (SOH) \Rightarrow (SAB) \perp (SOH)$

Kẻ $\mathrm{OI} \perp \mathrm{SH}$ thì $OI \perp (SAB)$ nên $d=OI$

$\Delta SOA: \mathrm{OS}^2 = 64-25=39$; $\Delta OHA: OH^2=25-16=9$

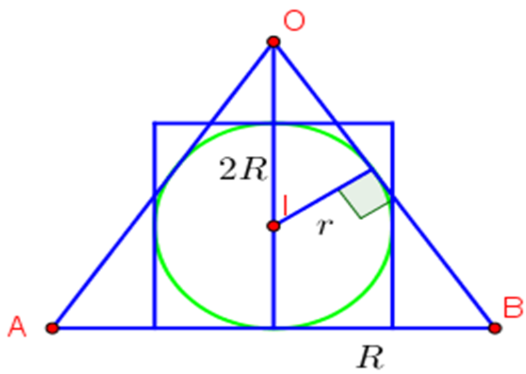
$\Rightarrow \frac{1}{OI^2}=\frac{1}{OH^2}+\frac{1}{OS^2}=\frac{1}{9}+\frac{1}{39}=\frac{16}{117} \Leftrightarrow OI=\frac{3}{4}\sqrt{3}.$

Chọn B.

Câu 12: Cho một hình nón có bán kính đáy là R, chiều cao là $2R$, ngoại tiếp một hình cầu $S(O;r)$. Khi đó, thể tích của khối trụ ngoại tiếp hình cầu $S(O;r)$ là

A. $\frac{16\pi R^3}{\left(\sqrt{5}-1\right)^3}$. **B.** $\frac{4\pi R^3}{1+2\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{16\pi R^3}{\left(1+\sqrt{5}\right)^3}$. **D.** $\frac{4\pi R^3}{2\sqrt{5}-1}$.

Hướng dẫn giải:



Giả sử hình nón có đỉnh O và đường kính đáy là AB.

Ta có $OA=OB=\sqrt{R^2+(2R)^2}=R\sqrt{5}$.

Tam giác OAB có diện tích là $S=2R^2$,

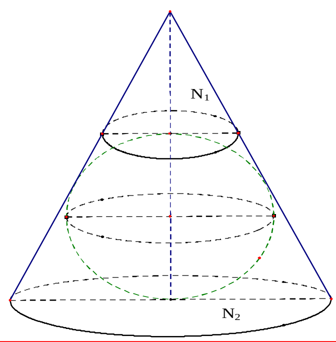
chu vi là $2p=2R(1+\sqrt{5})$.

Do đó bán kính khối cầu $S(O;r)$ là

$r=\frac{S}{p}=\frac{2R}{1+\sqrt{5}}$.

Thể tích khối trụ cần tìm là: $V_{tru}=\pi r^2 h=2\pi r^3=\frac{16\pi R^3}{\left(1+\sqrt{5}\right)^3}$.

Câu 13: Một hình nón bị cắt bởi mặt phẳng (P) song song với đáy. Mặt phẳng (P) chia hình nón làm hai phần (N_1) và (N_2). Cho hình cầu nội tiếp (N_2) như hình vẽ sao cho thể tích hình cầu bằng một nửa thể tích của (N_2). Một mặt phẳng đi



qua trục hình nón và vuông góc với đáy cắt (N_2) theo thiết diện là hình thang cân, tang góc nhọn của hình thang cân là

A. 2 **B.** 4 **C.** 1 **D.** $\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

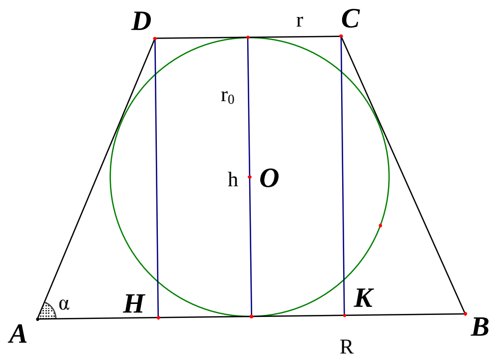
Giả sử ta có mặt cắt của hình nón cụt và các đại lượng như hình vẽ.

Gọi α là góc cần tìm.

Xét ΔAHD vuông tại H có $DH = h, AH = R - r \Rightarrow h = 2r_0 = AH.\tan\alpha = (R-r)\tan\alpha \quad (1)$

Thể tích khối cầu là $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi r_0^3 = \dfrac{\pi h^3}{6}$

Thể tích của (N_2) là $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$



$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow h^2 = R^2 + r^2 + Rr \quad (2)$

Ta có $BC = R + r$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $h^2 = BC^2 - (R-r)^2 = 4Rr \quad (3)$

Từ $(2),(3) \Rightarrow (R-r)^2 = Rr \quad (4)$

Từ $(1),(3),(4) \Rightarrow h^2 = (R-r)^2.\tan^2\alpha = 4(R-r)^2$ (vì α là góc nhọn)

$\Rightarrow \tan^2\alpha = 4 \Rightarrow \tan\alpha = 2$

Chọn A.

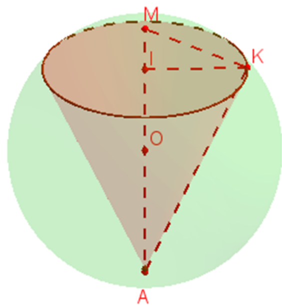
Câu 14: Trong các hình nón nội tiếp một hình cầu có bán kính bằng 3, tính bán kính mặt đáy của hình nón có thể tích lớn nhất.

A. $R = 6\sqrt{2}..$ **B.** $R = 4\sqrt{2}.$ **C.** $R = \sqrt{2}.$ **D.** $R = 2\sqrt{2}.$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Giả sử chóp đỉnh A như hình vẽ là hình chóp có thể tích lớn nhất.



ΔAKM vuông tại K. Ta thấy $IK = r$ là bán kính đáy của chóp, $AI = h$ là chiều cao của chóp.

$IK^2 = AI.IM \Rightarrow r^2 = h(6-h).$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h^2(6-h)\ (0<h<6).$

$V_{\max} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi h^2(6-h)$ max $\Leftrightarrow y = -h^3+6h^2$ max trên$(0;6)$

Câu 15: Trong tất cả các hình nón có độ dài đường sinh bằng a, tìm hình nón có thể tích lớn nhất

A. $\text{Max}V = \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. **B.** $\text{Max}V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\text{Max}V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\text{Max}V = \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi h là chiều cao của nón thì bán kính nón là $r = \sqrt{a^2-h^2}$. Suy ra:

$V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}\pi.(a^2-h^2).h = \frac{1}{3}\pi.(a^2h-h^3)$, với $0<h<a$

Xét hàm số $f(h) = a^2h-h^3$ trong $(0;a)$ ta thấy $\text{Max}\, f(h) = f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2a^3}{3\sqrt{3}}$ hay

$\text{Max}V = \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{27}$.

Câu 16: Trong các hình nón tròn xoay cùng có diện tích toàn phần bằng π. Tính thể tích hình nón lớn nhất?

A. $\frac{\pi\sqrt{2}}{9}$. **B.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có $S_{tp} = \pi \Leftrightarrow \pi rl + \pi r^2 = \pi \Leftrightarrow rl + r^2 = 1$ suy ra $l = \frac{1-r^2}{r}$ và $l + r = \frac{1}{r}$.

Có $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2} = \frac{1}{3}\pi r\sqrt{1-2r^2}$.

Xét hàm số $y = f(x) = x\sqrt{1-2x^2}$ trên đoạn $\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ ta có $\max\limits_{\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ tại $x = \frac{1}{2}$.

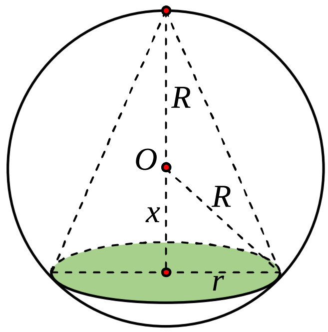
Vậy $V_{\max} = \frac{1}{3}\pi.\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}$.

Câu 17: Giá trị lớn nhất của thể tích khối nón nội tiếp trong khối cầu có bán kính R là

A. $\frac{1}{3}\pi R^3$.   **B.** $\frac{4}{3}\pi R^3$.   **C.** $\frac{4\sqrt{2}}{9}\pi R^3$.   **D.** $\frac{32}{81}\pi R^3$.

Hướng dẫn giải:

Rõ ràng trong hai khối nón cùng bán kính đáy nội tiếp trong một khối cầu thì khối nón có chiều cao lớn hơn thì thể tích lớn hơn, nên ta chỉ xét khối nón có chiều cao lớn hơn trong hai khối nón đó.



Giả sử rằng khối nón có đáy là hình tròn (C) bán kính r. Gọi x với $f'(x)$ là khoảng cách giữa tâm khối cầu đến đáy khối nón. Khi đó chiều cao lớn nhất của khối nón nội tiếp khối cầu với đáy là hình tròn (C) sẽ là $h = R + x$. Khi đó bán kính đáy nón là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$, suy ra thể tích khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(R+x)(R^2-x^2) = \frac{1}{3}\pi(R+x)(R+x)(R-x) = \frac{1}{6}\pi(R+x)(R+x)(2R-2x)$$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có $V \le \frac{1}{6}\pi\frac{(R+x+R+x+2R-2x)^3}{27} = \frac{32\pi R^3}{81}$

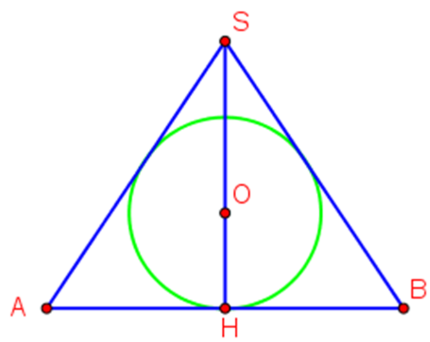
Chọn D.

Câu 18: Tìm hình nón có thể tích nhỏ nhất ngoại tiếp mặt cầu bán kính r cho trước có thể tích bằng:

A. $\frac{1}{6}\pi r^3$ **B.** $\frac{8}{3}\pi r^3$ **C.** $\frac{2}{3}\pi r^3$ **D.** $\frac{4}{3}\pi r^3$

Hướng dẫn giải:

Xét mặt phẳng chứa trục của hình nón, mặt phẳng này cắt hình nón theo tam giác cân SAB và cắt mặt cầu nội tiếp hình nón theo đường tròn bán kính r và hình tròn này nội tiếp tam giác cân SAB $(h.79b)$



Kí hiệu bán kính đáy hình nón là x, chiều cao hình nón là $y\ (x > 0, y > 2r)$ thì $(AH + SA)r = \frac{1}{2}AB.SH$

$$\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)r = xy \Leftrightarrow x^2 = \frac{r^2 y}{y-2r}$$

Vậy thể tích hình nón ngoại tiếp mặt cầu bán kính r là

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi r^2 : \frac{y^2}{y-2r}$$

Ta có $\frac{y^2}{y-2r}=\frac{y^2-4r^2+4r^2}{y-2r}=y+2r+\frac{4r^2}{y-2r}$

$=y-2r+\frac{4r^2}{y-2r}+4r\ge 2\sqrt{(y-2r).\frac{4r^2}{y-2r}}+4r=8r$

Từ đó $V_2\ge\frac{1}{3}\pi.8r^3$, tức là V_2 đạt giá trị bé nhất khi và chỉ khi $y-2r=\frac{4r^2}{y-2r}\Leftrightarrow y=4r$ từ đó $x=r\sqrt{2}$.

Câu 19: Cho một hình nón (N) có đáy là hình tròn tâm O. Đường kính $2a$ và đường cao $SO=a$. Cho điểm H thay đổi trên đoạn thẳng SO. Mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại H và cắt hình nón theo đường tròn (C). Khối nón có đỉnh là O và đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2\pi a^3}{81}$. **B.** $\frac{4\pi a^3}{81}$. **C.** $\frac{7\pi a^3}{81}$. **D.** $\frac{8\pi a^3}{81}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi (α) là mặt phẳng qua trục của hình nón (N) cắt hình nón (N) theo thiết là tam giác SAB, cắt hình nón đỉnh S và có đáy là đường tròn (C) theo thiết diện là tam giác SCD, gọi I là giao điểm của SO và CD. Ta có: $AB=2a\Rightarrow OA=a=SO$.Do đó tam giác SOA vuông cân tại S.Suy ra tam giác SIC vuông cân tại I.Đặt $SI=AC=x(0<x<a)\Rightarrow OI=a-x$

Thể tích khối nón có đỉnh là O và đáy là hình tròn (C) là:

$V=\frac{1}{3}.\pi.IC^2.OI=\frac{1}{3}.\pi.x^2(a-x)=\frac{1}{3}\pi\left(-x^3+ax^2\right).V'(x)=\frac{1}{3}.\pi.\left(-3x^2+2ax\right)$

$V'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{2a}{3}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{2a}{3}$		a
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$\frac{4a^3\pi}{81}$	$\searrow$	

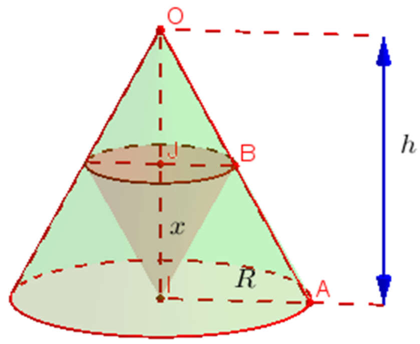
Chọn B.

Câu 20: Cho hình nón có chiều cao h. Tính chiều cao x của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình nón theo h.

A. $x=\dfrac{h}{2}$. **B.** $x=\dfrac{h}{3}$. **C.** $x=\dfrac{2h}{3}$. **D.** $x=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi r,R theo thứ tự là bán kính đáy hình nón và khối trụ cần tìm. O là đỉnh của hình nón, I là tâm của đáy hình nón, J là tâm của đáy hình trụ và khác I. OA là một đường sinh của hình nón, B là điểm chung của OA với khối trụ. Ta có: $\dfrac{r}{R}=\dfrac{h-x}{h}\Rightarrow r=\dfrac{R}{h}(h-x)$.



Thể tích khối trụ là: $V=\pi xR^2=\pi x\dfrac{R^2}{h^2}(h-x)^2$

Xét hàm số $V(x)=\pi x\dfrac{R^2}{h^2}(h-x)^2,\ 0<x<h$.

Ta có $V'(x)=\pi\dfrac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{h}{3}$ hay $x=h$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{h}{3}$		h
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4\pi R^2h}{81}$	$\searrow$	0

Dựa vào BBT, ta thấy thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao của khối trụ là $x=\dfrac{h}{3}$;.

Câu 21: Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, góc ở đỉnh bằng $120°$. Trên đường tròn đáy, lấy điểm A cố định và điểm M di động. Có bao nhiêu vị trí điểm của điểm M để diện tích tam giác SAM đạt giá trị lớn nhất?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** vô số.

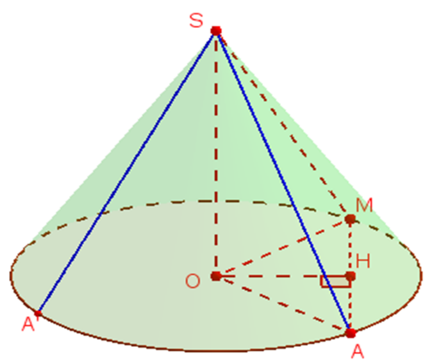
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi r là bán kính đáy của hình nón.

Vì góc ở đỉnh $\widehat{ASA'}=120°\Rightarrow\widehat{ASO}=60°$.

Suy ra $SO=OA.\cot\widehat{ASO}=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$.



Gọi H là trung điểm của AM và đặt $x = OH$.

Ta có: $SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\frac{r^2}{3} + x^2}$, $AM = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{r^2 - x^2}$.

Diện tích tam giác ΔSAM bằng $s = \frac{1}{2}SH.AM = \sqrt{\frac{r^2}{3} + x^2}.\sqrt{r^2 - x^2} \le \frac{2}{3}r^2$.

$s_{\max} = \frac{2}{3}r^2$ đạt được khi $\frac{r^2}{3} + x^2 = r^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{r^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Tức là $OH = SO$.

Theo tính chất đối xứng của của đường tròn ta có hai vị trí của M thỏa yêu cầu.

Câu 22: Hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp một mặt cầu bán kính R cho trước bằng:

A. $\frac{64\pi R^3}{81}$ **B.** $\frac{32\pi^2 R^3}{81}$ **C.** $\frac{32\pi R^3}{81}$ **D.** $\frac{64\pi^2 R^3}{81}$

Hướng dẫn giải:

Kí hiệu bán kính đáy hình nón là x, chiều cao hình nón là y $(0 < x \le R, 0 < y < 2R)$. Gọi SS' là đường kính của mặt cầu ngoài tiếp hình nón thì ta có

$x^2 = y(2R - y)$. Gọi V_1 là thể tích khối nón thì $V_1 = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi y.y(2R - y)$

$= \frac{\pi}{6}(4R - 2y).y.y \le \frac{\pi}{6}\left(\frac{4R - 2y + y + y}{3}\right)^3 = \frac{32\pi R^3}{81}$

Vậy thể tích V_1 đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{32\pi R^3}{81}$ khi và chỉ khi $4R - 2y = y \Leftrightarrow y = \frac{4R}{3}$, từ đó $x^2 = \frac{4R}{3}\left(2R - \frac{4R}{3}\right) = \frac{8R^2}{9}$ hay $x = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$.

Chọn C.

Câu 23: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đó, đặt $\alpha = \widehat{CAB}$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Tìm α sao cho thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\alpha = 60°$. **B.** $\alpha = 45°$. **C.** $\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\alpha = 30°$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$AC = AB.\ \cos\alpha = 2R.\cos\alpha$

$CH = AC.\sin\alpha = 2R.\cos\alpha.\sin\alpha$;

$AH = AC.\cos\alpha = 2R.\cos^2\alpha$

Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB là

$V=\frac{1}{3}AH.\pi CH^2=\frac{8}{3}R^3.\cos^4\alpha.\sin^2\alpha$. Đặt $t=\cos^2\alpha\ (0<t<1)$

$\Rightarrow V=\frac{8}{3}R^3t^2(1-t)=\frac{8}{6}R^3.t.t(2-2t)\le\frac{8}{6}R^3\left(\frac{t+t+2-2t}{3}\right)^3$

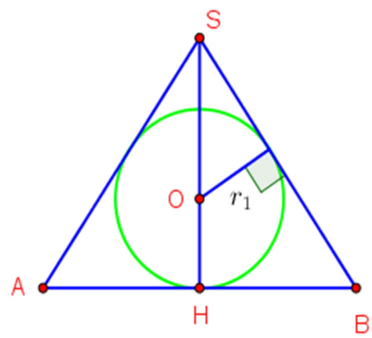
Vậy V lớn nhất khi $t=\frac{2}{3}$ khi $\alpha=\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.

□ Chú ý: có thể dùng PP hàm số để tìm GTNN của hàm $f(t)=t^2(1-t)$

Câu 24: Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của một hình nón. Kí hiệu V_1,V_2 lần lượt là thể tích hình nón và thể tích hình cầu nội tiếp hình nón. Khi r và h thay đổi, tìm giá trị bé nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. $\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 2

Hướng dẫn giải:



Gọi (P) là mặt phẳng đi qua trục của hình nón thì (P) cắt hình nón. Theo tam giác cân SAB, cắt mặt cầu theo đường tròn lớn, đường tròn này nội tiếp tam giác cân. Khi đó, bán kính r_1 của hình cầu nội tiếp hình nón được tính bởi công thức $r_1=\frac{rh}{r+\sqrt{h^2+r^2}}$

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{4}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}+1\right)^3}{\frac{h^2}{r^2}}=\frac{1}{4}\frac{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^3}{x}$$, ở đó $\frac{h^2}{r^2}=x>0$

Xét $f(x)=\frac{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^3}{4x}$, $f'(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2\left(x-2-2\sqrt{1+x}\right)}{4.2x^2\sqrt{x+1}}$

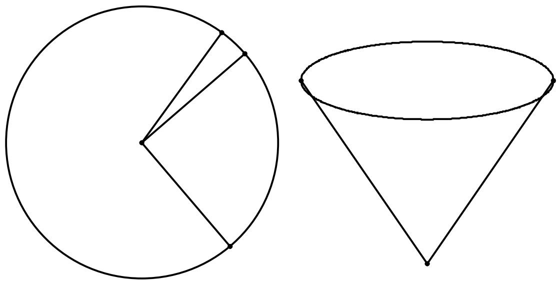
Vì $\frac{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2}{4.2x^2\sqrt{x+1}}>0$ nên khi xét dấu của $f(x)$, ta chỉ cần xét dấu của $g(x)=x-2-2\sqrt{1+x}$.

Ta có $g'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}$. Dễ thấy $g'(x)>0$ vì khi $x>0$ thì $\frac{1}{\sqrt{x+1}}<1$, đồng thời $g(x)=0\Leftrightarrow x=8$

Vậy $g(x)$ là hàm tăng trên miền $x>0$ và $g(8)=0$ nên

Với $0 < x \le 8$ thì $g(x) \le 0$;

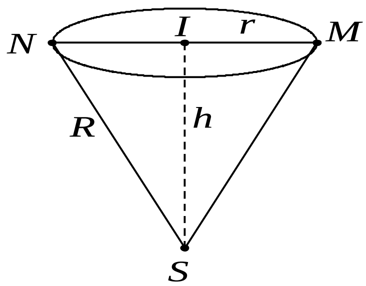
Câu 25: Với một miếng tôn hình tròn có bán kính bằng $R = 6cm$. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của hình tròn này
và gấp phần còn lại thành hình nón (Như hình vẽ).



Hình nón có thể tích lớn nhất khi người ta cắt cung tròn của hình quạt bằng:

A. $4\pi\sqrt{6}cm$ **B.** $6\pi\sqrt{6}cm$ **C.** $2\pi\sqrt{6}cm$ **D.** $8\pi\sqrt{6}cm$

Hướng dẫn giải:



Gọi $x,(x > 0)$ là chiều dài cung tròn của phần được xếp làm hình nón.
Như vậy, bán kính R của hình nón sẽ là đường sinh của hình nón và đường tròn đáy của hình nón sẽ có độ dài là x.
Bán kính r của đáy được xác định bởi đẳng thức

$$2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}.$$

Chiều cao của hình nón tính theo Định lý Pitago là:

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}.$$

Thể tích của khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}.$

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$V^2 = \frac{4\pi^2}{9}.\frac{x^2}{8\pi^2}.\frac{x^2}{8\pi^2}\left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \le \frac{4\pi^2}{9}\left(\frac{\frac{x^2}{8\pi^2} + \frac{x^2}{8\pi^2} + R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}{3}\right)^3 = \frac{4\pi^2}{9}.\frac{R^6}{27}$$

Do đó V lớn nhất khi và chỉ khi: $\frac{x^2}{8\pi^2} = R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}R\sqrt{6} = \frac{2\pi}{3}6\sqrt{6} = 4\pi\sqrt{6}.$

Chọn A.

(Lưu ý bài có thể sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, tuy nhiên lời giải bài sẽ dài hơn)

Câu 26: Gọi r và h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của một hình nón. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và thể tích của khối cầu nội tiếp hình nón. Giá trị bé nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 3. **D.** 2.

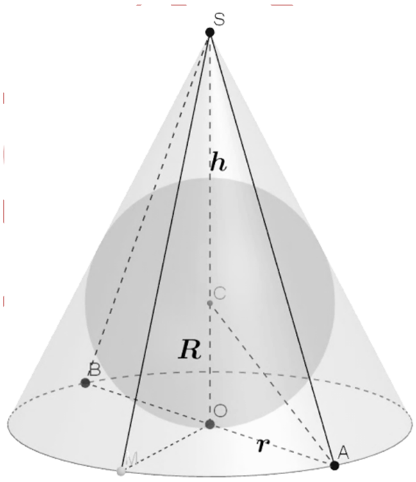
Hướng dẫn giải:

Ta có: Thể tích khối nón là $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Xét mặt cắt qua tâm SAB, kẻ tia phân giác của góc $\widehat{SBO}$, cắt SO tại I.

Ta có: $\frac{IO}{IS} = \frac{OB}{SB} = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} \Rightarrow IS = IO \cdot \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r}$

Mặt khác: $IO + IS = h$



Do đó ta có bán kính của mặt cầu nội tiếp hình chóp là

$R = IO = \frac{rh}{r+\sqrt{h^2+r^2}}$

Thể tích khối cầu là $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \frac{r^3h^3}{\left(r+\sqrt{h^2+r^2}\right)^3}$.

$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)^3}{4rh^2} = \frac{\left(1+\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}\right)^3}{4\frac{h^2}{r^2}}$. Đặt

$t = \sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}$ $(t \ge 1)$ $\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{(1+t)^3}{4(t^2-1)} = \frac{(t+1)^2}{4(t-1)}$

Đặt $f(t) = \frac{(t+1)^2}{t-1}$, Điều kiện: $t \ge 1$, $f'(t) = \frac{t^2-2t-3}{(t-1)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$, $f(3) = 8$

BBT $\Rightarrow f(t) \ge 8 \forall t \ge 1 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} \ge 2$

Chọn D.

Câu 27: Cho hình nón có chiều cao *h*, đường tròn đáy bán kính R. Một mặt phẳng (P) song song với đáy cách đáy một khoảng bằng d cắt hình nón theo đường tròn (L). Dựng hình trụ có một đáy là (L), đáy còn lại thuộc đáy của hình nón và trục trùng với trục hình nón. Tìm d để thể tích hình trụ là lớn nhất.

A. $d = \frac{h}{3}$ **B.** $d = \frac{h}{2}$ **C.** $d = \frac{h}{6}$ **D.** $d = \frac{h}{4}$

Đáp án: A

Giải: Gọi r là bán kính của (L).

Ta có $\frac{r}{R}=\frac{h-d}{h}\Rightarrow r=\frac{R}{h}\left(h-d\right)$

$$\Rightarrow V=\pi\frac{R^2}{h^2}\left(h-d\right)^2.d=\pi\frac{R^2}{2h^2}\left(h-d\right)\left(h-d\right).2d\le\pi\frac{R^2}{2h^2}\left(\frac{\left(h-d\right)+\left(h-d\right)+2d}{3}\right)^3=\frac{4\pi R^2h}{27}$$

Dấu bằng xảy ra khi $h-d=2d\Leftrightarrow d=\frac{h}{3}$.

Câu 28: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính $50cm$. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

A. $10\sqrt{2}cm$ **B.** $20cm$ **C.** $50\sqrt{2}cm$ **D.** $25cm$

Hướng dẫn giải:

Đặt $a=50cm$. Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình nón lần lượt là $x,y\left(x,y>0\right)$.

Ta có $SA=\sqrt{SH^2+AH^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

Khi đó diện tích toàn phần của hình nón là $S_{tp}=\pi x^2+\pi x\sqrt{x^2+y^2}$

Theo giả thiết ta có

$$\pi x^2+\pi x\sqrt{x^2+y^2}=\pi a^2\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y^2}+x^2=a^2\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y^2}=a^2-x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2+y^2\right)=a^4+x^4-2a^2x^2,\left(DK:x<a\right)\Leftrightarrow x^2=\frac{a^4}{y^2+2a^2}$$

Khi đó thể tích khối nón là

$$V=\frac{1}{3}\pi.\frac{a^4}{y^2+2a^2}.y=\frac{1}{3}\pi a^4.\frac{y}{y^2+2a^2}$$

V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{y^2+2a^2}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Ta có $\frac{y^2+2a^2}{y}=y+\frac{2a^2}{y}\ge 2\sqrt{y.\frac{2a^2}{y}}=2\sqrt{2}a$

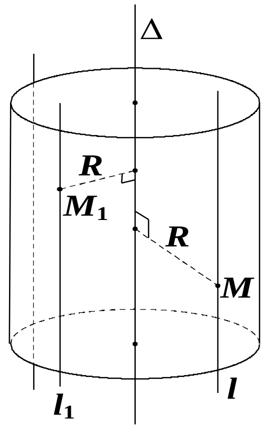
Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $y=\frac{2a^2}{y}$, tức là $y=a\sqrt{2}\Rightarrow x=\frac{a}{2}=25cm$

Lưu ý: Bài trên các em xét hàm số và lập bảng biến thiên cũng được nhé

MẶT TRỤ - KHỐI TRỤ

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa mặt trụ



- Cho đường thẳng Δ. Xét 1 đường thẳng l song song với Δ, cách Δ một khoảng R. Khi đó:

Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l như thế được gọi là mặt trụ tròn xoay hay đơn giản là mặt trụ.

- Δ gọi là trục của mặt trụ, l gọi là đường sinh và R gọi là bán kính mặt mặt trụ.

2. Hình trụ và khối trụ

Cắt mặt trụ (T) trục Δ, bán kính R bởi 2 mặt phẳng phân biệt (P) và (P') cùng vuông góc với Δ ta được giao tuyến là hai đường tròn $(C),(C')$.

a) Phần mặt trụ (T) nằm giữa hai mặt phẳng (P) và (P')cùng với hai hình tròn xác định bởi $(C),(C')$ được gọi là hình trụ.

- Hai đường tròn $(C),(C')$ được gọi là hai đường tròn đáy, 2 hình tròn xác định bởi chúng được gọi là 2 mặt đáy của hình trụ, bán kính của chúng gọi là bán kính hình trụ. Khoảng cách giữa 2 mặt đáy gọi là chiều cao của hình trụ.

- Nếu gọi O và O’ là tâm hai hình tròn đáy thì đoạn OO’ gọi là trục của hình trụ

- Phần mặt trụ nằm giữa 2 đáy gọi là mặt xung quanh của hình trụ.

b) Hình trụ cùng với phần bên trong của nó gọi là khối trụ.

3. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích của khối trụ

Với R là bán kính đáy, h là chiều cao.

- Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi Rh$

- Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$.

- Thể tích khối trụ $V = \pi R^2 h$ (chiều cao nhân diện tích đáy).

Trước hết tôi xin nhắc lại, hai bài trong đề Minh họa tháng 10 vừa rồi của Bộ Giáo dục và Đào tạo, hai bài này chỉ ở mức vận dụng thấp.

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Một hình trụ có bán kính đáy R và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong khối trụ đã cho.

A. $4R^3$ **B.** $2R^3$ **C.** $3R^3$ **D.** R^3

Câu 2: Một khối lăng trụ tam giác đều cạnh đáy bằng a, góc giữa đường chéo mỗi mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính thể tích khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ đó.

A. $V=\frac{1}{3}\pi a^3\sqrt{3}$ **B.** $V=\pi a^3\sqrt{3}$ **C.** $V=\frac{1}{2}\pi a^3\sqrt{3}$ **D.** $V=\frac{2}{3}\pi a^3\sqrt{3}$

Câu 3: Một khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h nội tiếp một khối trụ. Tính thể tích khối trụ đó.

A. $\frac{\pi a^2 h}{3}$ **B.** $\frac{\pi 2a^2 h}{3}$ **C.** $\frac{\pi 5a^2 h}{3}$ **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}a^2 h}{3}$

Câu 4: Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB=2a$. Tính thể tích của khối tứ diện $\text{OO}'AB$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3}{12}$ **C.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Câu 5: Cho một hình trụ có bán kính đáy $R=5$, chiều cao $h=6$. Một đoạn thẳng AB có độ dài bằng 10 và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Câu 6: Một hình trụ có bán kính đáy bằng 50cm và có chiều cao là 50cm. Một đoạn thẳng AB có chiều dài là 100cm và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách d từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.

A. $d=50cm$ **B.** $d=50\sqrt{3}cm$ **C.** $d=25cm$ **D.** $d=25\sqrt{3}cm$

Câu 7: Cho hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao R lấy hai điểm A, B nằm trên hai đường tròn đáy sao cho $AB=2R$. Tính khoảng cách từ AB đến hình trụ theo R.

A. $\frac{R}{2}$ **B.** $\frac{R}{3}$ **C.** $\frac{R}{5}$ **D.** $\frac{R}{4}$

Câu 8: Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông. Bên trong hình trụ có một hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp. Nếu thể tích hình lăng trụ là V thì thể tích hình trụ bằng bao nhiêu?

A. $V_{Tru}=\frac{\pi V}{2}$ **B.** $V_{Tru}=\frac{\pi V}{3}$ **C.** $V_{Tru}=\frac{\pi V}{4}$ **D.** $V_{Tru}=\frac{\pi V}{5}$

Câu 9: Cho $AA'B'B$ là thiết diện song song với trục OO' của hình trụ (A, B thuộc đường tròn tâm O). Cho biết $AB=4, \text{AA}'=3$ và thể tích của hình trụ bằng $V=24\pi$. Khoảng cách d từ O đến mặt phẳng $(\text{AA}'B'B)$ là:

A. $d=1$ **B.** $d=2$ **C.** $d=3$ **D.** $d=4$

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O’, O là tâm của hai hình vuông ABCD và $A'B'C'D'$ và $O'O=a$. Gọi V_1 là thể tích của hình trụ tròn xoay đáy là hai đường tròn ngoại tiếp các hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$ và V_2 là thể tích hình nón tròn xoay đỉnh O’ và đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$. Tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$ là:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 6

Câu 11: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác có $AB=5, AC=8$ và góc $\widehat{(AB,AC)}=60^0$. Gọi V,V' lần lượt là thể tích của khối lăng trụ ngoại tiếp và nội tiếp khối lăng trụ đã cho. Tính tỉ số $\frac{V'}{V}$?

A. $\frac{9}{49}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{19}{49}$ **D.** $\frac{29}{49}$

Câu 12: Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn (O) và (O'), chiều cao bằng $2R$ và bán kính đáy R. Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc $30°$, (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung. Tính độ dài dây cung đó theo R.

A. $\frac{4R}{3\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{2R}{3}$.

Câu 13: Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng R và có chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30^0. Khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ bằng:

A. R. **B.** $R\sqrt{3}$. **C.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{R\sqrt{3}}{4}$.

Câu 14: Cho hình trụ có chiều cao $h=2$, bán kính đáy $r=3$. Một mặt phẳng (P) không vuông góc với đáy của hình trụ, lần lượt cắt hai đáy theo đoạn giao tuyến AB và CD sao cho $ABCD$ là hình vuông. Tính diện tích S của hình vuông $ABCD$.

A. $S=12\pi$. **B.** $S=12$. **C.** $S=20$. **D.** $S=20\pi$.

Câu 15: Cho một khối trụ có bán kính đáy $r=a$ và chiều cao $h=2a$. Mặt phẳng (P) song song với trục OO' của khối trụ chia khối trụ thành 2 phần, gọi V_1 là thể tích phần khối trụ chứa trục OO', V_2 là thể tích phần còn lại của khối trụ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$, biết rằng (P) cách OO' một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

A. $\frac{3\pi+2}{\pi-2}$. **B.** $\frac{3\pi-2}{\pi-2}$. **C.** $\frac{2\pi+3}{\pi-2}$. **D.** $\frac{2\pi-3}{\pi-2}$.

Câu 16: Một hình trụ có thể tích V không đổi. Tính mối quan hệ giữa bán kính đáy và chiều cao hình trụ sao cho diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $R=\frac{h}{2}$ **B.** $R=\frac{h}{3}$ **C.** $R=\frac{h}{5}$ **D.** $R=\frac{h}{4}$

Câu 17: Trong số các khối trụ có thể tích bằng V, khối trụ có diện tích toàn phần bé nhất thì có bán kính đáy là

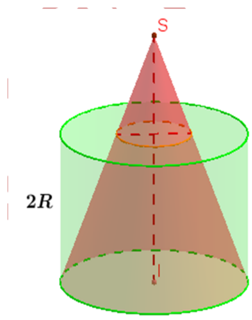
A. $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. **B.** $R=\sqrt[3]{\frac{4\pi}{V}}$ **C.** $R=\sqrt[3]{\frac{\pi}{V}}$ **D.** $R=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

Câu 18: Trong số các hình trụ có diện tích toàn phần đều bằng S thì bán kính R và chiều cao h của khối trụ có thể tích lớn nhất là:

A. $R=\sqrt{\frac{S}{2\pi}};h=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$. **B.** $R=\sqrt{\frac{S}{4\pi}};h=\sqrt{\frac{S}{4\pi}}$.

C. $R=\sqrt{\frac{2S}{3\pi}};h=4\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$. **D.** $R=\sqrt{\frac{S}{6\pi}};h=2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Câu 19: Cho hình nón có độ dài đường kính đáy là $2R$, độ dài đường sinh là $R\sqrt{17}$ và hình trụ có chiều cao và đường kính đáy đều bằng $2R$, lồng vào nhau như hình vẽ.



Tính thể tích phần khối trụ không giao với khối nón

A. $\frac{5}{12}\pi R^3$. **B.** $\frac{1}{3}\pi R^3$. **C.** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **D.** $\frac{5}{6}\pi R^3$.

Câu 20: Chiều cao của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình cầu có bán kính R là

A. $R\sqrt{3}$. **B.** $\frac{R\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

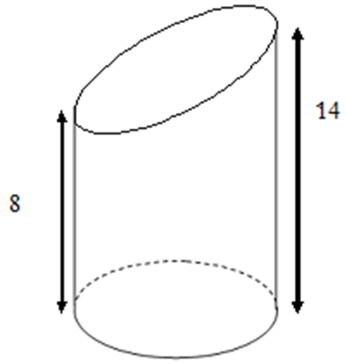
Câu 21: Cho mặt cầu (S) bán kính R. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nội tiếp mặt cầu. Tính chiều cao h theo bán kính R sao cho diện tích xung quanh hình trụ lớn nhất

A. $h=R\sqrt{2}$. **B.** $h=R$. **C.** $h=\frac{R}{2}$. **D.** $h=\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22: Cho hình cầu tâm O, đường kính 2R và hình trụ tròn xoay nội tiếp trong hình cầu. Hãy tìm kích thước của hình trụ khi nó có thể tích đạt giá trị lớn nhất.

A. $r=\dfrac{R\sqrt{6}}{3}$ **B.** $r=\dfrac{2R}{3}$ **C.** $r=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ **D.** $r=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$

Câu 23: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng ta được một khối (H) như hình vẽ bên. Biết rằng thiết diện là một hình elip có độ dài trục lớn bằng 8, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất tới mặt đáy lần lượt là 8 và 14 (xem hình vẽ).Tính thể tích của (H).



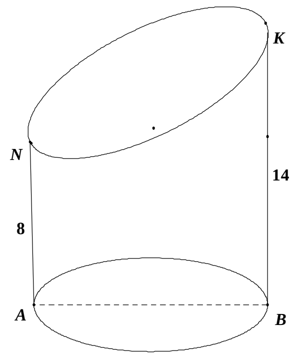
A. $V_{(H)}=192\pi$.

B. $V_{(H)}=275\pi$.

C. $V_{(H)}=704\pi$.

D. $V_{(H)}=176\pi$.

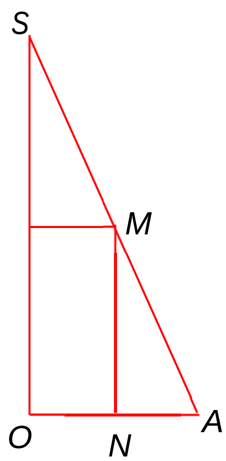
Câu 24: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng ta được một khối (H) như hình vẽ. biết rằng thiết diện là một elip có độ dài trục lớn là 10, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất tới mặt đáy lần lượt là 8 và 14. Tính thể tích của (H)



A. $V_{(H)}=275\pi$ **B.** $V_{(H)}=176\pi$

C. $V_{(H)}=192\pi$ **D.** $V_{(H)}=704\pi$

Câu 25: Cho hình vẽ bên. Tam giác SOA vuông tại O có $MN_{€}SO$ với M, N lần lượt nằm trên cạnh SA, OA. Đặt $SO=h$ không đổi. Khi quay hình vẽ quanh SO thì tạo thành một hình trụ nội tiếp hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O bán kính $R=OA$. Tìm độ dài của MN để thể tích khối trụ là lớn nhất.



A. $MN=\dfrac{h}{2}$ **B.** $MN=\dfrac{h}{3}$

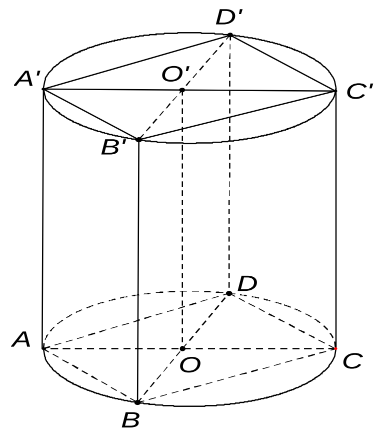
C. $MN=\dfrac{h}{4}$ **D.** $MN=\dfrac{h}{6}$

C – HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Một hình trụ có bán kính đáy R và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong khối trụ đã cho.

A. $4R^3$ **B.** $2R^3$ **C.** $3R^3$ **D.** R^3

Hướng dẫn giải:



Giả sử $ABCDA'B'C'D'$ là khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ đã cho.

Từ giả thiết, suy ra hình trụ có chiều cao $h = 2R$ và đáy $ABCD$ là hình vuông nội tiếp đường tròn bán kính R.

Do đó $AC = 2R \Rightarrow AB = \dfrac{2R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là:

$S_{ABCD} = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$

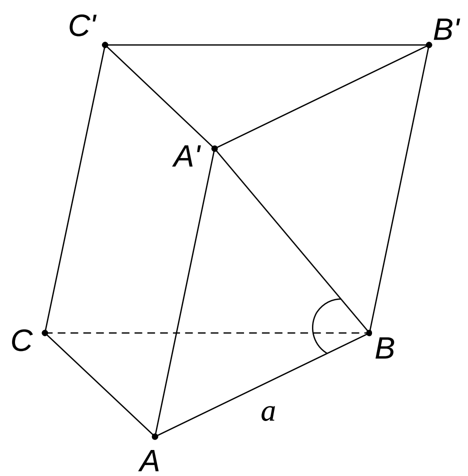
Vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho là: $V = S_{ABCD}.h = 2R^2.2R = 4R^3$.

Chọn A.

Câu 2: Một khối lăng trụ tam giác đều cạnh đáy bằng a, góc giữa đường chéo mỗi mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính thể tích khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ đó.

A. $V = \dfrac{1}{3}\pi a^3\sqrt{3}$ **B.** $V = \pi a^3\sqrt{3}$ **C.** $V = \dfrac{1}{2}\pi a^3\sqrt{3}$ **D.** $V = \dfrac{2}{3}\pi a^3\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:



Xét hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy $AB = a$, góc của đường chéo A'B với mặt đáy (ABC) là $\widehat{A'BA} = 60^0$.

Suy ra: $h = AA' = a.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

Khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ có cùng đường cao là A'A, đáy là đường tròn ngoại tiếp hai mặt đáy $(ABC),(A'B'C')$, có bán kính R cho bởi $R\sqrt{3} = a \Rightarrow R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Thể tích khối trụ:

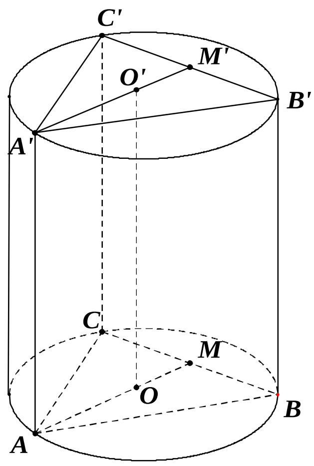
$V=\pi R^2h=\pi\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 a\sqrt{3}=\frac{1}{3}\pi a^3\sqrt{3}$ (đvdt).

Chọn A.

Câu 3: Một khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h nội tiếp một khối trụ. Tính thể tích khối trụ đó.

A. $\frac{\pi a^2h}{3}$ **B.** $\frac{\pi 2a^2h}{3}$ **C.** $\frac{\pi 5a^2h}{3}$ **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}a^2h}{3}$

Hướng dẫn giải:



Hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do ABC là tam giác đều cạnh a nên hình trụ có bán kính là:

$R=OA=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

với $M=AO\cap BC$

Chiều cao của hình trụ bằng chiều cao của lăng trụ là h.

Vậy thể tích khối trụ là:

$V=\pi R^2h=\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 h=\frac{\pi a^2h}{3}$.

Chọn A.

Câu 4: Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O’, bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường đáy tâm O’ lấy điểm B sao cho $AB=2a$. Tính thể tích của khối tứ diện $\mathrm{OO}'AB$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3}{12}$ **C.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Kẻ đường sinh AA’. Gọi D là điểm đối xúng của A’ qua O’ và H là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng *A’D*.

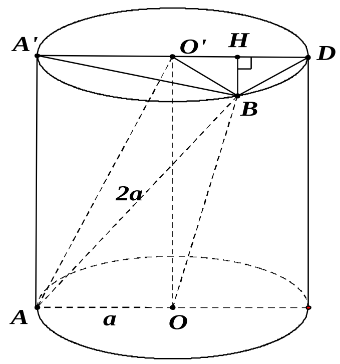
$\begin{cases} BH\perp A'D\\ BH\perp AA'\end{cases}\Rightarrow BH\perp(AOOA')$

Do đó, BH là chiều cao của tứ diện $\mathrm{OO}'AB$

Thể tích khối tứ diện $\mathrm{OO}'AB:V=\frac{1}{3}.S_{\Delta AOO'}.BH$

Tam giác $AA'B$ vuông tại A’ cho: $A'B=\sqrt{AB^2-A'A^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$

Tam giác $A'B=\sqrt{A'D^2-A'B^2}=\sqrt{4a^2-3a^2}=a.$



Suy ra $BO'D$ là tam giác đều cạnh $a.$

Từ đó $BH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Do $OA=\text{OO}'=\text{a}$ nên tam giác AOO' vuông cân tại O.

Diện tích tam giác AOO' là:

$$S_{\Delta AOO'}=\frac{1}{2}OA.\text{OO}'=\frac{1}{2}a^2$$

Vậy $V=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{2}a^2=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}.$

Chọn A.

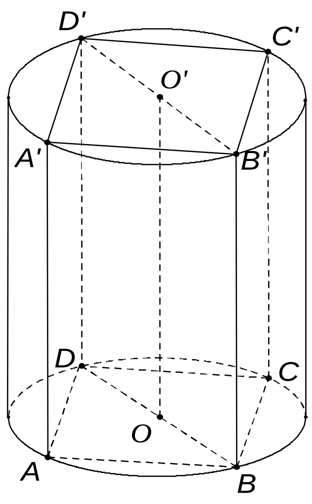
Câu 8: Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông. Bên trong hình trụ có một hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp. Nếu thể tích hình lăng trụ là V thì thể tích hình trụ bằng bao nhiêu?

A. $V_{Tru}=\dfrac{\pi V}{2}$ **B.** $V_{Tru}=\dfrac{\pi V}{3}$ **C.** $V_{Tru}=\dfrac{\pi V}{4}$ **D.** $V_{Tru}=\dfrac{\pi V}{5}$

Hướng dẫn giải:

Gọi cạnh đáy lăng trụ là $a.$

Thiết diện qua hình trụ là hình vuông.



$BDD'B':BD=2R=a\sqrt{2}\Rightarrow BB'=a\sqrt{2}$

Thể tích lăng trụ bằng V

$$\Leftrightarrow a^2.a\sqrt{2}=V\Leftrightarrow a^3=\frac{V}{\sqrt{2}}$$

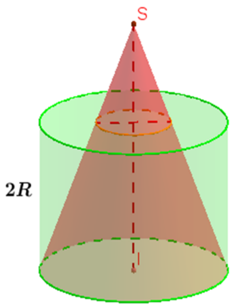
Thể tích hình trụ tính theo a:

$$V_{tru}=\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.a\sqrt{2}=\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{2}$$

Thay $a^3=\dfrac{V}{\sqrt{2}}:V_{tru}=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}.\dfrac{V}{\sqrt{2}}=\dfrac{\pi V}{2}.$

Chọn A.

Câu 19: Cho hình nón có độ dài đường kính đáy là $2R$, độ dài đường sinh là $R\sqrt{17}$ và hình trụ có chiều cao và đường kính đáy đều bằng $2R$, lồng vào nhau như hình vẽ.

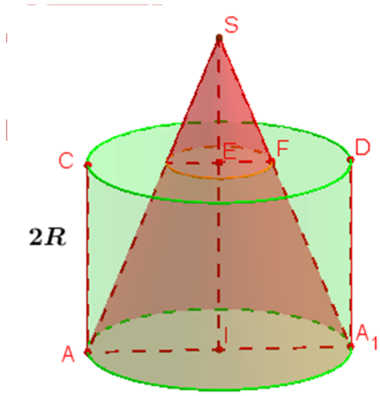


Tính thể tích phần khối trụ không giao với khối nón

A. $\frac{5}{12}\pi R^3$. **B.** $\frac{1}{3}\pi R^3$. **C.** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **D.** $\frac{5}{6}\pi R^3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Ta có

$SI = \sqrt{SB^2 - IB^2} = \sqrt{17R^2 - R^2} = 4R \Rightarrow SE = 2R, EF = \frac{R}{2}$.

Thể tích khối nón lớn (có đường cao SI) là

$V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2.4\text{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích khối nón nhỏ (có đường cao SE) là

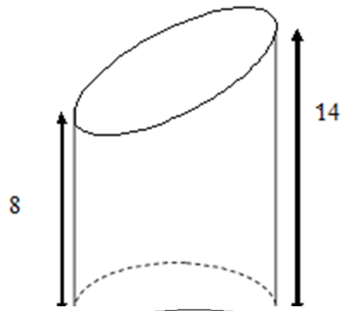
$V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2.2R = \frac{1}{6}\pi R^3$

Thể tích phần khối giao nhau giữ khối nón và khối trụ là $V_3 = V_1 - V_2 V_2 = \frac{7}{6}\pi R^3$.

Thể tích khối trụ là là $V_4 = \pi R^2.2R = 2\pi R^3$.

Vậy thể tích phần khối trụ không giao với khối nón là $V = V_4 - V_3 = \frac{5}{6}\pi R^3$.

Câu 23: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng ta được một khối (H) như hình vẽ bên. Biết rằng thiết diện là một hình elip có độ dài trục lớn bằng 8, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất tới mặt đáy lần lượt là 8 và 14 (xem hình vẽ).Tính thể tích của (H).



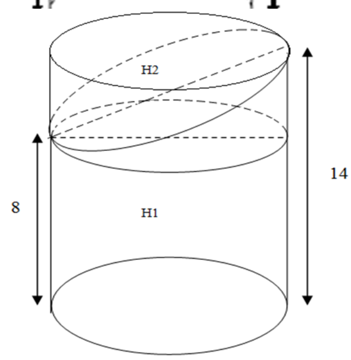
A. $V_{(H)} = 192\pi$.

B. $V_{(H)} = 275\pi$.

C. $V_{(H)} = 704\pi$.

D. $V_{(H)} = 176\pi$.

Hướng dẫn giải:



Chọn D.

Đường kính đáy của khối trụ là $\sqrt{10^2-6^2}=8$

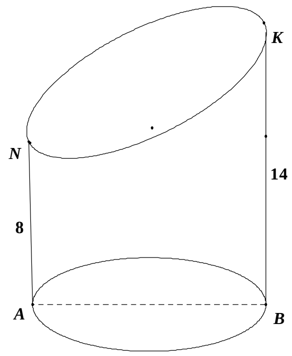
Bán kính đáy của khối trụ là $R=4$

Thể tích của khối trụ $H1$ là $V_1=\pi.R^2.h_1=\pi.4^2.8=128\pi$.

Thể tích của khối trụ $H2$ là $V_2=\pi.R^2.h_2=\pi.4^2.6=96\pi$.

Thể tích của H là $V=V_1+\frac{1}{2}V_2=128\pi+\frac{1}{2}.96\pi=176\pi$.

Câu 24: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng ta được một khối (H) như hình vẽ. biết rằng thiết diện là một elip có độ dài trục lớn là 10, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất tới mặt đáy lần lượt là 8 và 14. Tính thể tích của (H)

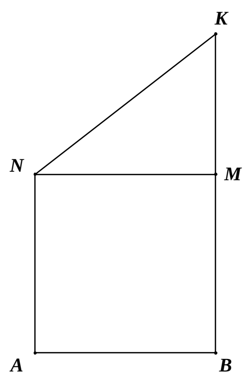


A. $V_{(H)}=275\pi$ **B.** $V_{(H)}=176\pi$

C. $V_{(H)}=192\pi$ **D.** $V_{(H)}=704\pi$

Hướng dẫn giải:

Dùng một mặt phẳng đi qua N và vuông góc với trục của hình (H) cắt hình (H) thành 2 phần có thể tích lần lượt là V_{tren}, V_{duoi}



Ta có $MN=\sqrt{NK^2-KM^2}=8\Rightarrow R_{day\,tru}=4\Rightarrow V_{duoi}=\pi.R^2.h=128\pi$

Phần phía trên có thể tích bằng một nửa của hình trụ có

$R=4,h=6\Rightarrow V_{tren}=\frac{1}{2}\pi.16.6=48\pi$

Vậy $V_{(H)}=128\pi+48\pi=176\pi$

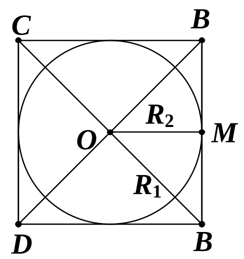
Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O', O là tâm của hai hình vuông ABCD và $A'B'C'D'$ và $O'O=a$. Gọi V_1 là thể tích của hình trụ tròn xoay đáy là hai đường tròn ngoại tiếp các hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$ và V_2 là thể tích hình nón tròn xoay đỉnh O' và đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$. Tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$ là:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 6

Hướng dẫn giải:

Gọi M trung điểm của AB thì tam

giác OAM vuông cân tại M.



$R_1 = OA = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $R_2 = OM = \dfrac{1}{2}$

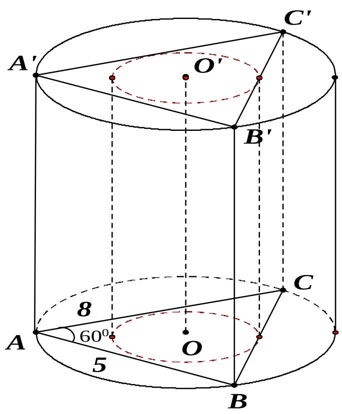
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R_1^2.h}{\frac{1}{3}\pi R_2^2.h} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{4}\right) = 6$$

Chọn D.

Câu 11: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác có $AB = 5, AC = 8$ và góc $\left(\widehat{AB, AC}\right) = 60^0$. Gọi V, V' lần lượt là thể tích của khối lăng trụ ngoại tiếp và nội tiếp khối lăng trụ đã cho. Tính tỉ số $\dfrac{V'}{V}$?

A. $\dfrac{9}{49}$ **B.** $\dfrac{9}{4}$ **C.** $\dfrac{19}{49}$ **D.** $\dfrac{29}{49}$

Hướng dẫn giải:



Áp dụng đinh lý cosin trong tam giác ABC ta c

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60^0 = 25 + 64 - 2.5.8.\dfrac{1}{2} = 49.$

Diện tích tam giác ABC là:

$S = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 60^0 = \dfrac{1}{2}.5.8.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$

Mặt khác:

$S_{ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4R}$, với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$\Rightarrow R == \dfrac{AB.AC.BC}{4S_{ABC}} = \dfrac{5.8.7}{4.10\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}.$

Ngoài ra: $S_{ABC} = pr$, trong đó $p = \dfrac{1}{2}\left(AB + BC + AC\right) = 10$ và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC $\Rightarrow r = \dfrac{S_{ABC}}{p} = \dfrac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$

Hình trụ ngoại tiếp và nội tiếp lăng trụ đã cho có bán kính đáy lần lượt là R, r và có chiều cao bằng chiều cao của hình lăng trụ.

Giả sử h là chiều cao hình lăng trụ, ta có: $V = \pi R^2 h$ và $V = \pi r^2 h$

Vậy $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{9}{49}$.

Chọn A.

Câu 15: Cho một khối trụ có bán kính đáy $r = a$ và chiều cao $h = 2a$. Mặt phẳng (P) song song với trục OO' của khối trụ chia khối trụ thành 2 phần, gọi V_1 là thể tích phần khối trụ chứa trục OO', V_2 là thể tích phần còn lại của khối trụ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$, biết rằng (P) cách OO' một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

A. $\frac{3\pi+2}{\pi-2}$. **B.** $\frac{3\pi-2}{\pi-2}$. **C.** $\frac{2\pi+3}{\pi-2}$. **D.** $\frac{2\pi-3}{\pi-2}$.

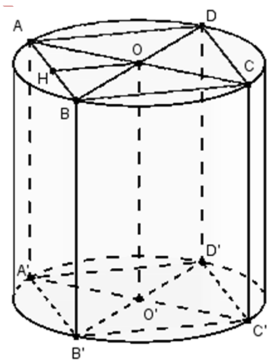
Hướng dẫn giải:

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi a^2.2a = 2\pi a^3$.

Gọi thiết diện là hình chữ nhật $ABB'A'$.

Dựng lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ.

Gọi H là trung điểm AB.



Ta có $OH \perp AB \Rightarrow OH \perp (ABB'A') \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow AH = BH = \frac{a\sqrt{2}}{2} = OH$.

$\Rightarrow \Delta OAB$ vuông cân tại O $\Rightarrow$ ABCD là hình vuông.

Từ đó suy ra:

$$V_2 = \frac{1}{4}\left(V - V_{ABCD.A'B'C'D'}\right) = \frac{1}{4}\left(2\pi a^3 - (a\sqrt{2})^2.2a\right) = \frac{a^3(\pi-2)}{2}.$$

$$V_1 = V - V_2 = 2\pi a^3 - \frac{a^3(\pi-2)}{2} = \frac{a^3(3\pi+2)}{2}.\ \text{Suy ra}\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{3\pi+2}{\pi-2}.$$

Chọn A.

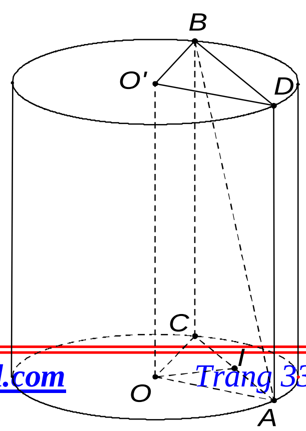
Câu 5: Cho một hình trụ có bán kính đáy $R = 5$, chiều cao $h = 6$. Một đoạn thẳng AB có độ dài bằng 10 và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Gọi hai đường tròn đáy là $(O),(O')$ và $A \in (O), B \in (O')$. Kẻ hai đường sinh AD, BC ta được tứ giác $ABCD$ là một hình chữ nhật và $mp(ABCD)//OO'$.

Do đó, khoảng cách giữa OO’ và AB



bằng khoảng cách từ O đến $mp\left(ABCD\right)$.

Tam giác ACB vuông tại C nên ta có:

$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8.$

Gọi I là trung điểm AC, ta có:

$\begin{cases} OI\perp AC \\ OI\perp AD \end{cases}\Rightarrow OI\perp\left(ABCD\right)$

Vậy khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục OO’ của hình trụ là:

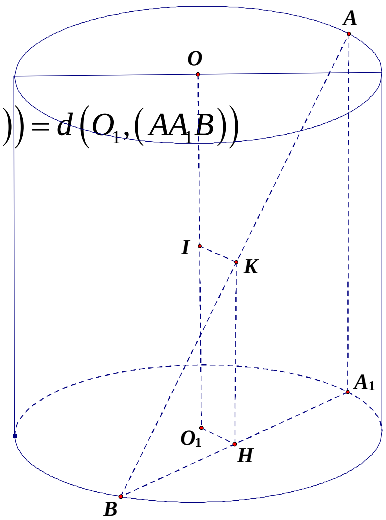
$OI=\sqrt{OA^2-IA^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3.$

Chọn B.

Câu 6: Một hình trụ có bán kính đáy bằng 50cm và có chiều cao là 50cm. Một đoạn thẳng AB có chiều dài là 100cm và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách d từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.

A. $d=50cm$ **B.** $d=50\sqrt{3}cm$ **C.** $d=25cm$ **D.** $d=25\sqrt{3}cm$

Hướng dẫn giải:



Kẻ AA_1 vuông góc với đáy, A_1 thuộc đáy. Suy ra:

$OO_1//AA_1\Rightarrow OO_1//\left(AA_1B\right)\Rightarrow d\left(OO_1,AB\right)=d\left(OO_1,\left(AA_1B\right)\right)=d\left(O_1,\left(AA_1B\right)\right)$

Tiếp tục kẻ $O_1H\perp A_1B$ tại H, vì O_1H nằm trong đáy nên cũng vuông góc với A_1A suy ra:

$O_1H\perp\left(AA_1B\right)$. Do đó

$d\left(OO_1,AB\right)=d\left(OO_1,\left(AA_1B\right)\right)=d\left(O_1,\left(AA_1B\right)\right)=O_1H$

Xét tam giác vuông AA_1B ta có

$A_1B=\sqrt{AB^2-AA_1^2}=50\sqrt{3}$

Vậy $O_1H=\sqrt{O_1A_1^2-A_1H^2}=25\,cm$

Chọn C.

Câu 7: Cho hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao R lấy hai điểm A, B nằm trên hai đường tròn đáy sao cho $AB=2R.$ Tính khoảng cách từ AB đến hình trụ theo R.

A. $\frac{R}{2}$ **B.** $\frac{R}{3}$ **C.** $\frac{R}{5}$ **D.** $\frac{R}{4}$

Hướng dẫn giải:

Giả sử $A\in$ đường tròn O, $B\in O'$.

Từ A vẽ đường song song OO’ cắt

đường tròn $\left(O'\right)$ tại A’.

Vẽ O'H vuông góc $A'B$.

Từ H vẽ đường thẳng song song với OO',

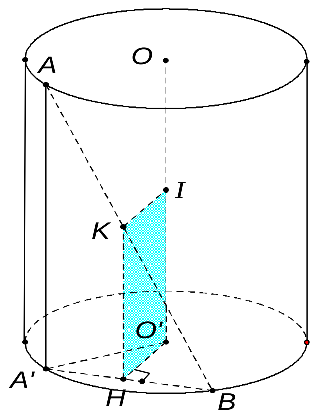
cắt AB tại K. Vẽ $KI//O'H$.

Ta có: $O'H \perp A'B$ và AA' nên:

$O'H \perp mp(AA'B) \Rightarrow O'H \perp HK$ và AB

Vậy tứ giác $KIO'H$ là hình chữ nhật $\Rightarrow KI \perp OO'$.

Vậy KI là đoạn vuông góc chung của AB và OO'. $\Delta AA'B$ vuông



$\Rightarrow A'B^2 = AB^2 - AA'^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$.

Do H trung điểm A'B nên: $HA' = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}.\Delta O'A'H \Rightarrow O'H^2 = O'A^2 - A'H^2 = R^2 - \dfrac{3R^2}{4} = \dfrac{R^2}{4}$

Do đó: $d(AB, OO') = KI = O'H = \dfrac{R}{2}$.

Chọn A.

Câu 9: Cho $AA'B'B$ là thiết diện song song với trục OO' của hình trụ (A, B thuộc đường tròn tâm O). Cho biết $AB = 4, AA' = 3$ và thể tích của hình trụ bằng $V = 24\pi$. Khoảng cách d từ O đến mặt phẳng $(AA'B'B)$ là:

A. $d = 1$ **B.** $d = 2$ **C.** $d = 3$ **D.** $d = 4$

Hướng dẫn giải:

Kẻ $OH \perp AB$ thì $OH \perp (AA'B'B)$

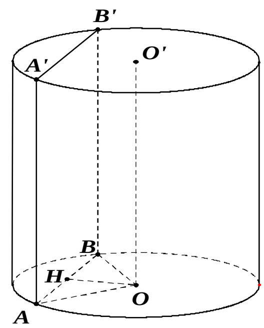
Và $AH = \dfrac{1}{2}AB = 2$

Ta có $V = \pi.OA^2.AA' = 3\pi OA^2$

Mà $V = 24\pi \Rightarrow OA^2 = 8$

$\Delta OAH: d^2 = OH^2 = OA^2 - AH^2 = 8 - 4 = 4$

$\Rightarrow d(O, (AA'B'B)) = d = 2$



Chọn B.

Câu 12: Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn (O) và (O'), chiều cao bằng $2R$ và bán kính đáy R. Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc $30°$, (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung. Tính độ dài dây cung đó theo R.

A. $\dfrac{4R}{3\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{2R}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Dựng $OH \perp AB \Rightarrow AB \perp (OIH) \Rightarrow (OIH) \perp (IAB)$

$\Rightarrow IH$ là hình chiếu của OI lên (IAB)

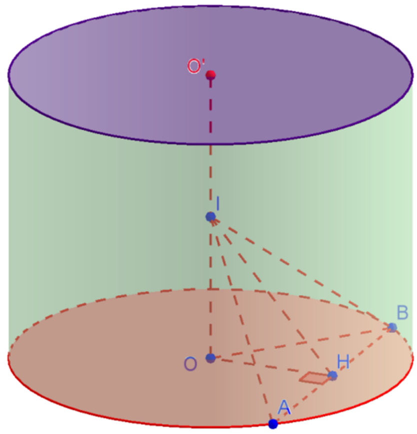
Theo bài ta được $\widehat{OIH} = 30°$

Xét tam giác vuông OIH vuông tại O

$\Rightarrow OH = OI \tan 30° = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác OHA vuông tại H

$\Rightarrow AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \dfrac{R\sqrt{6}}{3} \Rightarrow AB = \dfrac{2R\sqrt{6}}{3}$



Câu 13: Cho một hình trụ có bán kính đáy bằng R và có chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30^0. Khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ bằng:

A. R. **B.** $R\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{R\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Từ hình vẽ kết hợp với giả thiết, ta có $OA = O'B = R$.

Gọi AA' là đường sinh của hình trụ thì

$O'A' = R,\ AA' = R\sqrt{3}$ và $\widehat{BAA'} = 30^0$.

Vì $OO' \parallel (ABA')$ nên

$d[OO',(AB)] = d[OO',(ABA')] = d[O',(ABA')]$.

Gọi H là trung điểm $A'B$, suy ra

$\left.\begin{array}{l} O'H \perp A'B \\ O'H \perp AA' \end{array}\right\} \Rightarrow O'H \perp (ABA')$ nên $d[O',(ABA')] = O'H$.

Tam giác ABA' vuông tại A' nên $BA' = AA' \tan 30^0 = R$.

Suy ra tam giác $A'BO'$ đều có cạnh bằng R nên $O'H = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Chọn C.

Câu 21: Cho mặt cầu (S) bán kính R. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nội tiếp mặt cầu. Tính chiều cao h theo bán kính R sao cho diện tích xung quanh hình trụ lớn nhất

A. $h = R\sqrt{2}$.   **B.** $h = R$.   **C.** $h = \dfrac{R}{2}$.   **D.** $h = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

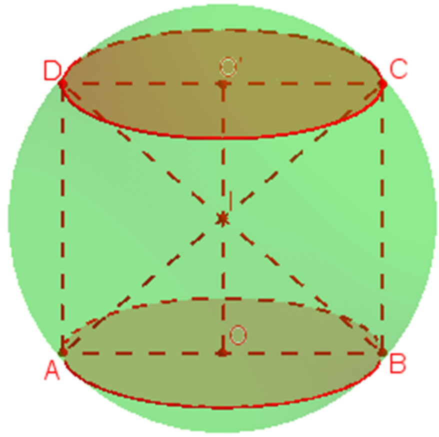
Ta có $OO' = h; IA = R, AO = r \Rightarrow r^2 = R^2 - \dfrac{h^2}{4}$.

Diện tích xung quanh của hình trụ

$S = 2\pi rh = \pi h\sqrt{4R^2 - h^2} \le \pi \dfrac{h^2 + 4R^2 - h^2}{2}$,

(dùng BĐT $ab \le \dfrac{a^2 + b^2}{2}$).

Vậy $S_{\max} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow h^2 = 4R^2 - h^2 \Leftrightarrow h = R\sqrt{2}$.

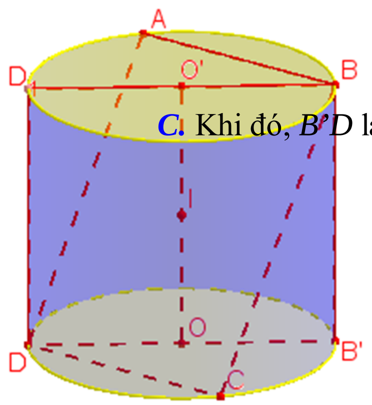


Câu 14: Cho hình trụ có chiều cao $h = 2$, bán kính đáy $r = 3$. Một mặt phẳng (P) không vuông góc với đáy của hình trụ, lần lượt cắt hai đáy theo đoạn giao tuyến AB và CD sao cho $ABCD$ là hình vuông. Tính diện tích S của hình vuông $ABCD$.

A. $S = 12\pi$.   **B.** $S = 12$.   **C.** $S = 20$.   **D.** $S = 20\pi$.

Hướng dẫn giải:

Kẻ đường sinh *BB'* của hình trụ. Đặt độ dài cạnh của hình vuông *ABCD* là *x*, *x > 0*.



C. Khi đó, *B'D* là đường kính

Do $\begin{cases} CD \perp BC \\ CD \perp BB' \end{cases} \Rightarrow CD \perp B'C \Rightarrow \Delta B'CD$ vuông tại

Tròn (O'). Xét $\Delta B'CD$ vuông tại C

$\Rightarrow B'D^2 = CD^2 + CB'^2 \Rightarrow 4r^2 = x^2 + CB^2$ (1)

Xét tam giác $\Delta BB'C$ vuông tại B

$\Rightarrow BC^2 = BB'^2 + CB'^2 \Rightarrow x^2 = h^2 + CB'^2$ (2)

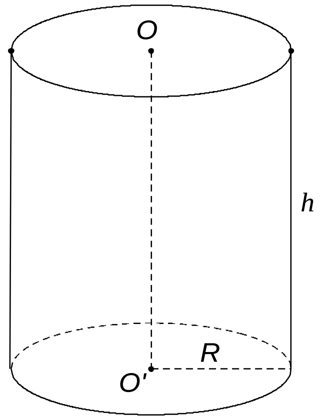
Từ (1) và (2) $\Rightarrow x^2 = \dfrac{4r^2 + h^2}{2} = 20$.

Suy ra diện tích hình vuông $ABCD$ là $S = 20$.

Câu 16: Một hình trụ có thể tích V không đổi. Tính mối quan hệ giữa bán kính đáy và chiều cao hình trụ sao cho diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $R = \dfrac{h}{2}$ **B.** $R = \dfrac{h}{3}$ **C.** $R = \dfrac{h}{5}$ **D.** $R = \dfrac{h}{4}$

Hướng dẫn giải:



Gọi R và h là bán kính đáy và chiều cao hình trụ.

Ta có: $V = \pi R^2 h$ (không đổi)

$S_{tp} = S_{xq} = 2S_{day} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \left(Rh + R^2\right)2\pi$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương,

Ta có: $\frac{Rh}{2} + \frac{Rh}{2} + R^2 \ge 3\sqrt[3]{\frac{Rh}{2}.\frac{Rh}{2}.R^2}$

$\Leftrightarrow Rh + R^2 \ge 3\sqrt[3]{\frac{R^4h^2}{4}} = 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2 4}}$

$\Leftrightarrow S_{tp} \ge 3(2\pi)\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2 4}}$ (hằng số)

Do đó: S toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{Rh}{2} = R^2 \Leftrightarrow R = \frac{h}{2}$.

Chọn A.

Câu 17: Trong số các khối trụ có thể tích bằng V, khối trụ có diện tích toàn phần bé nhất thì có bán kính đáy là

A. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. **B.** $R = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{V}}$ **C.** $R = \sqrt[3]{\frac{\pi}{V}}$ **D.** $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

Hướng dẫn giải:

$V = \pi R^2.h \Rightarrow l = h = \frac{V}{\pi R^2}$, $S_{TP} = S_{Xq} + 2S_d = 2\pi Rl + 2\pi R^2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$

Xét hàm số $f(R) = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$ với R>0, $f'(R) = \frac{-2V + 4\pi R^3}{R^2}$, $f'(R) = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Bảng biến thiên

R	0 $\qquad\qquad$ $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(R)$	$+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ -
$f(R)$	$+\infty$ $\searrow$ $\nearrow$ $+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy diện tích toàn phần nhỏ nhất khi $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Chọn A.

Câu 18: Trong số các hình trụ có diện tích toàn phần đều bằng S thì bán kính R và chiều cao h của khối trụ có thể tích lớn nhất là:

A. $R=\sqrt{\frac{S}{2\pi}};h=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$.

B. $R=\sqrt{\frac{S}{4\pi}};h=\sqrt{\frac{S}{4\pi}}$.

C. $R=\sqrt{\frac{2S}{3\pi}};h=4\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$.

D. $R=\sqrt{\frac{S}{6\pi}};h=2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi thể tích khối trụ là V, diện tích toàn phần của hình trụ là S.

Ta có: $S=S_{2day}+S_{xq}=2\pi R^2+2\pi Rh$. Từ đó suy ra:

$$\frac{S}{2\pi}=R^2+Rh\Leftrightarrow\frac{S}{2\pi}=R^2+\frac{V}{\pi R}=R^2+\frac{V}{2\pi R}+\frac{V}{2\pi R}\overset{Cauchy}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}$$

hay $27\frac{V^2}{4\pi^2}\leq\left(\frac{S}{2\pi}\right)^3\Leftrightarrow V\leq\sqrt{\frac{S^3}{54\pi}}$.

Vậy $V_{\max}=\sqrt{\frac{S^3}{54\pi}}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $R^2=\frac{V}{2\pi R}=\frac{\pi R^2h}{2\pi R}=\frac{Rh}{2}$ hay $h=2R$.

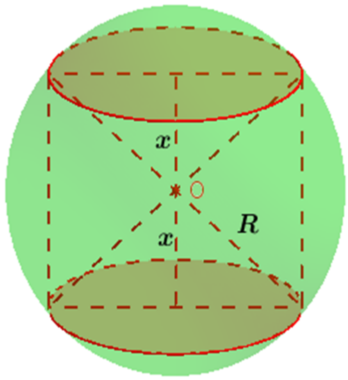
Khi đó $S=6\pi R^2\Rightarrow R=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ và $h=2R=2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Chọn D.

Câu 20: Chiều cao của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình cầu có bán kính R là

A. $R\sqrt{3}$. **B.** $\frac{R\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Giả sử $2x$ là chiều cao hình trụ $(0<x<R)$ (xem hình vẽ)

Bán kính của khối trụ là $r=\sqrt{R^2-x^2}$. Thể tích khối trụ là:

$V=\pi(R^2-x^2)2x$. Xét hàm số

$V(x)=\pi(R^2-x^2)2x,\ 0<x<R$

Ta có : $V'(x)=2\pi(R^2-3x^2)=0\Leftrightarrow x=\frac{R\sqrt{3}}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$		R
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

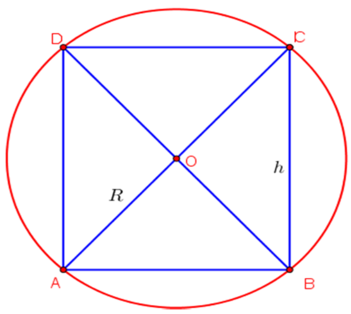
Dựa vào BBT, ta thấy thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao của khối trụ là $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$; $V_{\max} = \frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 22: Cho hình cầu tâm O, đường kính 2R và hình trụ tròn xoay nội tiếp trong hình cầu. Hãy tìm kích thước của hình trụ khi nó có thể tích đạt giá trị lớn nhất.

A. $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$ **B.** $r = \frac{2R}{3}$ **C.** $r = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ **D.** $r = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải:

1Gọi h và r là chiều cao và bán kính đáy của hình trụ. Bài toán quy về việc tính h và r phụ thuộc theo R khi hình chữ nhật ABCD nội tiếp trong hình tròn (O, R) thay đổi về $V = \pi r^2 h$ đạt giá trị lớn nhất



Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow 4R^2 = 4r^2 + h^2$

$V = \pi\left(R^2 - \frac{1}{4}h^2\right)h = \pi\left(-\frac{1}{4}h^3 + R^2h\right) \quad (0 < h < 2R)$

$V' = \pi\left(-\frac{3}{4}h^2 + R^2\right) \Leftrightarrow h = \pm\frac{2R}{\sqrt{3}}$

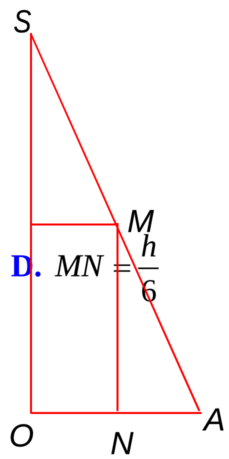
h	0		$\frac{2R}{\sqrt{3}}$		$2R$
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Vậy $V = V_{\max} = \frac{4}{9}\pi R^3\sqrt{3} \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

Lúc đó $r^2 = R^2 - \frac{1}{4}.\frac{4R^2}{3} = \frac{2R^2}{3} \Rightarrow r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$.

Chọn A.

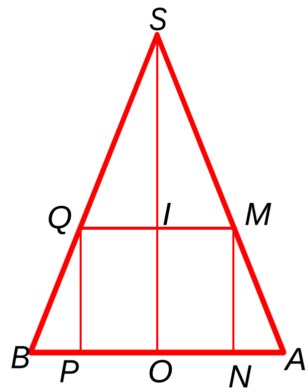
Câu 25: Cho hình vẽ bên. Tam giác SOA vuông tại O có $MN//SO$ với M, N lần lượt nằm trên cạnh SA, OA. Đặt $SO=h$ không đổi. Khi quay hình vẽ quanh SO thì tạo thành một hình trụ nội tiếp hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O bán kính $R=OA$. Tìm độ dài của MN để thể tích khối trụ là lớn nhất.



A. $MN=\dfrac{h}{2}$ **B.** $MN=\dfrac{h}{3}$ **C.** $MN=\dfrac{h}{4}$ **D.** $MN=\dfrac{h}{6}$

Hướng dẫn giải:

Ta thấy khi quay quanh trục SO sẽ tạo nên một khối trụ nằm trong khối chóp. Khi đó thiết diện qua trục của hình trụ là hình chữ nhật $MNPQ$. Ta có hình sau:



Ta có $SO=h$; $OA=R$. Khi đó đặt $OI=MN=x$.

Theo định lí Thales ta có $\dfrac{IM}{OA}=\dfrac{SI}{SO}\Rightarrow IM=\dfrac{OA.SI}{SO}=\dfrac{R.\left(h-x\right)}{h}$.

Thể tích khối trụ $V=\pi IM^2.IH=\dfrac{\pi R^2}{h^2}.x\left(h-x\right)^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2x\left(h-x\right)^2\le\left[\frac{2x+2\left(h-x\right)}{3}\right]^3$$

Vậy $V\le\dfrac{4\pi R^2h}{27}$. Dấu "=" xảy ra khi $x=\dfrac{h}{3}$. Hay $MN=\dfrac{h}{3}$.

Chọn B.

MẶT CẦU – KHỐI CẦU

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa mặt cầu

1) Định nghĩa: Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng cách R cho trước là mặt cầu tâm O và bán kính R. Kí hiệu $S\left(O;R\right)$.

Như vậy, khối cầu $S\left(O;R\right)$ là tập hợp các điểm M sao cho $OM \le R.$

2) Công thức tính diện tích mặt cầu, thể tích khối cầu

Gọi R là bán kính mặt cầu, ta có:

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.

- Thể tích khối cầu: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

3) Phương pháp tìm tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

Để tìm mặt cầu ngoại tiếp một hình chóp bất kì ta cần phải tìm được điểm I cách đều tất cả các đỉnh.

Bước 1: Dựng trục của đáy: là đường thẳng đi qua tâm của đáy và vuông góc với đáy.

Bước 2: Ta thường dựng trung trực của một cạnh bên nào đó cắt trục của đáy tại I, hoặc dựng trục của một mặt bên nào đó cắt trục của đáy tại I. Tâm mặt cầu chính là điểm I, ở bước 2 này phải tùy vào đề bài mà ta có cách xử lý cụ thể.

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp \left(ABC\right)$, $AB = 1$, $AC = 2$ và $\widehat{BAC} = 60°$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Tính bán kính R của mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, M, N.

A. $R = \sqrt{2}$.   **B.** $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.   **C.** $R = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.   **D.** $R = 1$.

Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông, cạnh 2a, tâm O, mặt bên (SAB) là tam giác đều và $\left(SAB\right) \perp \left(ABCD\right)$. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

A. $R = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$ **B.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là trung điểm H của cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC, R là bán kính mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng $\left(SAB\right)$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $R=d\left[G,\left(SAB\right)\right]$. **B.** $3\sqrt{13}R=2SH$. **C.** $\dfrac{R^2}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{39}$. **D.** $\dfrac{R}{a}=\sqrt{13}$.

Câu 4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ tạo với mặt đáy góc 60^0 và điểm G là trọng tâm tam giác ABC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $G.A'B'C'$ bằng:

A. $\dfrac{85a}{108}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $\dfrac{31a}{36}$.

Câu 5: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đường cao $SH=a$; góc SAB bằng 45 độ. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{a}{2}$ **B.** a **C.** $\dfrac{3a}{2}$ **D.** $2a$

Câu 6: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$; đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=a;\ AD=2a$; $SA=a$. Gọi E là trung điểm của AD. Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$.

A. $R=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$ **B.** $R=a\sqrt{7}$ **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$ **D.** $R=a\sqrt{11}$

Câu 7: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. Gọi h là chiều cao của khối chóp và R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp. Tỉ số $\dfrac{R}{h}$ bằng:

A. $\dfrac{7}{12}$ **B.** $\dfrac{7}{24}$. **C.** $\dfrac{7}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thang cân, đáy lớn $AD=2a$, $AB=BC=CD=a$. Cạnh bên $SA=2a$, và vuông góc với đáy. Gọi R bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\dfrac{R}{a}$ nhận giá trị nào sau đây?

A. $a\sqrt{2}$ **B.** a **C.** 1 **D.** $\sqrt{2}$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB=2a, AD=a.$ Cạnh bên SA vuông góc với đáy và góc giữa SC với đáy bằng 45^0. Gọi N là trung điểm SA, h là chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ và R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $N.ABC$. Biểu thức liên hệ giữa R và h là:

A. $4R=\sqrt{5}h$ **B.** $\sqrt{5}R=4h$ **C.** $R=\dfrac{4}{5\sqrt{5}}h$ **D.** $R=\dfrac{5\sqrt{5}}{4}h$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Đường thẳng SA vuông góc đáy $\left(ABCD\right)$. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng SB. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $HBCD$ có giá trị nào sau đây?

A. $a\sqrt{2}$ **B.** a **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{a}{2}$

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng cạnh đáy bằng a. Khi đó mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng:

A. $\dfrac{a\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$. **C.** $\dfrac{a\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}$. **D.** $\dfrac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C và $BC=a$. Mặt phẳng $\left(SAB\right)$ vuông góc với đáy, $SA=SB=a,\widehat{ASB}=120^0$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\dfrac{a}{4}$ **B.** $\dfrac{a}{2}$ **C.** a **D.** $2a$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Đường thẳng $SA=a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $\left(ABCD\right)$. Gọi M trung điểm SC, mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB,SD lần lượt tại E,F. Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S,A,E,M,F nhận giá trị nào sau đây?

A. $a\sqrt{2}$ **B.** a **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{a}{2}$

Câu 14: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$; tam giác ABC cân tại $A,AB=a$; $\widehat{BAC}=120°$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A lên SB,SC. Tính bán kính mặt cầu đi qua 5 điểm A,B,C,K,H.

A. $R=a\sqrt{3}$ **B.** $R=a$

C. $R=2a$ **D.** Không tồn tại mặt cầu như vậy

Câu 15: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB=AC=a,BC=\sqrt{3}a$. Cạnh bên $AA'=2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ bằng

A. a. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $\sqrt{5}a$. **D.** $\sqrt{3}a$.

Câu 16: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B,AC=a\sqrt{3},$ góc $\widehat{ACB}$ bằng 30^0. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng 60^0. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$ bằng:

A. $\dfrac{3a}{4}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{4}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{8}$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a,$ hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là trung điểm H của cạnh $BC.$ Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC, R là bán kính mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB). Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $R = d\left[G,(SAB)\right]$ **B.** $3\sqrt{13}R = 2SH$ **C.** $\frac{R^2}{S_{\Delta ABC}} = \frac{4\sqrt{3}}{39}$ **D.** $\frac{R}{a} = \sqrt{3}$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{6}$. Đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và $B, AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$. Gọi E là trung điểm AD. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$.

A. $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $R = a\sqrt{6}$ **C.** $R = \frac{\sqrt{114}}{6}a$ **D.** $R = \frac{a\sqrt{26}}{2}$

Câu 19: Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = 3a$, $AC = 4a$. Hình chiếu H của S trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Biết $SA = 2a$, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $R = a.\frac{\sqrt{118}}{4}$. **B.** $R = a.\frac{\sqrt{118}}{2}$. **C.** $R = a.\frac{\sqrt{118}}{8}$. **D.** $R = a.\sqrt{118}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AC = b$, $AB = c$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$ theo b, c, α.

A. $R = 2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$. **B.** $R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}}{\sin 2\alpha}$.

C. $R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$. **D.** $R = \frac{2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$, hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của cạnh huyền AC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $A\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a.

A. $S = 2\pi a^2$ **B.** $S = 8\pi a^2$ **C.** $S = 16\pi a^2$ **D.** $S = 12\pi a^2$

Câu 23: Cho khối chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B, biết $AB = 1; AC = \sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm BC, biết $SM \perp (ABC)$. Tổng diện tích các mặt cầu ngoại tiếp các tứ diện $SMAB$ vàb $SMAC$ bằng 15π. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\dfrac{21\pi}{4}$ **B.** 20π **C.** $\dfrac{25\pi}{4}$ **D.** 4π

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=a$, $AB=a$, $AC=2a$, $\widehat{BAC}=60^0$. Tính diện tích hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{5}{3}.\pi a^2$. **B.** $20\pi a^2$. **C.** $\dfrac{20}{3}\pi a^2$. **D.** $5\pi a^2$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, cạnh huyền $BC=6\,(cm)$, các cạnh bên cùng tạo với đáy một góc $60°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $48\pi cm^2$. **B.** $12\pi cm^2$. **C.** $16\pi cm^2$. **D.** $24cm^2$.

Câu 26: Cho hình chóp đều S.ABC có $AB=a$, $SB=2a$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là:

A. $S=\dfrac{3\pi a^2}{11}$ **B.** $S=\dfrac{3a^2}{11}$ **C.** $S=\dfrac{12\pi a^2}{11}$ **D.** $S=\dfrac{12a^2}{11}$

Câu 27: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và ABD là các tam giác đều cạnh a và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ theo a.

A. $\dfrac{5}{3}\pi a^2$ **B.** $\dfrac{11}{3}\pi a^2$ **C.** $2\pi a^2$ **D.** $\dfrac{4}{3}\pi a^2$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $SA=2a$, tam giác ABC cân tại $A, BC=2a\sqrt{2}$, $\cos\widehat{ACB}=\dfrac{1}{3}$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $S=\dfrac{97\pi a^2}{4}$. **B.** $S=\dfrac{97\pi a^2}{2}$. **C.** $S=\dfrac{97\pi a^2}{\sqrt{3}}$. **D.** $S=\dfrac{97\pi a^2}{5}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC=a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SB và SC. Thể tích của khối cầu tạo bởi mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ là:

A. $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ **B.** $\sqrt{2}\pi a^3$ **C.** $\dfrac{\pi a^3}{6}$ **D.** $\dfrac{\pi a^3}{2}$

Câu 30: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60^0. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{2\pi a^3\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\dfrac{8\pi a^3\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\dfrac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27}$.

Câu 31: Cho bát diện đều, tính tỷ số giữa thể tích khối cầu nội tiếp và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình bát diện đều đó.

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A. $V=\dfrac{32\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{64\sqrt{2}\pi}{3}$. **C.** $V=\dfrac{108\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{125\pi}{6}$.

Câu 33: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tập hợp các điểm M sao cho $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=2a^2$ là

A. Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

C. Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. Đường tròn có tâm là trọng tâm tam giác ABC và bán kính bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. **B.** $V=\dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. **D.** $V=\dfrac{5\pi}{3}$.

Câu 35: Cho mặt cầu (S) Có tâm I, bán kính $R=5$. Một đường thẳng Δ cắt (S) tại 2 điểm M, N phân biệt nhưng không đi qua I. Đặt $MN=2m$. Với giá trị nào của m thì diện tích tam giác IMN lớn nhất?

A. $m=\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **C.** $m=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Câu 36: Cho một mặt cầu bán kính bằng 1. Xét các hình chóp tam giác đều ngoại tiếp mặt cầu trên. Hỏi thể tích nhỏ nhất của chúng là bao nhiêu?

A. $\min V=8\sqrt{3}$. **B.** $\min V=4\sqrt{3}$. **C.** $\min V=9\sqrt{3}$. **D.** $\min V=16\sqrt{3}$.

Câu 37: Khi cắt mặt cầu $S(O,R)$ bởi một mặt kính, ta được hai nửa mặt cầu và hình tròn lớn của mặt kính đó gọi là mặt đáy của mỗi nửa mặt cầu. Một hình trụ gọi là nội tiếp nửa mặt cầu $S(O,R)$ nếu một đáy của hình trụ nằm trong đáy của nửa mặt cầu, còn đường tròn đáy kia là giao tuyến của hình trụ với nửa mặt cầu. Biết $R=1$, tính bán kính đáy r và chiều cao h của hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu $S(O,R)$ để khối trụ có thể tích lớn nhất.

A. $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ h=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $r=\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $r=\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $r=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

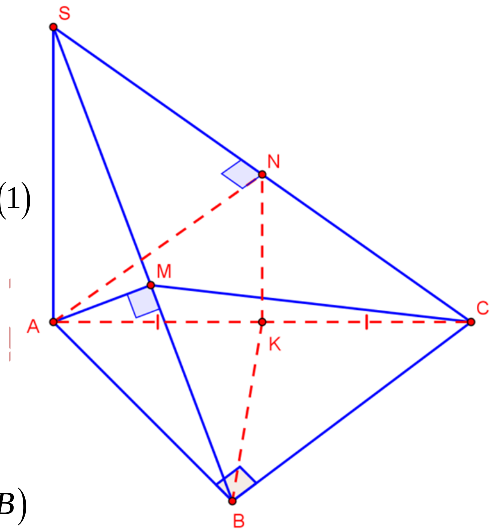
C – HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $AB=1$, $AC=2$ và $\widehat{BAC}=60°$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Tính bán kính R của mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, M, N.

A. $R=\sqrt{2}$.   **B.** $R=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.   **C.** $R=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.   **D.** $R=1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



*Gọi K là trung điểm của AC suy ra :
$AK=AB=KC=1$

*Lại có
$\widehat{BAC}=60°\Rightarrow\widehat{ABK}=60°;\widehat{KBC}=30°\Rightarrow\widehat{ABC}=90°\,(1)$

*Theo giả thiết $\widehat{ANC}=90°\,(2)$

* Chứng minh $\widehat{AMC}=90°\,(3)$

Thật vậy, ta có:

$BC\perp SA;BC\perp AB\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow(SBC)\perp(SAB)$

$AM\perp SB\Rightarrow AM\perp(SBC)\Rightarrow AM\perp MC$

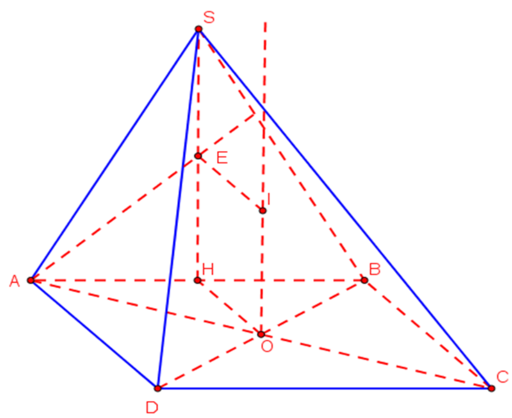
Từ $(1);(2);(3)$ suy ra các điểm A, B, C, M, N nội tiếp đường tròn tâm K, bán kính

$KA=KB=KC=KM=KN=\dfrac{1}{2}AC=1$.

Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông, cạnh 2a, tâm O, mặt bên (SAB) là tam giác đều và $(SAB)\perp(ABCD)$. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

A. $R=\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$ **B.** $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $R=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Hướng dẫn giải:



Qua O, kẻ $(\Delta_1)\perp(ABCD)$ thì (Δ_1)là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

Do $(SAB)\perp(ABCD)$ nên kẻ $SH\perp AB$ thì $SH\perp(ABCD)$

Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều SAB và kẻ $(\Delta_2)\perp(SAB)$ tại E thì (Δ_2) là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

(Δ_1) cắt (Δ_2) tại I: tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Tứ giác OHEI có 3 góc vuông O, H, E nên là hình chữ nhật (Δ_1)

$$SH=2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}\Rightarrow EH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Trong ΔAIO: $R=AI=\sqrt{OA^2+OI^2}=\sqrt{2a^2+\frac{3a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Chọn A.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC, R là bán kính mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB). Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $R=d\left[G,(SAB)\right]$. **B.** $3\sqrt{13}R=2SH$. **C.** $\frac{R^2}{S_{\Delta ABC}}=\frac{4\sqrt{3}}{39}$. **D.** $\frac{R}{a}=\sqrt{13}$.

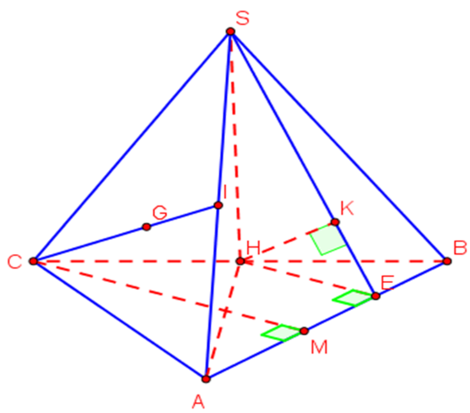
Hướng dẫn giải:

Ta có $60^0=\widehat{SA,(ABC)}=\widehat{SA,HA}=\widehat{SAH}$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SHA, ta có

$SH=AH.\tan\widehat{SAH}=\frac{3a}{2}$.



Vì mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với (SAB) nên bán kính mặt cầu $R=d\left[G,(SAB)\right]$.

Ta có

$$d\left[G,(SAB)\right]=\frac{1}{3}d\left[C,(SAB)\right]=\frac{2}{3}d\left[H,(SAB)\right].$$

Gọi M, E lần lượt là trung điểm AB và MB.

Suy ra $\begin{cases}CM\perp AB\\ CM=\frac{a\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ và $\begin{cases}HE\perp AB\\ HE=\frac{1}{2}CM=\frac{a\sqrt{3}}{4}\end{cases}$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SE, suy ra $HK\perp SE$. (1)

Ta có $\begin{cases} HE \perp AB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HK.\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $HK \perp (SAB)$ nên $d\left[H,(SAB)\right] = HK$.

Trong tam giác vuông SHE, ta có $HK = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{3a}{2\sqrt{13}}$.

Vậy $R = \dfrac{2}{3}HK = \dfrac{a}{\sqrt{13}}$.

Chọn D.

Câu 4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy góc 60^0 và điểm G là trọng tâm tam giác ABC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $G.A'B'C'$ bằng:

A. $\dfrac{85a}{108}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $\dfrac{31a}{36}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm $B'C'$, ta có

$60^0 = \widehat{(AB'C'),(A'B'C')} = \widehat{AM, A'M} = \widehat{AMA'}$.

Trong $\Delta AA'M$, có $A'M = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$AA' = A'M.\tan\widehat{AMA'} = \dfrac{3a}{2}$.

Gọi G' là trọng tâm tam giác đều $A'B'C'$, suy ra G' cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$.

Vì lặng trụ đứng nên $GG' \perp (A'B'C')$.

Do đó GG' là trục của tam giác $A'B'C'$.

Trong mặt phẳng $(GC'G')$, kẻ trung trực d của đoạn thẳng GC' cắt GG' tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $G.A'B'C'$, bán kính $R = GI$.

Ta có ΔGPI ÿ $\Delta GG'C' \Rightarrow \dfrac{GP}{GI} = \dfrac{GG'}{GC'}$

$\Rightarrow R = GI = \dfrac{GP.GC'}{GG'} = \dfrac{GC'^2}{2GG'} = \dfrac{GG'^2 + G'C'^2}{2GG'} = \dfrac{31a}{36}$.

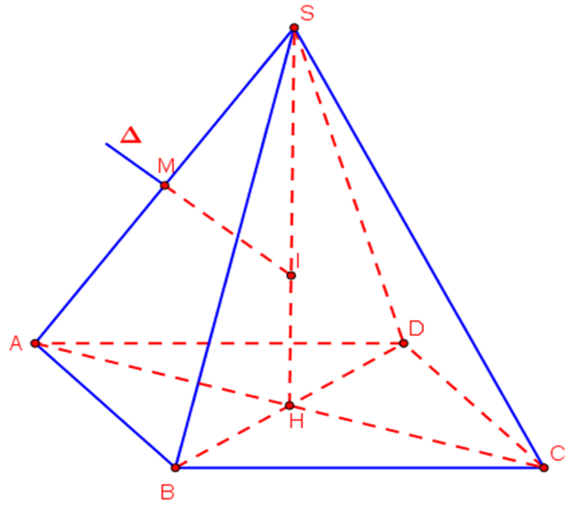
Chọn D.

Câu 5: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đường cao $SH = a$; góc SAB bằng 45 độ. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{a}{2}$ **B.** a **C.** $\dfrac{3a}{2}$ **D.** $2a$

Hướng dẫn giải:

Gọi I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chop S.ABCD



Khi đó $IA = IB = IC = ID = IS$ hay

$$\begin{cases} IA = IB = IC = ID(1) \\ IA = IS(2) \end{cases}$$

Gọi H là giao điểm của AC và BD. Từ (1) suy ra $I \in SH(*)$

Trong mặt phẳng (SAH) dựng đường thẳng Δ là trung trực của SA.

Từ (2), suy ra $I \in \Delta(2*)$

$(*) + (2*) \to SH \cap \Delta = \{I\}$

Gọi M là trung điểm của SA, khi đó:

$\dfrac{SI}{SA} = \dfrac{SM}{SH} \to R = SI = \dfrac{SM.SA}{SH} = \dfrac{SA.SA.}{2SH} = \dfrac{SA^2}{2SH}$.Do SAB cân tại S và có $\angle SAB = 45^0$ nên SAB vuông cân tại S. Đặt $SA = x$, khi đó $AB = x\sqrt{2}; HA = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \dfrac{x\sqrt{6}}{3}$

Trong tam giác vuông SHA có:

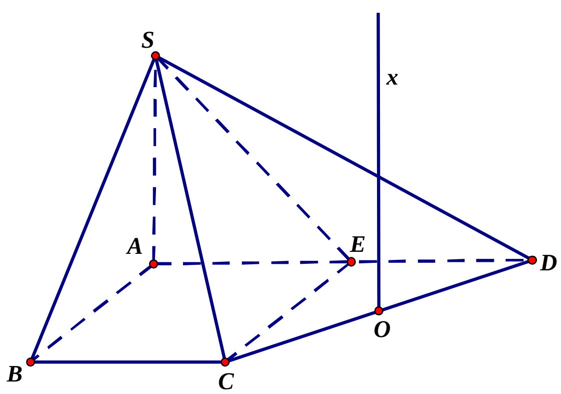
$SA^2 - HA^2 = SH^2 \leftrightarrow x^2 - \dfrac{6x^2}{9} = a^2 \leftrightarrow x^2 = 3a^2 \to R = \dfrac{3a^2}{2a} = \dfrac{3a}{2}$

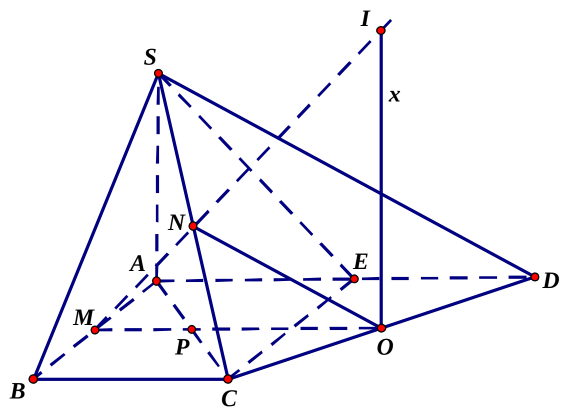
Chọn C.

Câu 6: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$; đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$; $AD = 2a$; $SA = a$. Gọi E là trung điểm của AD. Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$.

A. $R = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$ **B.** $R = a\sqrt{7}$ **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$ **D.** $R = a\sqrt{11}$

Hướng dẫn giải:





Gọi O là trung điểm của CD.

Kẻ tia $Ox \parallel SA$ thì $Ox \perp (ABCD)$.

Ta có: O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông CDE và $Ox \perp (ABCD)$, nên Ox là trục của đường tròn (CDE).

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC.

Ta có: $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ nên suy ra $SM = MC$.

Do đó tam giác SMC cân tại M, suy ra $MN \perp SC$.

Dễ thấy $(MNO)//(SAD)$ và $CE \perp (SAD)$ nên suy ra $CE \perp (MNO)$ và do đó $CE \perp MN$.

Vậy nên $MN \perp (SEC)$, do đó MN là trục của đường tròn (SEC).

Gọi I là giao điểm của MN và SO thì I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$ là $R = \sqrt{IC} = \sqrt{IO^2 + OC^2}$.

Trong đó $OC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ và $IO = 3NP = 3.\dfrac{SA}{2} = \dfrac{3a}{2}$ (P là giao điểm của MO và AC).

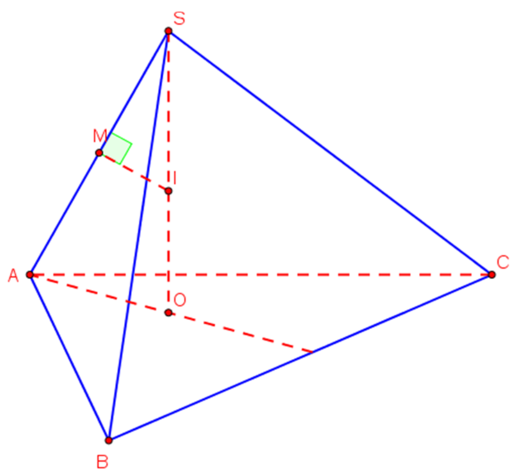
Vậy thì $R = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Chọn C.

Câu 7: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. Gọi h là chiều cao của khối chóp và R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp. Tỉ số $\dfrac{R}{h}$ bằng:

A. $\dfrac{7}{12}$ **B.** $\dfrac{7}{24}$. **C.** $\dfrac{7}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi O là tâm ΔABC, suy ra $SO \perp (ABC)$ và $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong SOA, ta có $h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{a}{2}$.

Trong mặt phẳng SOA, kẻ trung trực d của đoạn SA cắt SO tại I, suy ra

• $I \in d$ nên $IS = IA$.

• $I \in SO$ nên $IA = IB = IC$.

Do đó $IA = IB = IC = IS$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Gọi M là tung điểm SA, ta có ΔSMI ÿ ΔSOA nên

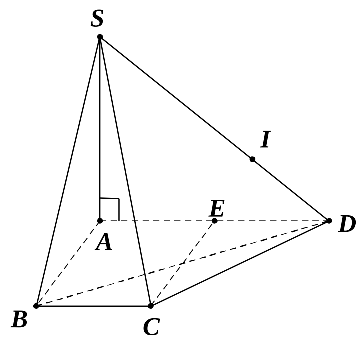
$R = SI = \dfrac{SM.SA}{SO} = \dfrac{SA^2}{2SO} = \dfrac{7a}{12}$. Vậy $\dfrac{R}{h} = \dfrac{7}{6}$.

Chọn C.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thang cân, đáy lớn $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$. Cạnh bên $SA = 2a$, và vuông góc với đáy. Gọi R bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\dfrac{R}{a}$ nhận giá trị nào sau đây?

A. $a\sqrt{2}$ **B.** a **C.** 1 **D.** $\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:



Ta có $SA \perp AD$ hay $\widehat{SAD} = 90^0$.

Gọi E là trung điểm AD.

Ta có $EA = AB = BC$. Nên ABCE là hình thoi. Suy ra $CE = EA = \dfrac{1}{2}AD$.

Do đó tam giác ACD vuông tại **C.**

Ta có:

$$\begin{cases} DC \perp AC \\ DC \perp SA \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow DC \perp SC$$

hay $\widehat{SCD} = 90^0$.

Tương tự, ta cũng có $SB \perp BD$ hay $\widehat{SAD} = 90^0$.

Ta có $\widehat{SAD} = \widehat{SCD} = \widehat{SBD} = 90^0$ nên khối chóp $S.ABCD$ nhận trung điểm I của SD làm tâm mặt cầu ngoại tiếp, bán kính $R = \dfrac{SD}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AD^2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Suy ra $\dfrac{R}{a} = \sqrt{2}$.

Chọn D.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = 2a, AD = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và góc giữa SC với đáy bằng 45^0. Gọi N là trung điểm SA, h là chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ và R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $N.ABC$. Biểu thức liên hệ giữa R và h là:

A. $4R = \sqrt{5}h$ **B.** $\sqrt{5}R = 4h$ **C.** $R = \dfrac{4}{5\sqrt{5}}h$ **D.** $R = \dfrac{5\sqrt{5}}{4}h$

Hướng dẫn giải:

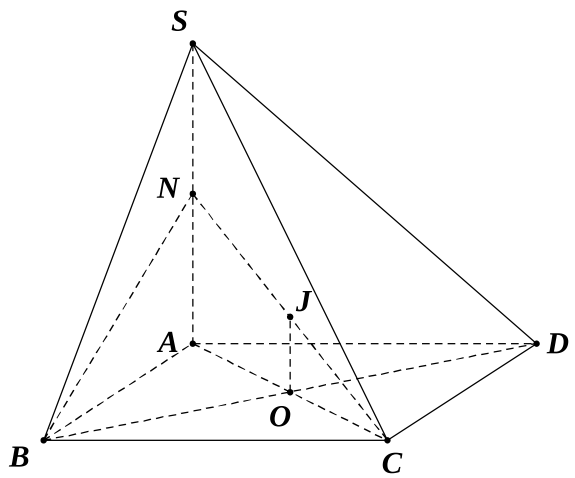
Ta có $45^0 = \widehat{\left(SC,\left(ABCD\right)\right)} = \widehat{\left(SC,AC\right)} = \widehat{SCA}.$

Trong $\Delta SAC,$ ta có $h = SA = a\sqrt{5}$

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(SAB\right) \Rightarrow BN \perp BC.$

Lại có $NA \perp AC.$ Do đó, hai điểm A, B cùng nhìn đoạn NC dưới một góc vuông nên hình chóp $N.ABC$ nội tiếp mặt cầu tâm J là trung điểm NC, bán kính:

$$R = IN = \frac{NC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2} = \frac{5a}{4}.$$



Chọn A.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Đường thẳng SA vuông góc đáy $\left(ABCD\right)$. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng SB. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $HBCD$ có giá trị nào sau đây?

A. $a\sqrt{2}$ **B.** a **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a}{2}$

Hướng dẫn giải:

Gọi $O = AC \cap BD.$

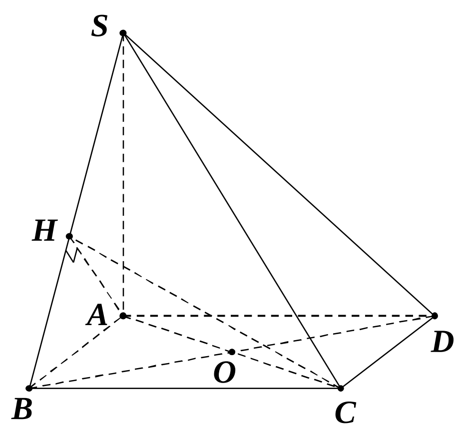
Vì $ABCD$ là hình vuông nên $OB = OD = OC$ $\left(1\right)$

Ta có

$\begin{cases} CB \perp BA \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp \left(SBA\right) \Rightarrow CB \perp AH.$

Lại có $AH \perp SB.$ Suy ra $AH \perp \left(SBC\right) \Rightarrow AH \perp HC$ nên tam giác AHC vuông tại H

và có O là trung điểm cạnh huyền AC nên suy ra $OH = OC$ $\left(2\right)$



Từ $\left(1\right),\left(2\right) \Rightarrow R = OH = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Chọn C.

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng cạnh đáy bằng a. Khi đó mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng:

A. $\frac{a\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}}.$ **B.** $\frac{a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}.$ **C.** $\frac{a\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}.$ **D.** $\frac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}}.$

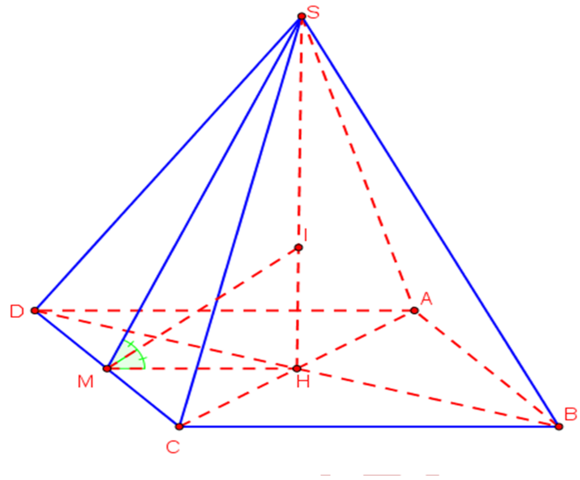
Hướng dẫn giải:

Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có SH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy.

Gọi M là trung điểm của CD và I là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{SMH}$ $(I \in SH)$.

Suy ra I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp, bán kính $r = IH$.



Ta có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

$SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $MH = \dfrac{a}{2}$.

Dựa vào tính chất của đường phân giác ta có:

$$\frac{IS}{IH} = \frac{MS}{MH} \Rightarrow \frac{SH}{IH} = \frac{MS + MH}{MH} \Rightarrow IH = \frac{SH.MH}{MS + MH} = \frac{a}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{a\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{4}.$$

Chọn B.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C và $BC = a$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy, $SA = SB = a, \widehat{\mathrm{ASB}} = 120^0$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

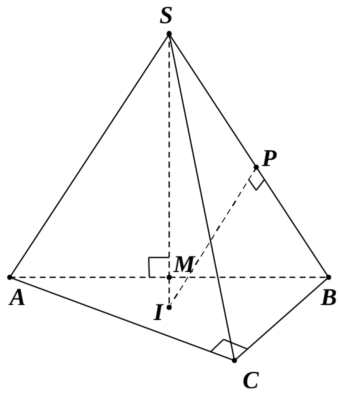
A. $\dfrac{a}{4}$ **B.** $\dfrac{a}{2}$ **C.** a **D.** $2a$

Hướng dẫn giải:

Gọi M trung điểm AB, suy ra $SM \perp AB$ và $SM \perp (ABC)$.

Do đó, SM là trục của tam giác ABC.

Trong mặt phẳng (SBM), kẻ đường trung trực d của đoạn SB cắt SM tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính $R = SI$.



Ta có: $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos\widehat{\mathrm{ASB}}} = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông SMB ta có

$SM = SB.\cos\widehat{MSB} = a.\cos 60^0 = \dfrac{a}{2}$

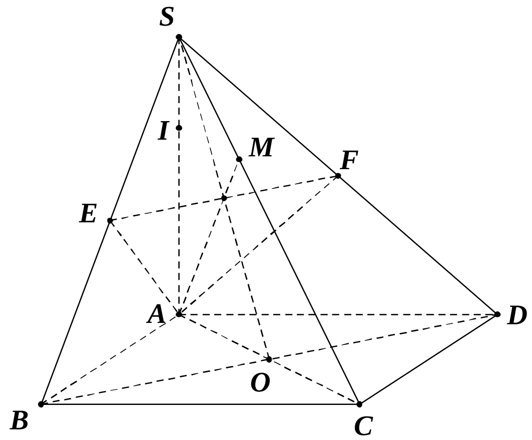
Ta có $\Delta SPI \sim \Delta SMB$. Suy ra $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SP}{SI} \Rightarrow R = SI = \dfrac{SB.SP}{SM} = a.$

Chọn C.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Đường thẳng $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M trung điểm SC, mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F. Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

A. $a\sqrt{2}$ **B.** a **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{a}{2}$

Hướng dẫn giải:



Mặt phẳng (α) song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F nên EF$//BD.\Delta SAC$ cân tại A, trung tuyến AM nên $AM \perp SC \quad (1)$

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$

Do đó EF $\perp SC \quad (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AE \quad (*)$.

Lại có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \quad (**)$

Từ $(*),(**)$ suy ra $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SB.$

Tương tự ta cũng có AF $\perp SD$. Do đó $\widehat{SEA} = \widehat{SMA} = \widehat{SFA} = 90^0$ nên 5 điểm S, A, E, M, F cùng thuộc mặt cầu tâm I là trung điểm của SA, bán kính $R = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 14: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$; tam giác ABC cân tại $A, AB = a$; $\widehat{BAC} = 120°$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Tính bán kính mặt cầu đi qua 5 điểm A, B, C, K, H.

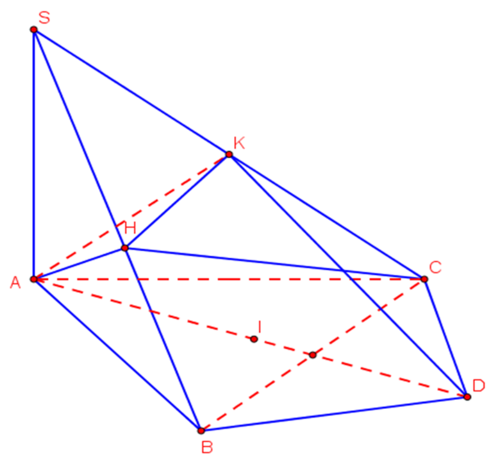
A. $R = a\sqrt{3}$ **B.** $R = a$

C. $R = 2a$ **D.** Không tồn tại mặt cầu như vậy

Hướng dẫn giải:

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và AD là một đường kính của đường tròn (I).

Tam giác ACD vuông tại C, suy ra: $DC \perp AC$ mà $DC \perp SA$ nên $DC \perp (SAC)$.



Ta lại có: $\begin{cases} AK \perp KC \\ AK \perp DC (do\, DC \perp (KCD)) \end{cases} \Rightarrow AK \perp KC$.

Suy ra tam giác AKD vuông tại K, suy ra: $IA = ID = IK$.

Tương tự như trên ta cũng có: $IA = ID = IH$.

Vậy thì $IA = IB = IC = IK = IH$,

do đó 5 điểm A, B, C, K, H cùng nằm trên một mặt cầu(đpcm).

Bán kính R của mặt cầu cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Áp dụng định lý *cos* ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^\circ} = a\sqrt{3}$.

Áp dụng định lý *sin* ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = a$.

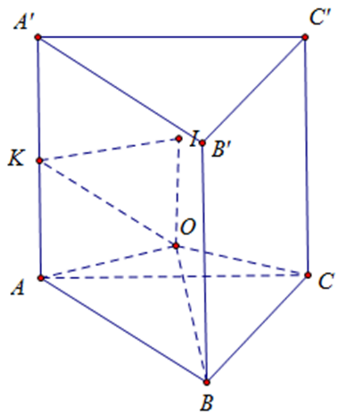
Chọn B.

Câu 15: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a, BC = \sqrt{3}a$. Cạnh bên $AA' = 2a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ bằng

A. a.　　**B.** $\sqrt{2}a$.　　**C.** $\sqrt{5}a$.　　**D.** $\sqrt{3}a$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Dễ thấy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$ cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối lăng trụ đứng đã cho.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đường thẳng qua O vuông góc với (ABC) cắt mặt phẳng trung trực của AA' tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Mặt khác $\cos\widehat{A} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = \dfrac{1}{2}$

Ta có: $R_{ABC} = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sin 120^0} = a$ do đó $R = IA = \sqrt{OI^2 + OA^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Câu 16: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AC = a\sqrt{3}$, góc $\widehat{ACB}$ bằng 30^0. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$ bằng:

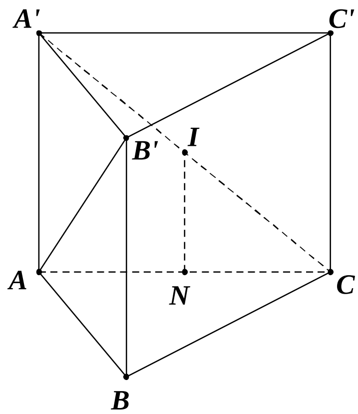
A. $\dfrac{3a}{4}$　　**B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{4}$　　**C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{2}$　　**D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{8}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $60^0 = \widehat{\left(AB',(ABC)\right)} = \widehat{\left(AB',AB\right)} = \widehat{B'AB}.$

Trong tam giác ABC, ta có $AB = AC.\sin\widehat{ACB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong $\Delta B'BA,$ ta có $BB' = AB.\tan\widehat{B'AB} = \dfrac{3a}{2}$.



Gọi N là trung điểm AC,
suy ra N là tâm đường tròn
ngoại tiếp $\Delta ABC.$
Gọi I là trung điểm $A'C,$
suy ra $IN//A'A \Rightarrow IN \perp (ABC).$
Do đó IN là trục của ΔABC,
suy ra $IA = IB = IC \quad (1)$
Hơn nữa, tam giác $A'AC$ vuông tại A có I là trung điểm A'C
nên $IA' = IB' = IC' \; (2)$

Từ $(1),(2)$, ta có $IA' = IA = IB = IC$ hay I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A'.ABC$

với bán kính $R = IA' = \dfrac{A'C}{2} = \dfrac{\sqrt{AA'^2 + AC^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{4}.$

Chọn B.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a,$ hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh $BC.$ Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC, R là bán kính mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB). Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $R = d\left[G,(SAB)\right]$ **B.** $3\sqrt{13}R = 2SH$ **C.** $\dfrac{R^2}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{39}$ **D.** $\dfrac{R}{a} = \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Ta có $60^0 = \widehat{\left(SA,(ABC)\right)} = \widehat{\left(SA,HA\right)} = \widehat{SAH}.$

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

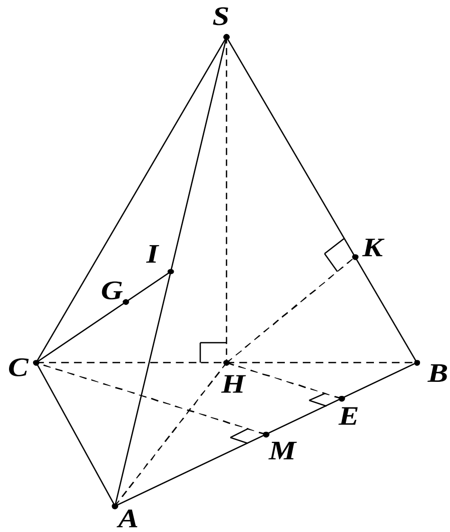
Trong tam giác vuông SHA, ta có

$SH = AH.\tan\widehat{SAH} = \dfrac{3a}{2}.$

Vì mặt cầu có tâm G và tiếp xúc với (SAB) nên bán kính mặt cầu $R = d\left[G,(SAB)\right]$

Ta có $d\left[G,(SAB)\right]=\frac{1}{3}d\left[C,(SAB)\right]=\frac{2}{3}d\left[H,(SAB)\right]$. Gọi M, E lần lượt là trung điểm AB, MB.

Suy ra $\begin{cases} CM\perp AB \\ CM=\frac{a\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ và $\begin{cases} HE\perp AB \\ HE=\frac{1}{2}CM=\frac{a\sqrt{3}}{4}\end{cases}$



Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên SE, suy ra $HK\perp SE\ (1)$

Ta có

$\begin{cases} HE\perp AB \\ AB\perp SH\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SHE)\Rightarrow AB\perp HK\ (2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow HK\perp(SAB), d\left[H,(SAB)\right]=HK$.

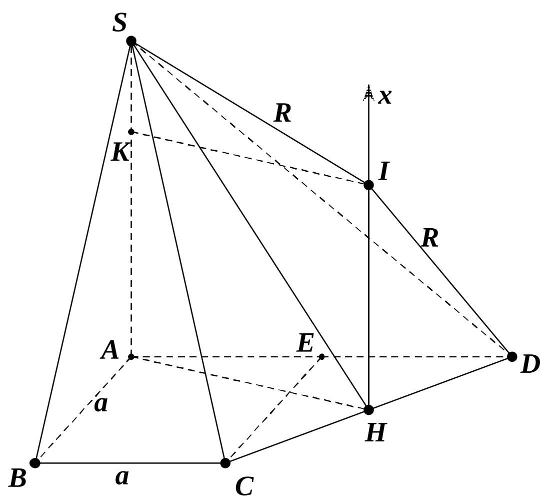
Trong tam giác vuông SHE, ta có $HK=\frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\frac{3a}{2\sqrt{13}}$. Vậy $R=\frac{2}{3}HK=\frac{a}{\sqrt{13}}$.

Chọn D.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{6}$. Đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và $B, AB=BC=\frac{1}{2}AD=a$. Gọi E là trung điểm AD. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD$.

A. $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $R=a\sqrt{6}$ **C.** $R=\frac{\sqrt{114}}{6}a$ **D.** $R=\frac{a\sqrt{26}}{2}$

Hướng dẫn giải:



Gọi H là trung điểm của CD và d là đường thẳng đi qua H và vuông góc với đáy. Gọi I và R là tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.CDE$. Suy ra I thuộc **D.** Đặt $IH=x$. Trong mp $(ASIH)$ kẻ đường thẳng đi qua I và song song với AH cắt AS tại K.

Ta có: $ID^2=IH^2+HD^2=x^2+\frac{a^2}{2}$.

$IS^2=IK^2+KS^2=AH^2+KS^2$

$=AC^2+CH^2+KS^2=2a^2+\frac{a^2}{2}+\left(a\sqrt{6}-x\right)^2$

Suy ra: $x^2+\dfrac{a^2}{2}=2a^2+\dfrac{a^2}{2}+\left(a\sqrt{6}-x\right)^2 \Leftrightarrow x=\dfrac{2\sqrt{6}a}{3}$.

Vậy bán kính mặt cầu bằng $R=\dfrac{\sqrt{114}a}{6}$.

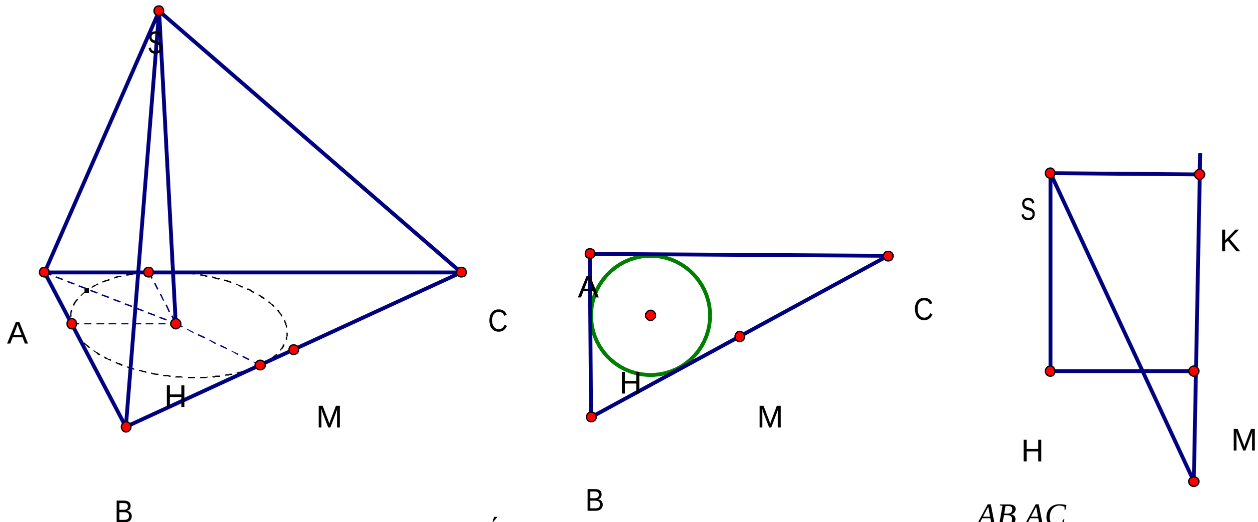
Chọn C.

Câu 19: Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB=3a$, $AC=4a$. Hình chiếu H của S trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Biết $SA=2a$, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $R=a.\dfrac{\sqrt{118}}{4}$. **B.** $R=a.\dfrac{\sqrt{118}}{2}$. **C.** $R=a.\dfrac{\sqrt{118}}{8}$. **D.** $R=a.\sqrt{118}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính được $r=\dfrac{AB.AC}{AB+AC+BC}=a$.

Tính được $AH=a\sqrt{2}$ và $MH=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác SAH vuông tại H suy ra $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=a\sqrt{2}$.

Gọi M là trung điểm của BC và Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$. Suy ra $O\in\Delta$.

Ta có:

$OC^2=OS^2 \Leftrightarrow OM^2+MC^2=SK^2+OK^2$.

$\Leftrightarrow OM^2+\dfrac{25a^2}{4}=\dfrac{5a^2}{4}+(OM+a\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow OM=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a$

Suy ra $R=OC=\dfrac{\sqrt{118}}{4}a$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $AC=b$, $AB=c$, $\widehat{BAC}=\alpha$. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$ theo b, c, α.

A. $R=2\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$.

B. $R=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}{\sin 2\alpha}$.

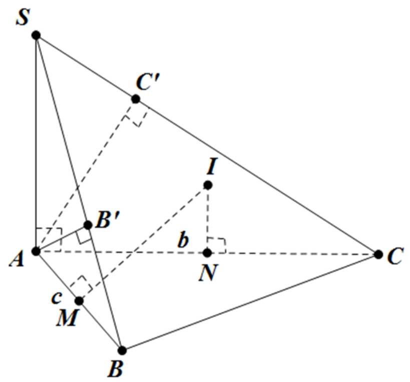
C. $R=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

D. $R=\dfrac{2\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC.



Tam giác ABB' vuông tại B' nên M chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABB', suy ra trục tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABB' chính là đường trung trực Δ của AB (xét trong mp (ABC)).

Tam giác ACC' vuông tại C' nên N chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACC', suy ra trục tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACC' chính là đường trung trực Δ_1 của AC (xét trong mp (ABC)).

Gọi $I=\Delta\cap\Delta_1$ thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và I cách đều các điểm A, B, C, B', C' nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $ABCB'C'$.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp $ABCB'C'$ thì R chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có $R=\dfrac{AB.AC.BC}{4.S_{\Delta ABC}}=\dfrac{c.b.BC}{4.\frac{1}{2}bc.\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2-2bc.\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

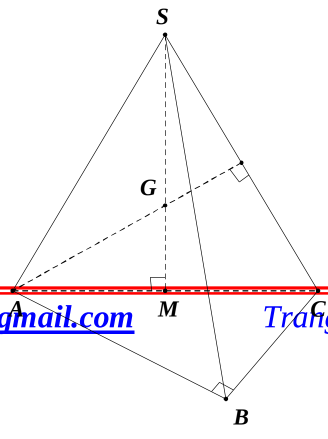
Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB=a$. Cạnh bên $SA=a\sqrt{2}$, hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của cạnh huyền AC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

Hướng dẫn giải:

Gọi M trung điểm AC, suy ra $SM\perp(ABC)\Rightarrow SM\perp AC$

Tam giác SAC có SM là đường cao và cũng là trung tuyến nên tam giác SAC cân tại S.



Ta có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{2}$, suy ra tam giác SAC đều.

Gọi G trọng tâm tam giác SAC, suy ra $GS=GA=GC \quad (1)$

Tam giác ABC vuông tại B, có M là trung điểm cạnh huyền AC nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lại có $SM\perp(ABC)$ nên SM là trục của tam giác ABC.

Mà G thuộc SM nên suy ra $GA=GB=GC \quad (2)$

Từ $(1),(2)$, suy ra $GS=GA=GB=GC$ hay G là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Bán kính mặt cầu $R=GS=\frac{2}{3}SM=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

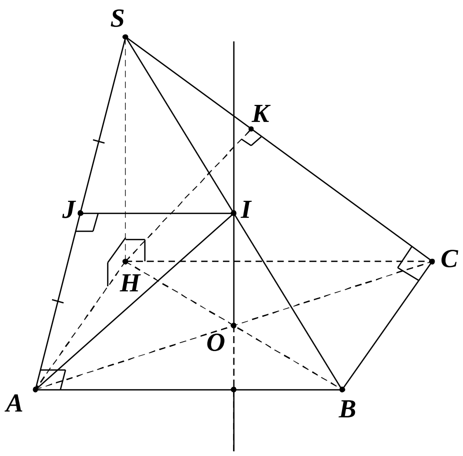
Chọn B.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=BC=a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $A\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a.

A. $S=2\pi a^2$ **B.** $S=8\pi a^2$ **C.** $S=16\pi a^2$ **D.** $S=12\pi a^2$

Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC)



Ta có $\begin{cases} BC\perp SC \\ SH\perp BC \end{cases} \Rightarrow HC\perp BC$

Tương tự, $AH\perp AB$

Và ΔABC vuông cân tại B nên ABCH là hình vuông.

Gọi $O=AC\cap BH, O$ là tâm hình vuông.

Dựng một đường thẳng d qua O vuông góc với $(ABCH)$, dựng mặt phẳng trung trực của SA qua trung điểm J cắt d tại I, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Ta hoàn toàn có $IJ\perp SA \Rightarrow IJ//AB \Rightarrow I$ là trung điểm SB, hay $I=d\cap SC$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $r_{S.SBC}=AI=\sqrt{IJ^2+JA^2}$; $IJ=\frac{AB}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do $AH//(SBC)\Rightarrow d(A,(SBC))=d(H,(SBC))=HK$

(K là hình chiếu của H lên SC và $BC\perp(SHC) \Rightarrow HK\perp(SBC)$)

$\Rightarrow HK=a\sqrt{2}$ tam giác SHC vuông tại $H \Rightarrow SH=a\sqrt{6}$

Tam giác SHA vuông tại $H \Rightarrow SA = 3a$

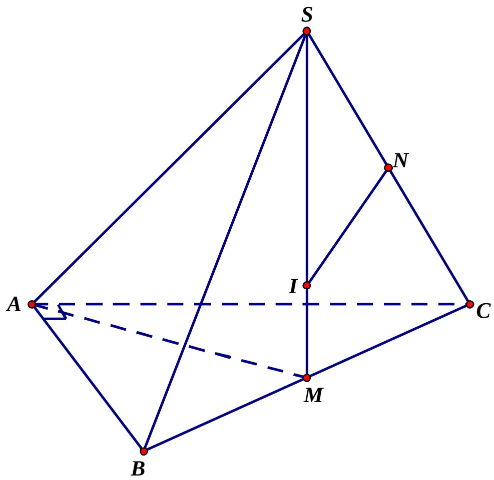
$$JA = \frac{SA}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow r_{S.ABC} = AI = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{mc} = 4\pi r^2 = 12\pi a^2.$$

Chọn D.

Câu 23: Cho khối chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B, biết $AB = 1; AC = \sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm BC, biết $SM \perp (ABC)$. Tổng diện tích các mặt cầu ngoại tiếp các tứ diện $SMAB$ vàb $SMAC$ bằng 15π. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{21\pi}{4}$ **B.** 20π **C.** $\frac{25\pi}{4}$ **D.** 4π

Hướng dẫn giải:



Dễ kiểm tra được $BC = 2a$ và tam giác MAB đều cạnh a. Đặt $SM = h$.

Gọi R_1, R_2 và R lần lượt là bán kính các mặt cầu ngoại tiếp của các hình $SMAB$, $SMAC$ và $S.ABC$.

Gọi r_1, r_2 và r lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác MAB, MAC và ABC.

Ta có: $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $r_2 = \frac{AC}{2.\sin 120^\circ} = 1$.

Vì $SA \perp (MAB)$, $SA \perp (MAC)$ nên dễ kiểm tra được:

$$R_1^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r_1^2 = \frac{h^2}{4} + \frac{3}{4} \text{ và } R_2^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r_2^2 = \frac{h^2}{4} + 1.$$

Theo giả thiết tổng diện tích các mặt cầu thì: $4\pi\left(R_1^2 + R_2^2\right) = 15\pi$

Suy ra: $\frac{h^2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{h^2}{4} + 1 = \frac{15}{4}$. Từ đây tìm được $h = 2$.

Dựng trung trực của SC, cắt SM tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của $S.ABC$.

Dễ kiểm tra $SI.SM = SN.SC$, suy ra $R = SI = \frac{SN.SC}{SM} = \frac{5}{4}$.

Vậy thì diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25\pi}{4}$.

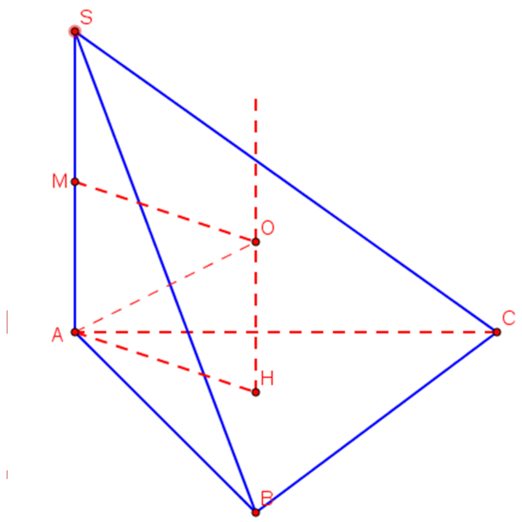
Chọn C.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=a$, $AB=a$, $AC=2a$, $\widehat{BAC}=60^0$. Tính diện tích hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{5}{3}.\pi a^2$. **B.** $20\pi a^2$. **C.** $\frac{20}{3}\pi a^2$. **D.** $5\pi a^2$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, d là đường thẳng đi qua H và vuông góc với mặt phẳng (ABC), gọi (α) là mặt phẳng trung trực của SA, O là giao điểm của d và (α). Khi đó O là tâm của hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.



Theo định lí hàm số cosin ta có :

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.\text{AC}.\cos\widehat{BAC}}$$
$$=\sqrt{a^2+(2a)^2-2a.2a.\cos 60^0}=a\sqrt{3}$$

Diện tích tam giác ABC:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.\text{AB.AC}.\sin\widehat{BAC}=\frac{a^2.\sqrt{3}}{2}$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC:

$$AH=\frac{AB.BC.AC}{4.S_{\Delta ABC}}=\frac{a.2a.\text{a}\sqrt{3}}{4.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}=a$$

Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$:

$$R=OA=\sqrt{AH^2+OH^2}=\sqrt{(a)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Diện tích hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

$$S=4\pi R^2=4\pi.\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2=5\pi a^2$$

Chọn D.

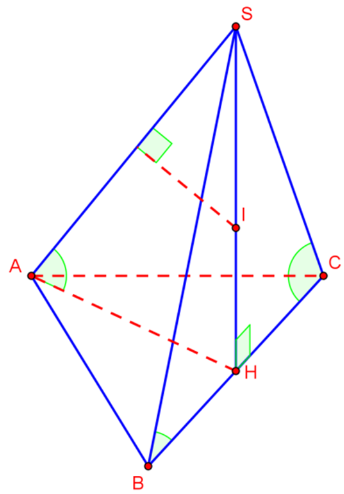
Câu 25: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, cạnh huyền $BC=6\ (cm)$, các cạnh bên cùng tạo với đáy một góc $60°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $48\pi cm^2$. **B.** $12\pi cm^2$. **C.** $16\pi cm^2$. **D.** $24cm^2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC). Gọi O là trung điểm của BC.



Tam giác ABC vuông tại A, O là trung điểm của cạnh huyền BC, suy ra $OA = OB = OC$ (1).

Xét các tam giác $\Delta SHA,\ \Delta SHB,\ \Delta SHC$ có:

$$\begin{cases} SH\ chung \\ \widehat{SHA} = \widehat{SHB} = \widehat{SHC} = 90^\circ \\ \widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH} = 60^\circ \end{cases}.$$

$\Rightarrow \Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC\,(g.c.g) \Rightarrow HA = HB = HC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra H trùng O. Khi đó SH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Trong ΔSAH dựng trung trực của SA cắt SH tại I.

Khi đó $IA = IB = IC = IS$. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

ΔSBC đều cạnh bằng $6\,(cm)$ $\Rightarrow SO = 3\sqrt{3} \Rightarrow SI = \dfrac{2}{3}.SO = \dfrac{2}{3}.3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $S = 4\pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 48\pi\left(cm^2\right)$.

Câu 26: Cho hình chóp đều S.ABC có $AB = a$, $SB = 2a$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là:

A. $S = \dfrac{3\pi a^2}{11}$ **B.** $S = \dfrac{3a^2}{11}$ **C.** $S = \dfrac{12\pi a^2}{11}$ **D.** $S = \dfrac{12a^2}{11}$

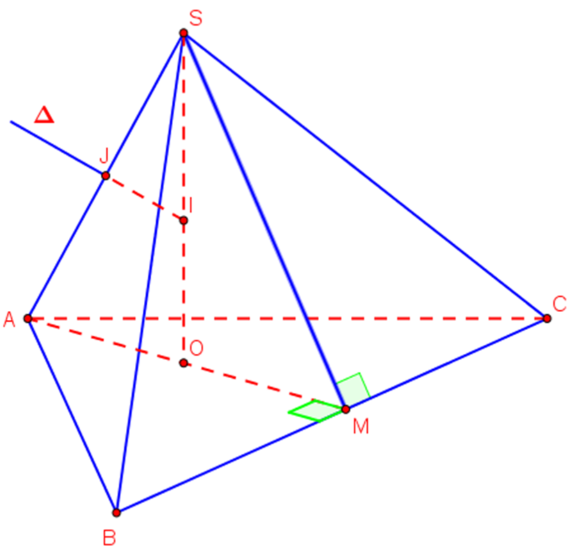
Hướng dẫn giải:

1) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

□ Xác định tâm mặt cầu

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC,

do $S.ABC$ là hình chóp đều nên SO là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Trong tam giác SOA dựng đường trung trực Δ của cạnh bên SA, Δ cắt SO tại I và cắt SA tại trung điểm J.



Ta có:

$$\begin{cases} I \in SO \Rightarrow IA = IB = IC \\ I \in \Delta \Rightarrow IA = IS \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = IS$$

Vậy I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

□ Tính bán kính mặt cầu

Gọi $M = AO \cap BC$ thì M là trung điểm của BC.

Ta có: $AM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông SOA ta có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{3a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{33}}{3}$

Xét hai tam giác vuông đồng dạng SJI và SOA ta có:

$$\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SO} \Rightarrow R = SI = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{4a^2}{2.\dfrac{a\sqrt{33}}{3}} = \frac{2a\sqrt{33}}{11}$$

2) Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

Diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{2a\sqrt{33}}{11}\right)^2 = \dfrac{12\pi a^2}{11}$.

Câu 27: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và ABD là các tam giác đều cạnh a và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ theo a.

A. $\dfrac{5}{3}\pi a^2$ **B.** $\dfrac{11}{3}\pi a^2$ **C.** $2\pi a^2$ **D.** $\dfrac{4}{3}\pi a^2$

Hướng dẫn giải:

Gọi M là Trung điểm của AB

Vì Tam giác ADB và tam giác ABC là tam giác đều $\to DM \perp AB; CM \perp AB$

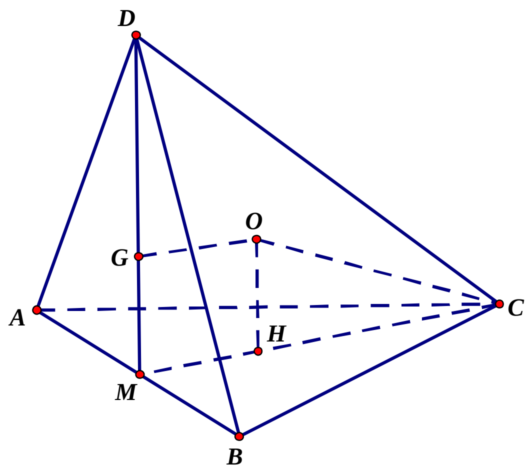
Do có ABC và ABD là các tam giác đều cạnh a và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau => Góc $\widehat{DMC} = 90^0$

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp Tam giác ABC

G là tâm đường tròn ngoại tiếp Tam giác ABD

=> H,G đồng thời là trọng tâm của tam giác ABC và ABD

$$\Rightarrow \begin{cases} H \in CM; CH = \dfrac{2}{3}CM \\ G \in DM; DG = \dfrac{2}{3}DM \end{cases}$$



Kẻ Đường vuông góc với đáy (ABC) từ H và Đường vuông góc với (ABD) từ G.

Do hai đường vuông góc này đều thuộc (DMC) nên chúng cắt nhau tại O.

=> O chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCG và $R = OC$.

Tam giác ABC đều $\to CM = CB.\sin\left(60^0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{3}}{3}a; HM = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

CMTT ta có $GM = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

Từ đó nhận thấy OGMH là hình vuông $\to OH = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

Tam giác OHC vuông tại H $\to$ Áp dụng định lý Pitago ta có:

$CM = CB.\sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{3}}{3}a; HM = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

$OC = \sqrt{CH^2 + OH^2} = \frac{\sqrt{5}}{12}a = R \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{5}{3}\pi a^2$

Chọn A.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$, tam giác ABC cân tại $A, BC = 2a\sqrt{2}$, $\cos\widehat{ACB} = \frac{1}{3}$. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $S = \frac{97\pi a^2}{4}$. **B.** $S = \frac{97\pi a^2}{2}$. **C.** $S = \frac{97\pi a^2}{\sqrt{3}}$. **D.** $S = \frac{97\pi a^2}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi H là trung điểm của BC

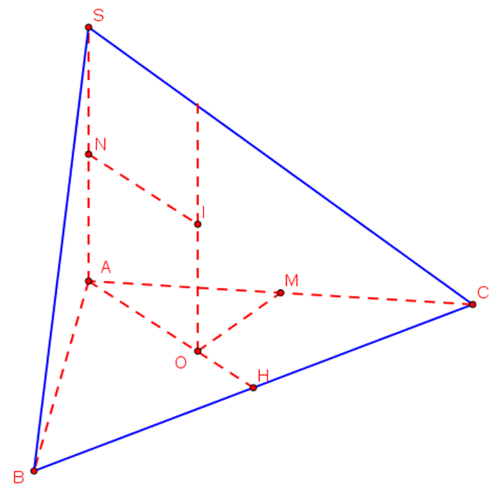
$\Rightarrow HC = \frac{BC}{2} = a\sqrt{2}$.

Do ΔABC cân tại A $\Rightarrow AH \perp BC$.

$\cos\widehat{ACB} = \frac{1}{3} \Rightarrow AC = 3HC \Rightarrow AC = 3a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \sqrt{18a^2 - 2a^2} = 4a$.

Gọi M là trung điểm AC, trong mp (ABC) vẽ đường trung trực AC cắt AH tại $O \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



Ta có $\cos\widehat{ACH} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\widehat{CAH} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\widehat{CAH} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Trong ΔAMO vuông tại $M \Rightarrow AO = \frac{AM}{\cos\widehat{CAH}} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{9a}{4}$

Gọi N là trung điểm SA. Trong mp (SAH) vẽ trung trực SA cắt đường thẳng qua O và vuông góc mp (ABC) tại I. Chứng minh được I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Ta có $ANIO$ là hình chữ nhật

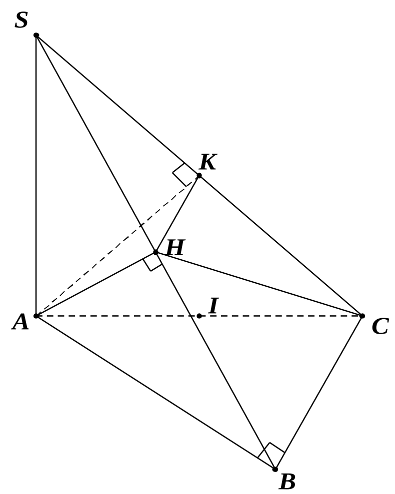
$\Rightarrow$ đường chéo $AI=\sqrt{AO^2+AN^2}=\sqrt{\frac{81a^2}{16}+a^2}=\sqrt{\frac{97a^2}{16}}=\frac{\sqrt{97}}{4}a$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S=4\pi R^2=4\pi\frac{97a^2}{16}=\frac{97}{4}\pi a^2$ (đvdt).

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC=a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SB và SC. Thể tích của khối cầu tạo bởi mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ là:

A. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ **B.** $\sqrt{2}\pi a^3$ **C.** $\frac{\pi a^3}{6}$ **D.** $\frac{\pi a^3}{2}$

Hướng dẫn giải:



Theo giả thiết, ta có $\widehat{ABC}=90^0, \widehat{AKC}=90^0$ (1)

Do $\begin{cases} AH\perp SB \\ BC\perp AH\ (BC\perp(SAB)) \end{cases} \Rightarrow AH\perp HC\ (2)$

Từ (1),(2) suy r aba điểm B,H,K cùng nhìn xuống AC dưới một góc 90^0 nên hình chóp $A.HKCB$ nội tiếp mặt cầu tâm I là trung điểm AC, bán kính

$R=\frac{AC}{2}=\frac{AB\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy thể tích khối cầu $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ (đvdt).

Chọn A.

Câu 30: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60^0. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là:

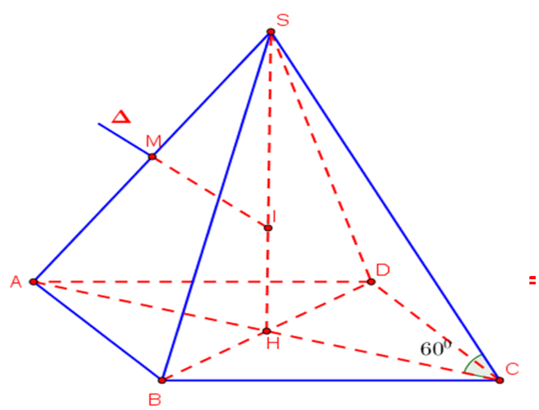
A. $\frac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{2\pi a^3\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi $O=AC\cap BD$, suy ra $SO\perp(ABCD)$.

Ta có $60^0=\widehat{SB,(ABCD)}=\widehat{SB,OB}=\widehat{SBO}$.

Trong ΔSOB, ta có $SO=OB.\tan\widehat{SBO}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.



Ta có SO là trục của hình vuông $ABCD$.

Trong mặt phẳng SOB, kẻ đường trung trực d của đoạn SB.

Gọi $I = SO \cap d \Rightarrow \begin{cases} I \in SO \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC = ID \\ IS = IB \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS = R$.

Xét ΔSBD có $\begin{cases} SB = SD \\ \widehat{SBD} = \widehat{SBO} = 60^o \end{cases} \Rightarrow \Delta SBD$ đều.

Do đó d cũng là đường trung tuyến của ΔSBD. Suy ra I là trọng tâm ΔSBD.

Bán kính mặt cầu $R = SI = \frac{2}{3}SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Suy ra $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\pi a^3\sqrt{6}}{27}$.

Chọn D.

Câu 31: Cho bát diện đều, tính tỷ số giữa thể tích khối cầu nội tiếp và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình bát diện đều đó.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải:

Gọi cạnh bát diện đều là a; bát diện đều có các mặt chéo là hình vuông; khi đó độ dài các đường chéo $AC = BD = SS' = a\sqrt{2}$.

Mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp đều có tâm O, khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp là

$R = OA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bán kính mặt cầu nội tiếp là khoảng cách từ O đến các mặt bên. Hình trên có

$r = OH = \frac{SO.OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Có $\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ khi đó tỷ số thể tích khối cầu nội tiếp cho khối cầu ngoại tiếp là:

$\left(\frac{r}{R}\right)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

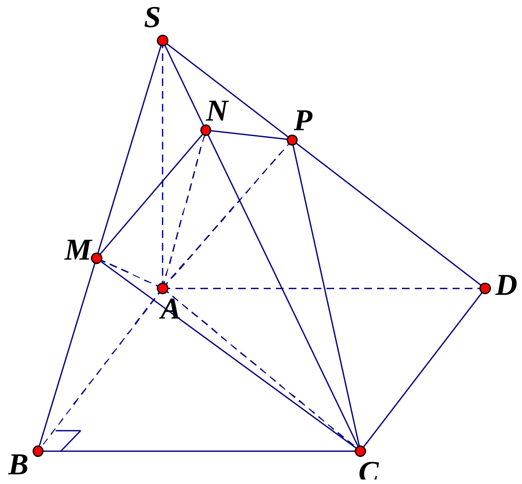
Chọn D.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

A. $V = \frac{32\pi}{3}$. **B.** $V = \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$. **C.** $V = \frac{108\pi}{3}$. **D.** $V = \frac{125\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Ta có:

$CB \perp (SAD), AM \subset (SAB) \Rightarrow AM \perp CB$ (1)

$(\alpha) \perp SC, AM \subset (\alpha) \Rightarrow AM \perp SC$ (2)

Từ $\begin{array}{l}(1),(2) \Rightarrow AM \perp (SBC) \\ \Rightarrow AM \perp MC \Rightarrow \widehat{AMC} = 90^\circ\end{array}$.

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{APC} = 90^\circ$

Có $AN \perp SC \Rightarrow \widehat{ANC} = 90^\circ$

Ta có: $\widehat{AMC} = \widehat{APC} = \widehat{APC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ khối cầu đường kính AC là khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.

Bán kính cầu này là $r = \frac{AC}{2} = 2$.

Thể tích cầu: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32\pi}{3}$

Câu 33: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2$ là

A. Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

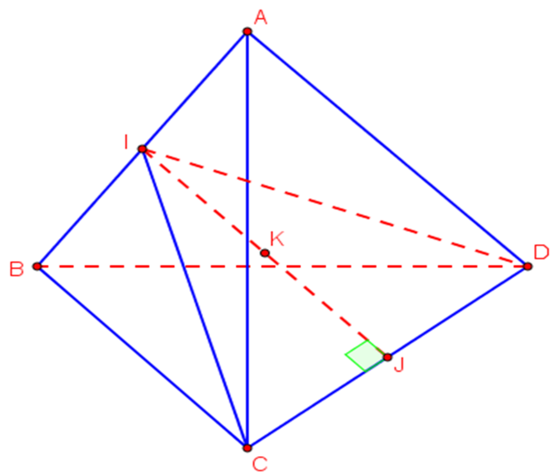
B. Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

C. Mặt cầu có tâm là trọng tâm của tứ diện và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. Đường tròn có tâm là trọng tâm tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi K là trung điểm IJ. (Lúc này, K là trọng tâm tứ diện).

Áp dụng định lý đường trung tuyến trong tam giác, ta có:

$$\begin{cases} MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2MI^2 + \frac{a^2}{2} \\ MC^2 + MD^2 = 2MJ^2 + \frac{CD^2}{2} = 2MJ^2 + \frac{a^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=2\left(MI^2+MJ^2\right)+a^2 \; =2\left(2MK^2+\frac{IJ^2}{2}\right)+a^2$$

Ta có: $IJ^2=\frac{IC^2+ID^2}{2}-\frac{CD^2}{4}=IC^2-\frac{a^2}{4}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4MK^2+\frac{3a^2}{2}$.

Do đó: $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=2a^2 \Leftrightarrow 4MK^2+\frac{3a^2}{2}=2a^2 \Leftrightarrow MK=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy tập hợp các điểm M thoả mãn hệ thức đề bài là mặt cầu tâm K, bán kính bằng $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V=\frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. **B.** $V=\frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. **C.** $V=\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. **D.** $V=\frac{5\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi O là tâm đường tròn tam giác ABC suy ra O là trọng tâm, H là trung điểm AB, kẻ đường thẳng qua O song song SH cắt SC tại N ta được $NO\perp(ABC)$, gọi M là trung điểm SC, HM cắt NO tại I.

Ta có $HS=HC$ nên $HM\perp SC \Rightarrow IS=IC=IA=IB=r$

Ta có

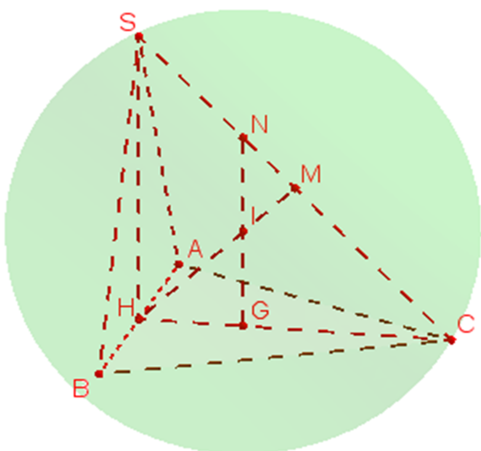
$$\angle NIM=\angle HCS=45^0, \frac{CN}{CS}=\frac{CO}{CH}=\frac{2}{3}\Rightarrow CN=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow SM=\frac{\sqrt{6}}{4}, SN=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Suy ra $NM=SM-SN=\frac{\sqrt{6}}{12}$

ΔNMI vuông tại M

$\tan 45^0=\frac{NM}{IM}\Rightarrow IM=NM=\frac{\sqrt{6}}{12}$

Suy ra $r=IC=\sqrt{IM^2+MC^2}=\sqrt{\frac{5}{12}}$



Vậy $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.

Cách khác:

Gọi $P,\ Q$ lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB và ABC.

Do các tam giác SAB và ABC là các tam giác đều cạnh bằng 1 nên $P,\ Q$ lần lượt tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

+ Qua P đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (SAB), qua O dựng đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Hai trục này cắt nhau tại I, suy ra $IA = IB = IC = IS$. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và $R = IC$.

+ Xét ΔIQC : $IC = \sqrt{IG^2 + GC^2} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{6}$

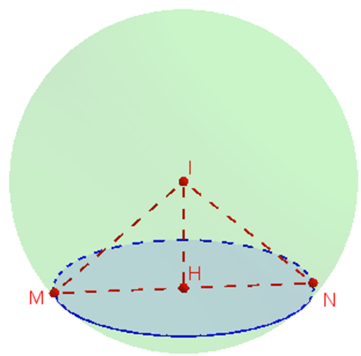
Vậy $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.

Câu 35: Cho mặt cầu (S) Có tâm I, bán kính $R = 5$. Một đường thẳng Δ cắt (S) tại 2 điểm M, N phân biệt nhưng không đi qua I. Đặt $MN = 2m$. Với giá trị nào của m thì diện tích tam giác IMN lớn nhất?

A. $m = \pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **C.** $m = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trung điểm MN, ta có : $IH = \sqrt{25 - m^2}$



Diện tích tam giác IMN :

$S_{IMN} = \dfrac{1}{2}IH.MN = m\sqrt{25 - m^2}$

$= \sqrt{m^2(25 - m^2)} \le \dfrac{m^2 + 25 - m^2}{2}$

Suy ra $S_{IMN} \le \dfrac{25}{2}$. Dấu '=' xãy ra khi

$m^2 = 25 - m^2 \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

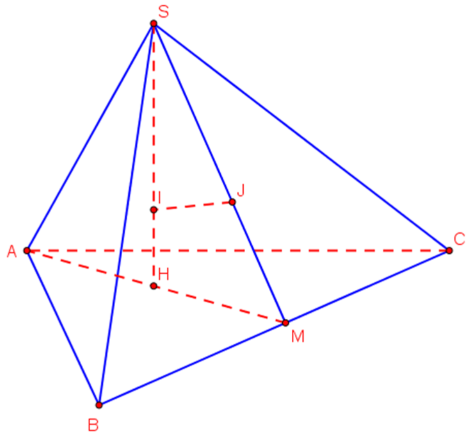
Chọn D.

Câu 36: Cho một mặt cầu bán kính bằng 1. Xét các hình chóp tam giác đều ngoại tiếp mặt cầu trên. Hỏi thể tích nhỏ nhất của chúng là bao nhiêu?

A. $\min V = 8\sqrt{3}$. **B.** $\min V = 4\sqrt{3}$. **C.** $\min V = 9\sqrt{3}$. **D.** $\min V = 16\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Gọi cạnh đáy của hình chóp là a

Ta có $\Delta SIJ \sim \Delta SMH$

$\Rightarrow \frac{SI}{SM} = \frac{IJ}{MH}$

$\Rightarrow MH(SH - IH) = IJ\sqrt{SH^2 - HM^2}$

$\Rightarrow MH^2(SH-1)^2 = SH^2 - HM^2$

$\Rightarrow (a^2-12)SH^2 - 2a^2 SH = 0$

$\Rightarrow SH = \frac{2a^2}{a^2-12}\left(a^2 \neq 12\right)$

$S = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{2a^4}{a^2-12} = \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{1}{\frac{1}{a^2}-\frac{12}{a^4}}$.Ta có $\frac{1}{a^2} - \frac{12}{a^4} \leq \frac{1}{48} \Rightarrow S \geq 8\sqrt{3}$

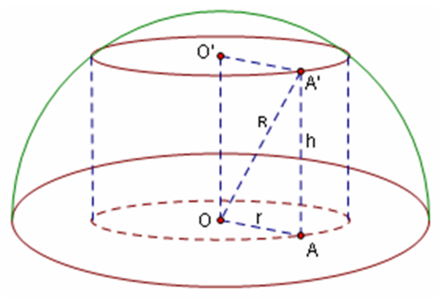
Câu 37: Khi cắt mặt cầu $S(O, R)$ bởi một mặt kính, ta được hai nửa mặt cầu và hình tròn lớn của mặt kính đó gọi là mặt đáy của mỗi nửa mặt cầu. Một hình trụ gọi là nội tiếp nửa mặt cầu $S(O, R)$ nếu một đáy của hình trụ nằm trong đáy của nửa mặt cầu, còn đường tròn đáy kia là giao tuyến của hình trụ với nửa mặt cầu. Biết $R=1$, tính bán kính đáy r và chiều cao h của hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu $S(O, R)$ để khối trụ có thể tích lớn nhất.

A. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}, h = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $r = \frac{\sqrt{6}}{2}, h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $r = \frac{\sqrt{6}}{3}, h = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $r = \frac{\sqrt{3}}{3}, h = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Hình trụ nội tiếp nửa mặt cầu, nên theo giả thiết đường tròn đáy trên có tâm O' có hình chiếu của O xuống mặt đáy (O'). Suy ra hình trụ và nửa mặt cầu cùng chung trục đối xứng và tâm của đáy dưới hình trụ trùng với tâm O của nửa mặt cầu.Ta có: $h^2 + r^2 = R^2$
$(0 < h \leq R = 1) \Rightarrow r^2 = 1 - h^2$



Thể tích khối trụ là: $V = \pi r^2 h = \pi(1-\text{h}^2)\text{h} = f(\text{h})$

$\Rightarrow f\,'(\text{h}) = \pi(1-3\text{h}^2) = 0 \Leftrightarrow \text{h} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

h	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
f'(h)		+	0	−	

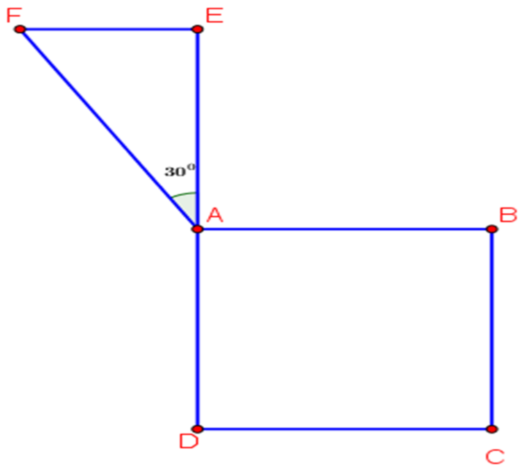
f(h)	$0 \nearrow \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9} \searrow 0$

Vậy: $\underset{(0;1]}{Max}V = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ (đvtt) khi $r = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ và $h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

MẶT TRÒN XOAY – KHỐI TRÒN XOAY

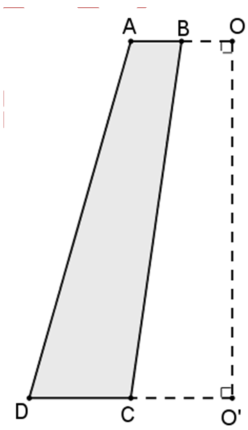
A – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ) quanh trục DF



A. $\frac{10\pi a^3}{9}$. **B.** $\frac{10\pi a^3}{7}$. **C.** $\frac{5\pi a^3}{2}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{3}$.

Câu 2: Thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục OO', biết $OO' = 80$, $O'D = 24$, $O'C = 12$, $OA = 12$, $OB = 6$.



A. $V = 43200\pi$. **B.** $V = 21600\pi$. **C.** $V = 20160\pi$. **D.** $V = 45000\pi$.

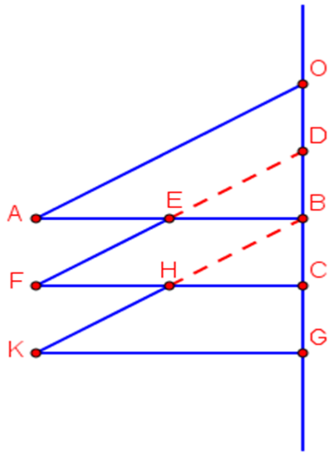
Câu 3: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2a$,vẽ tia Ax về phía điểm B sao cho điểm B luôn cách tia Ax một đoạn bằng a. Gọi H là hình chiếu của B lên tia, khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay có diện tích xung quanh bằng

A. $\frac{(2+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$ **B.** $\frac{(3+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$ **C.** $\frac{(1+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$ **D.** $\frac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$

Câu 4: Cho ba hình tam giác đều cạnh bằng a chồng lên nhau như hình vẽ (cạnh đáy của tam giác trên đi qua các trung điểm hai cạnh bên của tam gác dưới). Tính theo a thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay chúng xung quanh đường thẳng d.

A. $\dfrac{13\sqrt{3}\pi a^3}{96}$. **B.** $\dfrac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}$.

C. $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{11\sqrt{3}\pi a^3}{8}$.



Câu 5: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đó, đặt $\alpha = \widehat{CAB}$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Tìm α sao cho thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\alpha = 60°$. **B.** $\alpha = 45°$. **C.** $\arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\alpha = 30°$.

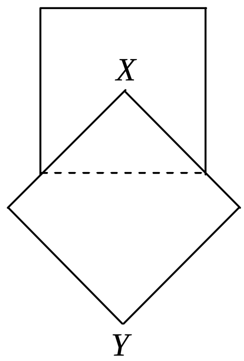
Câu 6: Cho hình cầu (S) tâm O, bán kính R. Hình cầu (S) ngoại tiếp một hình trụ tròn xoay (T) có đường cao bằng đường kính đáy và hình cầu (S) lại nội tiếp trong một nón tròn xoay (N) có góc ở đỉnh bằng 60°. Tính tỉ số thể tích của hình trụ (T) và hình nón (N).

A. $\dfrac{V_T}{V_N} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ **B.** $\dfrac{V_T}{V_N} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\dfrac{V_T}{V_N} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2}$ **D.** Đáp án khác.

Câu 7: Cho tam giác đều và hình vuông cùng có cạnh bằng 4 được xếp chồng lên nhau sao cho một đỉnh của tam giác đều trùng với tâm của hình vuông, trục của tam giác đều trùng với trục của hình vuông (như hình vẽ). Thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi hình đã cho khi quay quanh trục AB là

A. $\dfrac{136\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{48\pi + 7\pi\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{128\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{144\pi + 24\pi\sqrt{3}}{9}$.

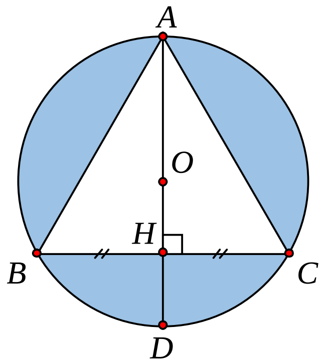
Câu 8: Cho hai hình vuông có cùng cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY.



A. $V = \dfrac{125\left(1+\sqrt{2}\right)\pi}{6}$. **B.** $V = \dfrac{125\left(5+2\sqrt{2}\right)\pi}{12}$.

C. $V = \dfrac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{24}$. **D.** $V = \dfrac{125\left(2+\sqrt{2}\right)\pi}{4}$.

Câu 9: Cho tam giác ABC đều cạnh a và nội tiếp trong đường tròn tâm O, AD là đường kính của đường tròn tâm O. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho phần tô đậm (hình vẽ bên) quay quanh đường thẳng AD bằng



A. $\frac{23\pi a^3\sqrt{3}}{126}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $\frac{20\pi a^3\sqrt{3}}{217}$. **D.** $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$.

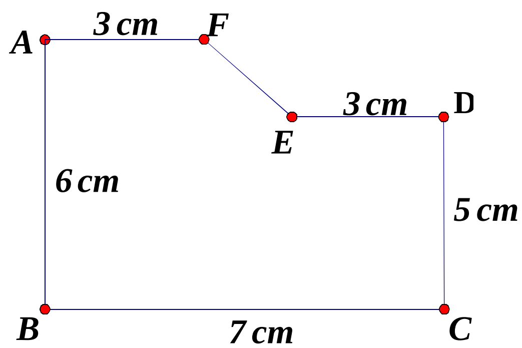
Câu 10: Cho hình thang vuông $ABCD$ có độ dài hai đáy $AB = 2a, DC = 4a$, đường cao $AD = 2a$. Quay hình thang $ABCD$ quanh đường thẳng AB thu được khối tròn xoay (H). Tính thể tích V của khối (H).

A. $V = 8\pi a^3$. **B.** $V = \frac{20\pi a^3}{3}$. **C.** $V = 16\pi a^3$. **D.** $V = \frac{40\pi a^3}{3}$.

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3a, AC = 4a$. Khi tam giác ABC quay quanh đường thẳng BC ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay đó.

A. $V = \pi a^3$. **B.** $V = \frac{96\pi a^3}{5}$. **C.** $V = 3\pi a^3$. **D.** $V = \frac{48\pi a^3}{5}$.

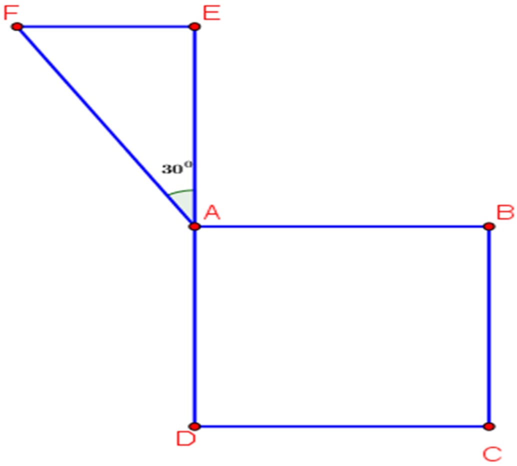
Câu 12: Cho hình phẳng (H) được mô tả ở hình vẽ dưới đây. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được tạo ra khi quay hình phẳng (H) quanh cạnh AB.



A. $V = \frac{772\pi}{3}cm^3$. **B.** $V = \frac{799\pi}{3}cm^3$. **C.** $V = 254\pi\ cm^3$. **D.** $V = \frac{826\pi}{3}cm^3$.

B – HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ) quanh trục DF



A. $\frac{10\pi a^3}{9}$. **B.** $\frac{10\pi a^3}{7}$. **C.** $\frac{5\pi a^3}{2}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải:
Chọn A.

Ta có $EF = AF.\tan\beta = a.\tan 30° = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Khi quay quanh trục DF, tam giác AEF tạo ra một hình nón có thể tích

$V_1 = \frac{1}{3}\pi.EF^2.AF = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.a = \frac{\pi a^3}{9}$

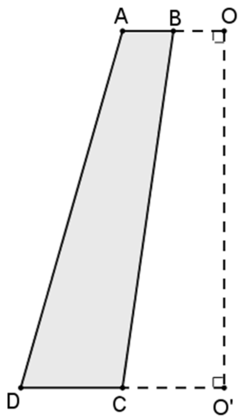
Khi quay quanh trục DF, hình vuông $ABCD$ tạo ra một hình trụ có thể tích

$V_2 = \pi.DC^2.BC = \pi.a^2.a = \pi a^3$

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay mô hình (như hình vẽ) quanh trục DF là

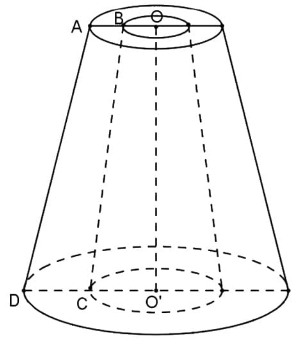
$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi a^3}{9} + \pi a^3 = \frac{10}{9}\pi a^3$

Câu 2: Thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục OO', biết $OO' = 80$, $O'D = 24$, $O'C = 12$, $OA = 12$, $OB = 6$.



A. $V = 43200\pi$. **B.** $V = 21600\pi$. **C.** $V = 20160\pi$. **D.** $V = 45000\pi$.

Hướng dẫn giải:
Chọn C.



Công thức tính thể tích khối nón cụt $V=\frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2+R_2^2+R_1R_2\right)$.

Trong đó h là độ dài đường cao, $R_1;R_2$ lần lượt là bán kính hai đáy.

Gọi V_1 là thể tích khối nón cụt khi quay hình thang $AOO'D$ quanh trục OO'
.

Gọi V_2 là thể tích khối nón cụt khi quay hình thang $BOO'C$ quanh trục OO'
.

Khi đó $V=V_1-V_2$.

Ta có $V_1=\frac{1}{3}\pi.OO'.\left(O'D^2+OA^2+O'D.OA\right)=26880\pi$

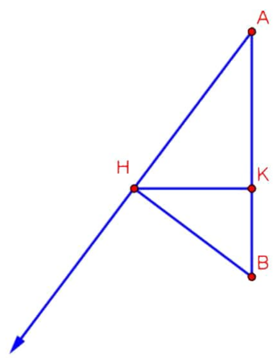
và $V_2=\frac{1}{3}\pi.OO'.\left(O'C^2+OB^2+O'C.OB\right)=6720\pi$.

Vậy $V=V_1-V_2=26880\pi-6720\pi=20160\pi$.

Câu 3: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2a$,vẽ tia Ax về phía điểm B sao cho điểm B luôn cách tia Ax một đoạn bằng a. Gọi H là hình chiếu của B lên tia, khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay có diện tích xung quanh bằng

A. $\frac{(2+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$ **B.** $\frac{(3+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$ **C.** $\frac{(1+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$ **D.** $\frac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$

Hướng dẫn giải:
Chọn B.



Khi quay quanh tam giác AHB thì đường gấp khúc AHB vẽ lên một mặt tròn xoay. Diện tích mặt tròn xoay này bằng tổng diện tích xung quanh hai hình nón đường sinh AH và BH.

Ta có $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=a\sqrt{3}$

$$HK=\frac{AH.BH}{AB}=\frac{a\sqrt{3}.a}{2a}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

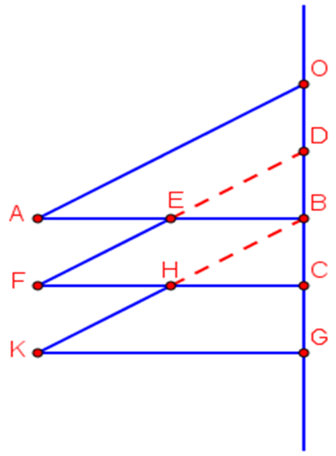
Diện tích xung quanh hình nón có đường sinh AH là

$$S_1=\pi\frac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3}=\frac{3a^2\pi}{2}$$

Diện tích xung quanh hình nón có đường sinh BH là $S_2=\pi\frac{a\sqrt{3}}{2}.a=\frac{\sqrt{3}a^2\pi}{2}$

Diện tích mặt tròn xoay cần tìm là $S=S_1+S_2=\frac{(3+\sqrt{3})a^2\pi}{2}$.

Câu 4: Cho ba hình tam giác đều cạnh bằng a chồng lên nhau như hình vẽ (cạnh đáy của tam giác trên đi qua các trung điểm hai cạnh bên của tam gác dưới). Tính theo a thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay chúng xung quanh đường thẳng d.



A. $\dfrac{13\sqrt{3}\pi a^3}{96}$. **B.** $\dfrac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}$.

C. $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{11\sqrt{3}\pi a^3}{8}$.

Chọn B.

Nếu ba hình tam giác không chồng lên nhau thì

thể tích của khối tròn xoay là $V_1 = \dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{8}$

Thể tích phần bị chồng lên là $V_2 = \dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{96}$

$\Rightarrow$ Thể tích cần tính là $V = V_1 - V_2 = \dfrac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}$

Hoặc làm như sau:

Đặt $V_1; V_2; V_3; V_4$ lần lượt là thể tích: khối nón sinh bởi tam giác OAB quay quanh OB, khối tròn xoay sinh bởi hình $BCFE; GCHK$, khối nón sinh bởi tam giác DEB khi quay quanh BC. Khi đó: Thể tích khối cần tìm là:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 3V_1 - 2V_4 = 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{a^2}{16}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}.$$

Câu 5: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đó, đặt $\alpha = \widehat{CAB}$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB. Tìm α sao cho thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\alpha = 60°$. **B.** $\alpha = 45°$. **C.** $\arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\alpha = 30°$.

Hướng dẫn giải:

$AC = AB.\cos\alpha = 2R.\cos\alpha$

$CH = AC.\sin\alpha = 2R.\cos\alpha.\sin\alpha; AH = AC.\cos\alpha = 2R.\cos^2\alpha$

Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB là

$$V = \frac{1}{3}AH.\pi CH^2 = \frac{8}{3}R^3.\cos^4\alpha.\sin^2\alpha.$$

Đặt $t = \cos^2\alpha \ (0 < t < 1) \Rightarrow V = \dfrac{8}{3}R^3 t^2(1-t)$

$$= \frac{8}{6}R^3.t.t(2-2t) \le \frac{8}{6}R^3\left(\frac{t+t+2-2t}{3}\right)^3$$

Vậy V lớn nhất khi $t=\frac{2}{3}$ khi $\alpha=\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.

□Chú ý: có thể dùng PP hàm số để tìm GTNN của hàm $f(t)=t^2(1-t)$

Chọn C.

Câu 6: Cho hình cầu (S) tâm O, bán kính R. Hình cầu (S) ngoại tiếp một hình trụ tròn xoay (T) có đường cao bằng đường kính đáy và hình cầu (S) lại nội tiếp trong một nón tròn xoay (N) có góc ở đỉnh bằng 60°. Tính tỉ số thể tích của hình trụ (T) và hình nón (N).

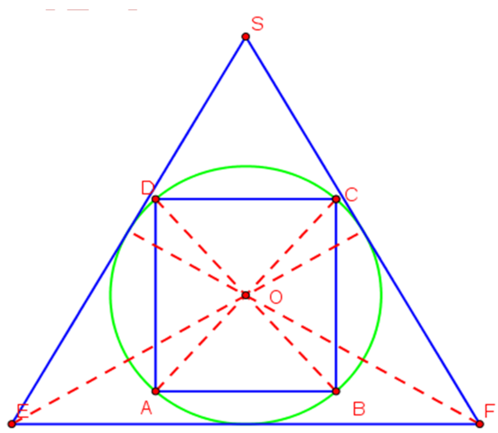
A. $\frac{V_T}{V_N}=\frac{\sqrt{2}}{6}$ **B.** $\frac{V_T}{V_N}=\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{V_T}{V_N}=\frac{6\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{V_T}{V_N}=\frac{\sqrt{2}}{9}$

Hướng dẫn giải:

Bài toán quy về hình nón tâm O ngoại tiếp hình vuông ABCD và nội tiếp tam giác đều SEF mà $EF//AB$. Vì OAB là tam giác vuông cân nên $AB=BC=R\sqrt{2}$.Suy ra

$$V_T=\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2BC=\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}$$

Ta thấy, tâm O của hình tròn cũng chính là tâm của hình vuông ABCD đồng thời cũng là trọng tâm của tam giác đều SEF.



Như vậy, đường cao của tam giác SEF là $SH=3OH=3R$

Trong tam giác EOH (vuông tại H, $\widehat{EOH}=30^\circ$). Ta có: $EH=OH.\sqrt{3}=R\sqrt{3}$

Thể tích của hình nón

$$V_N=\frac{1}{3}\pi EH^2.SH=\frac{1}{3}\pi 3R^2.3R=3\pi R^3$$

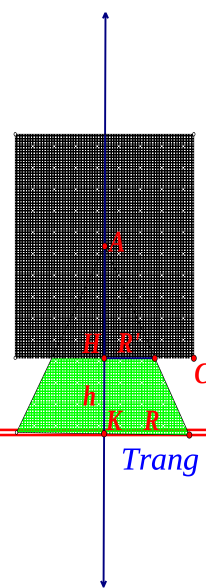
Vậy $\frac{V_T}{V_N}=\frac{\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}}{3\pi R^3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Chọn A.

Câu 7: Cho tam giác đều và hình vuông cùng có cạnh bằng 4 được xếp chồng lên nhau sao cho một đỉnh của tam giác đều trùng với tâm của hình vuông, trục của tam giác đều trùng với trục của hình vuông (như hình vẽ). Thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi hình đã cho khi quay quanh trục AB là

A. $\frac{136\pi+24\pi\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{48\pi+7\pi\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{128\pi+24\pi\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{144\pi+24\pi\sqrt{3}}{9}$.



Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Khi xoay quanh trục AB thì:

□ Phần hình vuông phía trên trở thành lăng trụ có bán kính R = 2, chiều cao h = 4

$\rightarrow V_1 = \pi 2^2.4 = 16\pi$

Phần dưới trở thành hình nón cụt với

$h = HK = AK - AH = 2\sqrt{3} - 2 = 2\left(\sqrt{3} - 1\right);\ R = 2$

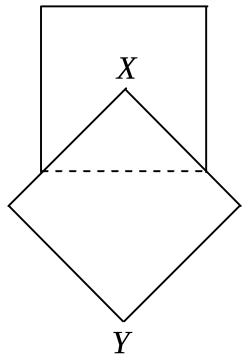
$\frac{R'}{R} = \frac{AH}{AK} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow R' = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Áp dụng $V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + R'^2 + RR'\right) = ... = \left(\frac{24\sqrt{3} - 8}{9}\right)\pi$

Vậy $V = V_1 + V_2 = \left(\frac{24\sqrt{3} + 136}{9}\right)\pi$.

Chọn D.

Câu 8: Cho hai hình vuông có cùng cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY.



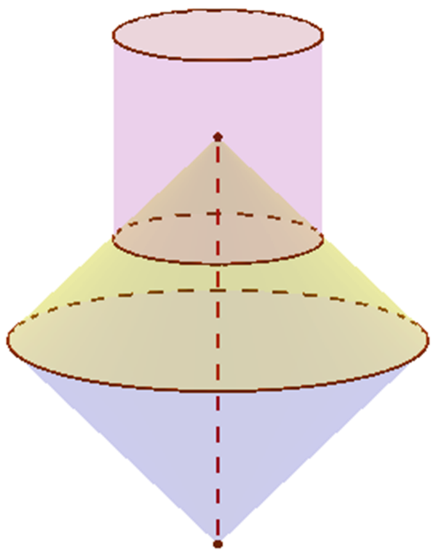
A. $V = \frac{125\left(1 + \sqrt{2}\right)\pi}{6}$. **B.** $V = \frac{125\left(5 + 2\sqrt{2}\right)\pi}{12}$.

C. $V = \frac{125\left(5 + 4\sqrt{2}\right)\pi}{24}$. **D.** $V = \frac{125\left(2 + \sqrt{2}\right)\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

□ ***Cách 1 :***



Khối tròn xoay gồm 3 phần:

Phần 1: khối trụ có chiều cao bằng 5, bán kính đáy bằng $\frac{5}{2}$ có thể tích $V_1 = \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 5 = \frac{125\pi}{4}$.

Phần 2: khối nón có chiều cao và bán kính đáy bằng $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ có thể tích

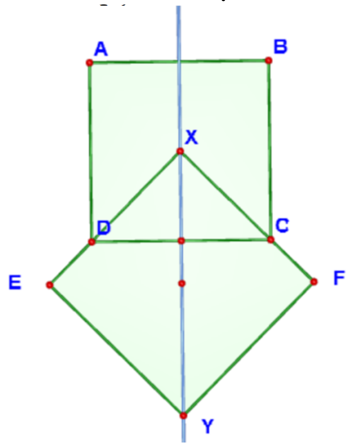
$$V_2 = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{125\pi\sqrt{2}}{12}$$

Phần 3: khối nón cụt có thể tích là

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi \times \frac{5\left(\sqrt{2} - 1\right)}{2} \times \left(\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{5}{2}\right) = \frac{125\left(2\sqrt{2} - 1\right)\pi}{24}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay là

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{125\pi}{4} + \frac{125\pi\sqrt{2}}{12} + \frac{125\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi}{24} = \frac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{24}.$$



□ ***Cách 2 :***

Thể tích hình trụ được tạo thành từ hình vuông $ABCD$ là

$$V_T = \pi R^2 h = \frac{125\pi}{4}$$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ hình vuông $XEYF$ là

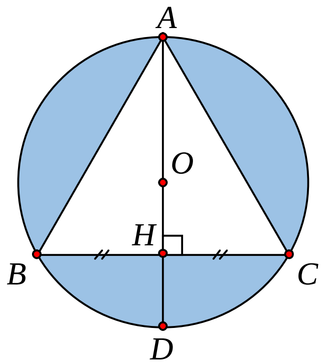
$$V_{2N} = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{125\pi\sqrt{2}}{6}$$

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành từ tam giác XDC là

$$V_{N'} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{125\pi}{24}$$

Thể tích cần tìm $V = V_T + V_{2N} - V_{N'} = 125\pi\dfrac{5+4\sqrt{2}}{24}$.

Câu 9: Cho tam giác ABC đều cạnh a và nội tiếp trong đường tròn tâm O, AD là đường kính của đường tròn tâm O. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho phần tô đậm (hình vẽ bên) quay quanh đường thẳng AD bằng



A. $\dfrac{23\pi a^3\sqrt{3}}{126}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $\dfrac{20\pi a^3\sqrt{3}}{217}$. **D.** $\dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Khi quay tam giác ABC quanh trục AD được khối nón có thể tích là:

$$N = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}\pi.HC^2.AH = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{24}$$

Khi quay đường tròn tâm O quanh trục AD được khối cầu có thể tích là:

$$V = \frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{4}{3}\pi.AO^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$$

Thể tích khối tròn xoay cần tìm: $(S) \Leftrightarrow d\left(I;(ABC)\right) = R \Leftrightarrow \dfrac{\left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}} = \sqrt{\dfrac{72}{7}}$.

Câu 10: Cho hình thang vuông $ABCD$ có độ dài hai đáy $AB = 2a, DC = 4a$, đường cao $AD = 2a$. Quay hình thang $ABCD$ quanh đường thẳng AB thu được khối tròn xoay (H). Tính thể tích V của khối (H).

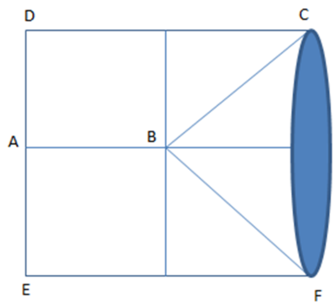
A. $V = 8\pi a^3$. **B.** $V = \dfrac{20\pi a^3}{3}$. **C.** $V = 16\pi a^3$. **D.** $V = \dfrac{40\pi a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Gọi V_1 là thể tích khối trụ khi quay hình chữ nhật $DCFE$ quanh trục AB

Gọi V_2 là thể tích khối nón. Khi quay ΔBCF quanh trục AB



V là thể tích của khối (H) cần tìm

$V = V_1 - V_2 =$

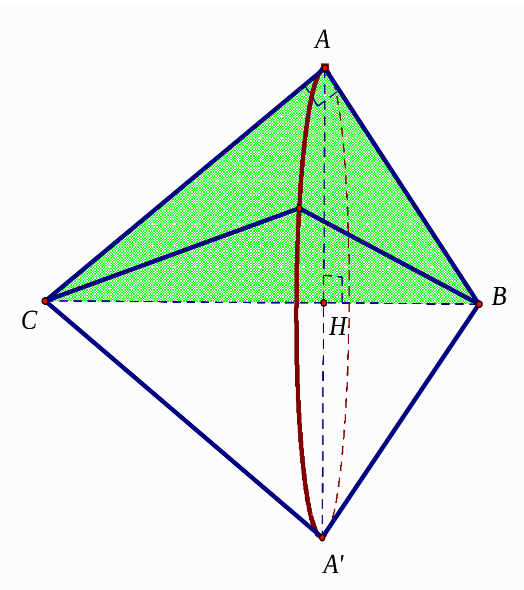
$\pi(2a)^2.4a - \dfrac{1}{3}\pi(2a)^2.2a = \dfrac{40\pi a^3}{3}$

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3a, AC = 4a$. Khi tam giác ABC quay quanh đường thẳng BC ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích V của khối tròn xoay đó.

A. $V = \pi a^3$. **B.** $V = \dfrac{96\pi a^3}{5}$. **C.** $V = 3\pi a^3$. **D.** $V = \dfrac{48\pi a^3}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối nón do tam giác CAH và BAH sinh ra khi quay quanh trục BC.

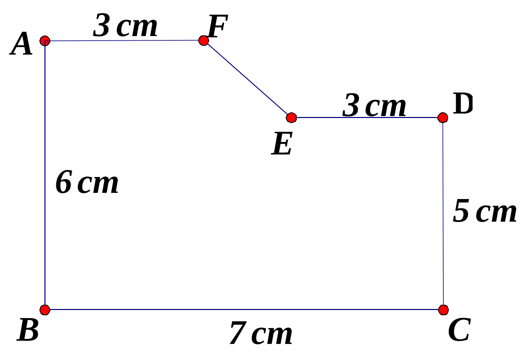
Ta có: $AH = \dfrac{12a}{5}; CH = \dfrac{16a}{5}; BH = \dfrac{9a}{5}$.

Suy ra $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{12a}{5}\right)^2\dfrac{16a}{5} = \dfrac{768\pi a^3}{125}$

$V_2 = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{12a}{5}\right)^2\dfrac{9a}{5} = \dfrac{432\pi a^3}{125}$

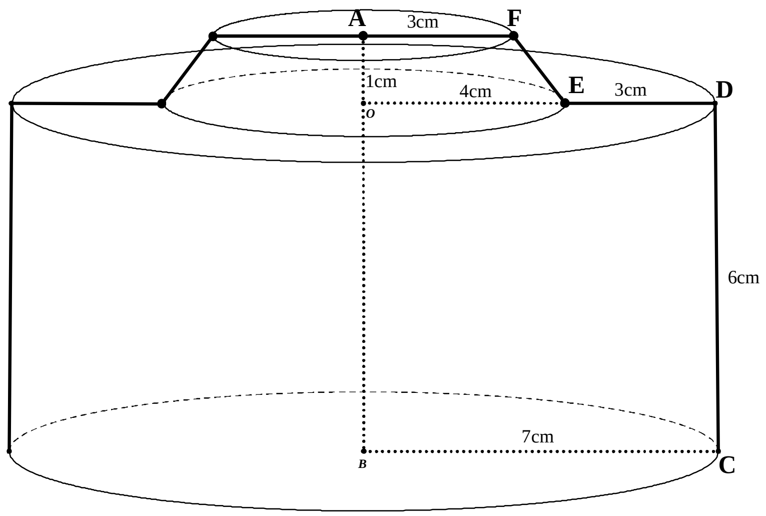
Vậy $V = V_1 + V_2 = \dfrac{48\pi a^3}{5}$

Câu 12: Cho hình phẳng (H) được mô tả ở hình vẽ dưới đây. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được tạo ra khi quay hình phẳng (H) quanh cạnh AB.



A. $V=\dfrac{772\pi}{3}cm^3$. **B.** $V=\dfrac{799\pi}{3}cm^3$. **C.** $V=254\pi\ cm^3$. **D.** $V=\dfrac{826\pi}{3}cm^3$.

Hướng dẫn giải:



Vật thể tròn xoay tạo ra gồm hai phần:

V_1 là phần hình trụ tròn xoay quay bởi hình gấp khúc $ODCB$ quanh trục AB tạo ra hình trụ có chiều cao $h=6(cm)$; bán kính đáy $R_1=7(cm)$.

V_2 là phần hình trụ tròn xoay quay bởi hình gấp khúc $AFEO$ quanh trục AB tạo ra hình nón cụt có chiều cao $h'=1(cm)$; bán kính đáy lớn $R=4(cm)$; bán kính đáy bé $r=3(cm)$.

Khi đó thể tích khối tròn xoay là:

$$V=V_1+V_2=\pi R_1^{\,2}.h+\frac{\pi.h'}{3}\left(R^2+r^2+R.r\right)=\pi.49.5+\frac{\pi.1}{3}\left(4^2+3^2+4.3\right)=\frac{772\pi}{3}cm^3.$$

Chọn A.

ỨNG DỤNG THỰC TẾ

A – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Người ta bỏ 5 quả bóng bàn cùng kích thước vào một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng 5 lần đường kính của quả bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của 5 quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ là:

A. 2. **B.** $\frac{6}{5}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 2: Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích $27cm^3$ với chiều cao là h và bán kính đáy là r để lượng giấy tiêu thụ là ít nhất thì giá trị của r là:

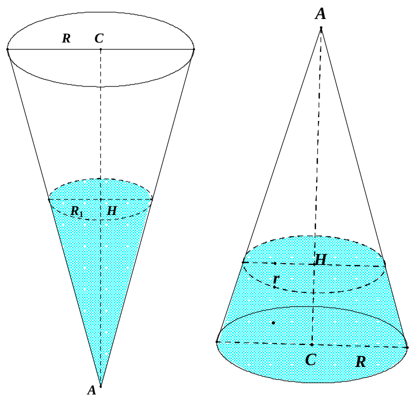
A. $r=\sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$. **B.** $r=\sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$. **C.** $r=\sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$. **D.** $r=\sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$.

Câu 3: Một phễu đựng kem hình nón bằng giấy bạc có thể tích $12\pi\,(\text{cm}^3)$ và chiều cao là 4cm. Muốn tăng thể tích kem trong phễu hình nón lên 4 lần, nhưng chiều cao không thay đổi, diện tích miếng giấy bạc cần thêm là.

A. $(12\sqrt{13}-15)\pi\left(cm^2\right)$. **B.** $12\pi\sqrt{13}\left(cm^2\right)$.

C. $\frac{12\sqrt{13}}{15}\left(cm^2\right)$. **D.** $(12\sqrt{13}+15)\pi\left(cm^2\right)$

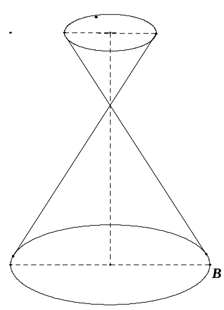
Câu 4: Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là $20\ cm$(Hình 1) Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu lả $10\ cm$. Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược lên (Hình 2) thì chiều cao cột nước trong phễu bằng giá trị nào sau đây



A. $10\ cm$ **B.** $0,87\ cm$

C. $1,07\ cm$ **D.** $1,35\ cm$

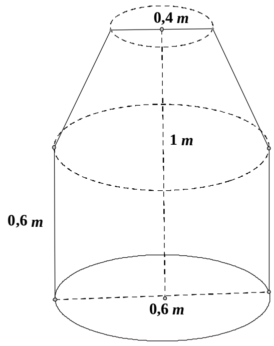
Câu 5: Cho một đồng hồ cát như hình vẽ (gồm hai hình nón chung đỉnh ghép lại) trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60^0. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là $30cm$ và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi\left(cm^3\right)$. Nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới. khi đó tỷ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu



A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{1}{27}$

C. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ **D.** $\frac{1}{64}$

Câu 6: Tính thể tích của thùng đựng nước có hình dạng và kích thước như hình vẽ



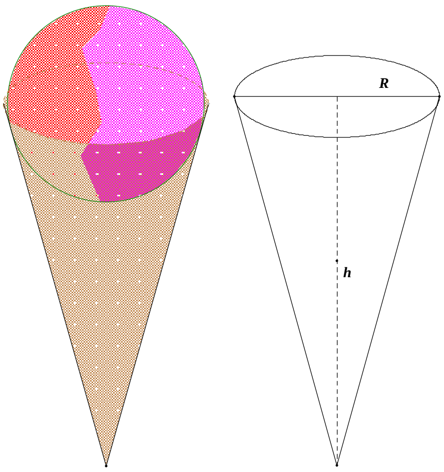
A. $\frac{0,238\pi}{3}\left(m^3\right)$ **B.** $\frac{0,238\pi}{\sqrt{2}}\left(m^3\right)$

C. $\frac{0,238\pi}{4}\left(m^3\right)$ **D.** $\frac{0,238\pi}{\sqrt{3}}\left(m^3\right)$

Câu 7: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính $50cm$. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

A. $10\sqrt{2}cm$ **B.** $20cm$ **C.** $50\sqrt{2}cm$ **D.** $25cm$

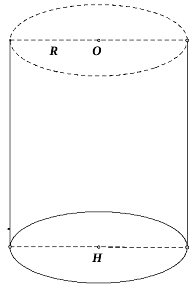
Câu 8: Một kem ốc quế gồm hai phần, phần kem có dạng hình cầu, phần ốc quế có dạng hình nón, giả sử hình cầu và hình nón có bán kính bằng nhau, biết rằng nếu kem tan chảy hết sẽ làm đầy phần ốc quế. Biết thể tích kem sau khi tan chảy bằng 75% thể tích kem đóng băng ban đầu, gọi h,r lần lượt là chiều cao và bán kính của phần ốc quế. Tính tỷ số $\frac{h}{r}$



A. $\frac{h}{r}=3$ **B.** $\frac{h}{r}=2$

C. $\frac{h}{r}=\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{h}{r}=\frac{16}{3}$

Câu 9: Một nhà sản xuất cần thiết kế một thùng sơn dạng hình trụ có nắp đậy với dung tích $1000\,cm^3$. Tính bán kính của nắp đậy để tiết kiệm được nguyên liệu nhất



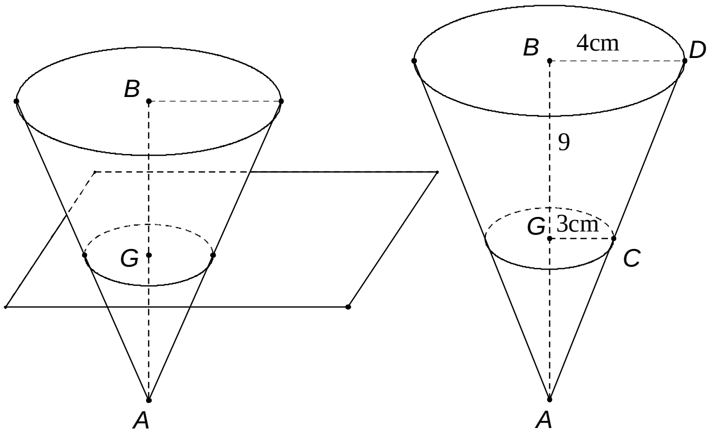
A. $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\left(cm\right)$ **B.** $10.\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}\left(cm\right)$

C. $\frac{500}{\pi}\left(cm\right)$ **D.** $10.\sqrt{\frac{5}{\pi}}\left(cm\right)$

Câu 10: Giả sử viên phấn viết bảng có dạng hình trụ tròn xoay đường kính đáy bằng 1cm, chiều dài 6cm. Người ta làm những hộp carton đựng phấn dạng hình hộp chữ nhật có kích thước $6\times5\times6cm$. Muốn xếp 350 viên phấn vào 12 hộp, ta được kết quả nào trong 4 khả năng sau:

A. Vừa đủ **B.** Thiếu 10 viên **C.** Thừa 10 viên **D.** Không xếp được

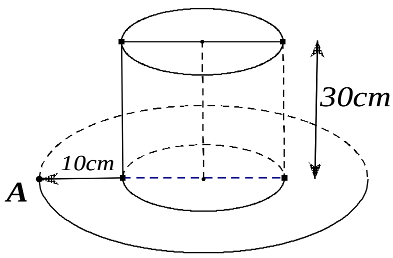
Câu 11: Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng song song với đáy thì phần hình nón nằm giữa mặt phẳng và đáy gọi là hình nón cụt. Một chiếc cốc có dạng hình nón cụt cao $9cm$, bán kính của đáy cốc và miệng cốc lần lượt là và $4cm$. Hỏi chiếc cốc có thể chứa được lượng nước tối đa là bao nhiêu trong số các lựa chọn sau:



A. $250ml$ **B.** $300ml$

C. $350ml$ **D.** $400ml$

Câu 12: Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với các kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không kể viền, mép, phần thừa).



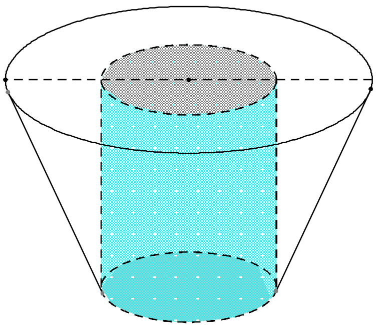
A. $700\pi\left(cm^2\right)$ **B.** $754,25\pi\left(cm^2\right)$

C. $750,25\pi\left(cm^2\right)$ **D.** $756,25\pi\left(cm^2\right)$

Câu 13: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích của khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

A. 0,68. **B.** 0,6. **C.** 0,12. **D.** 0,52.

Câu 14: Khi sản xuất hộp mì tôm, các nhà sản xuất luôn để một khoảng trống dưới đáy hộp để nước chảy xuống dưới và ngấm vào vắt mì, giúp mì chín. Hình vẽ dưới mô tả cấu trúc của hộp mì tôm. Vắt mì tôm có hình một khối trụ, hộp mì tôm có dạng hình nón cụt được cắt bởi hình nón có chiều cao $9cm$ và bán kinh đáy là $6cm$. Nhà sản xuất đang tìm cách để sao cho vắt mì tôm có thể tích lớn nhất trong hộp với mục đích thu hút khách hàng. Thể tích lớn nhất đó là



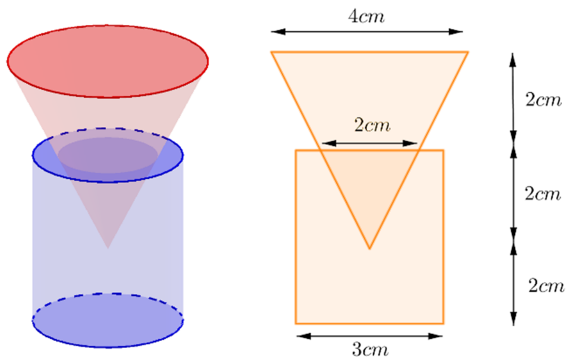
A. $36\pi\left(cm^3\right)$ **B.** $54\pi\left(cm^3\right)$

C. $48\pi\left(cm^3\right)$ **D.** $\frac{81\pi}{2}\left(cm^3\right)$

Câu 15: Một cái ly có dạng hình nón được rót nước vào với chiều cao mực nước bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao hình nón. Hỏi nếu bịch kính miệng ly rồi úp ngược ly xuống thì tỷ số chiều cao mực nước và chiều cao hình nón xấp xỉ bằng bao nhiêu?

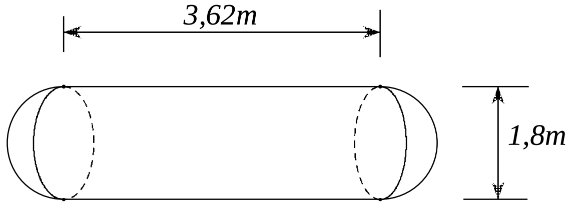
A. $0,33$. **B.** $0,11$. **C.** $0,21$. **D.** $0,08$

Câu 16: Một nút chai thủy tinh là một khối tròn xoay (H), một mặt phẳng chứa trục của (H) cắt (H) theo một thiết diện như trong hình vẽ bên. Tính thể tích của (H) (đơn vị cm^3).



A. $V_{(H)} = 23\pi$. **B.** $V_{(H)} = 13\pi$. **C.** $V_{(H)} = \dfrac{41\pi}{3}$. **D.** $V_{(H)} = 17\pi$.

Câu 17: Một bồn chứa xăng có cấu tạo gồm 1 hình trụ ở giữa và 2 nửa hình cầu ở 2 đầu, biết rằng hình cầu có đường kính $1,8m$ và chiều dài của hình trụ là $3,62m$. Hỏi bồn đó có thể chứa tối đa bao nhiêu lít xăng trongcác giá trị sau đây?



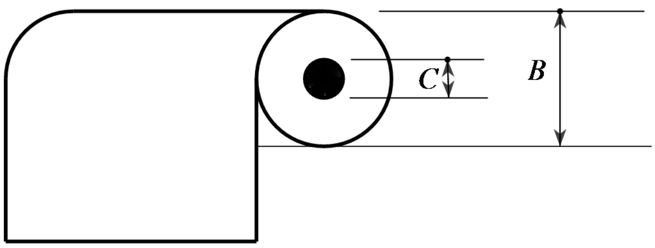
A. $10905l$ **B.** $23650l$

C. $12265l$ **D.** $20201l$

Câu 18: Một hình hộp chữ nhật kích thước $4 \times 4 \times h$ chứa một khối cầu lớn có bán kính bằng 2 và tám khối cầu nhỏ có bán kính bằng 1 sao cho các khối lón tiếp xúc với tám khối cầu nhỏ và các khối cầu đều tiếp xúc với các mặt hình hộp. Thể tích khối hộp là:

A. $32 + 32\sqrt{7}$ **B.** $48 + 32\sqrt{5}$ **C.** $64 + 32\sqrt{7}$ **D.** $64\sqrt{5}$

Câu 19: Một bang giấy dài được cuộn chặt lại thành nhiều vòng xung quanh một ống lõi hình trụ rỗng có đường kính $C = 12,5mm$. Biết độ dày của giấy cuộn là $0,6mm$ và đường kính cả cuộn giấy là $B = 44,9mm$. Tính chiều dài l của cuộn giấy.



A. $L \approx 44m$ **B.** $L \approx 38m$ **C.** $L \approx 4m$ **D.** $L \approx 24m$

Câu 20: Cho một khối cầu bán kính R. Đâm thủng khối cầu bởi một khối trụ có trục đi qua tâm mặt cầu và chiều dài hình trụ thu được là 6 (xem hình vẽ). Tính thể tích vật thể còn lại sau khi đục thủng.

A. 36π **B.** 54π **C.** 27π **D.** 288π

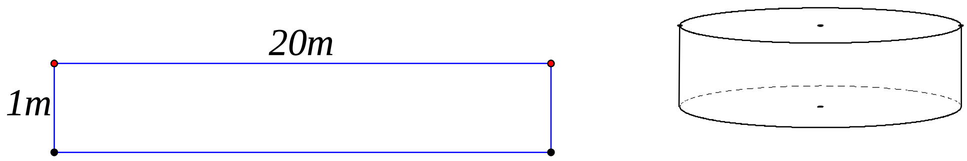
Câu 21: Một thầy giáo dự định xây dựng bể bơi di động cho học sinh nghèo miền núi từ 15 tấm tôn có kích thước $1m \times 20cm$ (biết giá $1m^2$ tôn là 90000 đồng) bằng 2 cách:

Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành 1 hình trụ như hình 1.

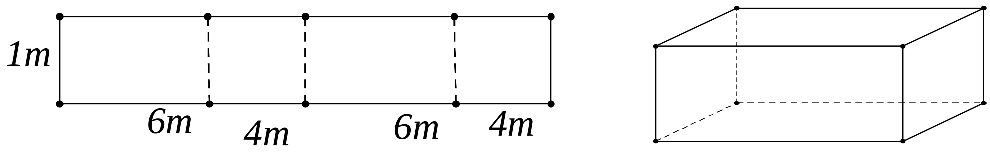
Cách 2: Chia chiều dài tấm tôn thành 4 phần rồi gò tấm tôn thành 1 hình hộp chữ nhật như hình 2.

Biết sau khi xây xong bể theo dự định, mức nước chỉ đổ đến $0,8m$ và giá nước cho đơn vị sự nghiệp là $9955 dong/m^3$. Chi phí trong tay thầy hiệu trưởng là 2 triệu đồng. Hỏi thầy giáo sẽ chọn cách làm nào để không vượt quá kinh phí (giả sử chỉ tính đến các chi phí theo dữ kiện trong bài toán).

Hình 1



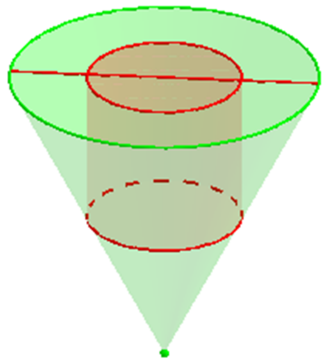
Hình 2



A. Cả 2 cách như nhau **B.** Không chọn cách nào

C. Cách 2 **D.** Cách 1

Câu 22: Một bình đựng nước dạng hình nón (không có nắp đáy), đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào bình đó một khối trụ và đo được thể tích nước trào ra ngoài là $\frac{16\pi}{9}(dm^3)$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của hình nón và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón (như hình vẽ dưới). Tính bán kính đáy R của bình nước.

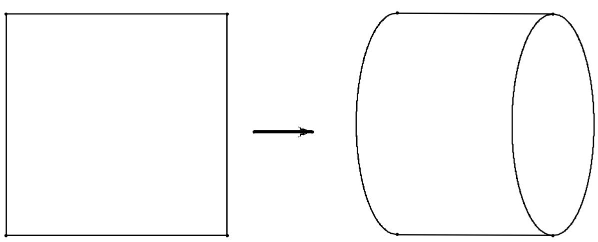


A. $R = 3(dm)$. **B.** $R = 4(dm)$.

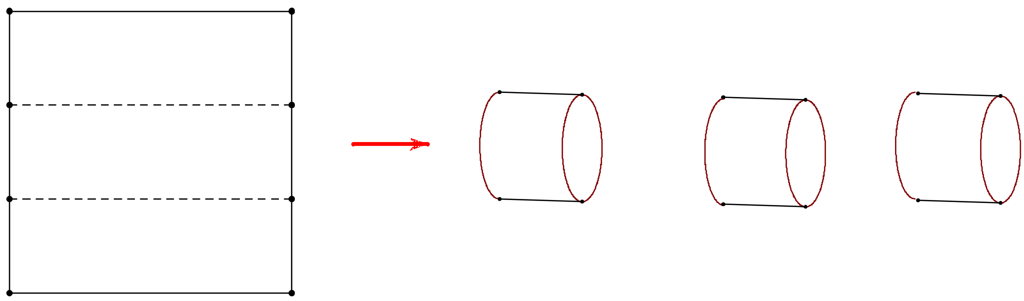
C. $R = 2(dm)$. **D.** $R = 5(dm)$.

Câu 23: Có một miếng nhôm hình vuông, cạnh là $3dm$, một người dự định tính tạo thành các hình trụ (không đáy) theo hai cách sau:

Cách 1: Gò hai mép hình vuông để thành mặt xunng quanh của một hình trụ, gọi thể tích của khối trụ đó là V_1.



Cách 2: Cắt hình vuông ra làm ba và gò thành mặt xung quanh của ba hình trụ, gọi tổng thể tích của chúng là V_2.



Khi đó, tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là:

A. 3 **B.** 2 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Câu 24: Một chiếc hộp hình lập phương cạnh a bị khoét một khoảng trống có dạng là một khối lăng trụ với hai đáy là hai đường tròn nội tiếp của hai mặt đối diện của hình hộp. Sau đó, người ta dùng bìa cứng dán kín hai mặt vừa bị cắt của chiếc hộp lại như cũ, chỉ chừa lại khoảng trống bên trong. Tính thể tích của khoảng trống tạo bởi khối trụ này.

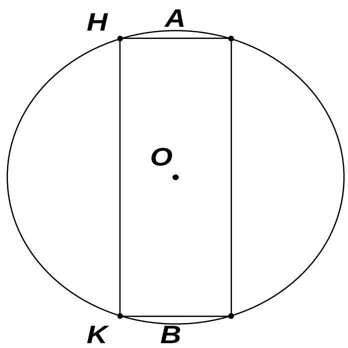
A. πa^3 **B.** $\frac{1}{2}\pi a^3$ **C.** $\frac{1}{4}\pi a^3$ **D.** $\frac{1}{8}\pi a^3$

Câu 25: Người ta dùng một loại vải vintage để bọc quả khối khí của khinh khí cầu, biết rằng quả khối này có dạng hình cầu đường kính $2m$. Biết rằng $1m^2$ vải có giá là 200.000 đồng. Hỏi cần tối thiểu bao nhiêu tiền mua vải để làm khinh khí cầu này?

A. 2.500.470 đồng **B.** 3.150.342 đồng

C. 2.513.274 đồng **D.** 2.718.920 đồng

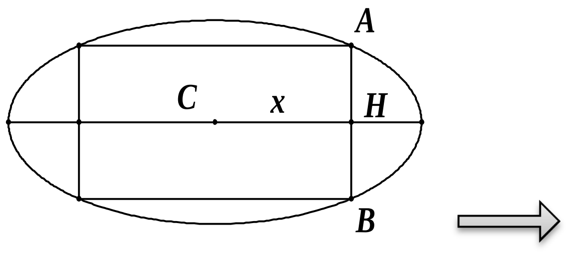
Câu 26: Cho biết rằng hình chỏm cầu có công thức thể tích là $\frac{\pi h\left(3r^2+h^2\right)}{6}$, trong đó h là chiều cao chỏm cầu và r là bán kính đường tròn bề mặt chỏm cầu (bán kính này khác vớibán kính hình cầu). Bài hỏi đặt ra là với một quả dưa hấu hình cầu, người ta dùng một cái ống khoét thủng một lỗ hình trụ chưa rõ bán kính xuyên qua trái dưa như hình vẽ (trong hình có AB là đường kính trái dưa). Biết rằng chiều cao của lỗ là $12cm$ (trong hình trên, chiều cao này chính là độ dài HK). Tính thể tích của phần

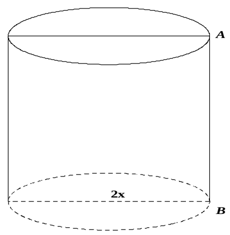


dưa còn lại.

A. $200\pi cm^3$ **B.** $96\pi cm^3$ **C.** $288\pi cm^3$ **D.** $144\pi cm^3$

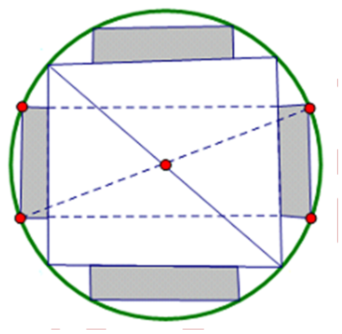
Câu 27: người ta cần cắt một tấm tôn có hình dạng một elip với độ dài trục lớn bằng 8 độ dài trục bé bằng 4 để được một tấm tôn có dạng hình chữ nhật nội tiếp elíp. Người ta gò tấm tôn hình chữ nhật thu được thành một hình trụ không có đáy như hình bên. Tính thể tích lớn nhất có thể thu được của khối trụ đó





A. $\dfrac{128\sqrt{3}}{\pi}\left(cm^3\right)$ **B.** $\dfrac{64}{3\sqrt{2}\pi}\left(cm^3\right)$ **C.** $\dfrac{64}{3\sqrt{3}\pi}\left(cm^3\right)$ **D.** $\dfrac{128}{3\sqrt{2}\pi}\left(cm^3\right)$

Câu 28: Từ một khúc gỗ tròn hình trụ có đường kính bằng 40 cm, cần xả thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ được tô màu xám như hình vẽ dưới đây. Tìm chiều rộng x của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất.



A. $x=\dfrac{3\sqrt{34}-17\sqrt{2}}{2}(cm)$ **B.** $x=\dfrac{3\sqrt{34}-19\sqrt{2}}{2}(cm)$

C. $x=\dfrac{5\sqrt{34}-15\sqrt{2}}{2}(cm)$ **D.** $x=\dfrac{5\sqrt{34}-13\sqrt{2}}{2}(cm)$

Câu 29: Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp 3 lần so với giá làm vật liệu xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi h là chiều cao của thùng và bán kinh đáy là R. Tính tỷ số $\dfrac{h}{R}$ sao cho chi phí làm thùng là nhỏ nhất

A. $\dfrac{h}{R}=2$ **B.** $\dfrac{h}{R}=\sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{h}{R}=3\sqrt{2}$ **D.** $\dfrac{h}{R}=6$

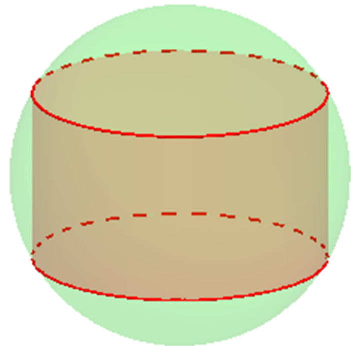
Câu 30: Một nhà máy sản xuất cần thiết kế một thùng sơn dạng hình trụ có nắp đậy với dung tích $1000\,cm^3$. Bán kính của nắp đậy để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất bằng

A. $\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}\;cm$. **B.** $10.\sqrt[3]{\dfrac{5}{\pi}}\;cm$. **C.** $\dfrac{500}{\pi}\;cm$. **D.** $10.\sqrt{\dfrac{5}{\pi}}\;cm$.

Câu 31: Một viên phấn bảng có dạng một khối trụ với bán kính đáy bằng $0,5cm$, chiều dài $6cm$. Người ta làm một hình hộp chữ nhật bằng carton đựng các viên phấn đó với kích thước $6cm\times5cm\times6cm$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu hộp kích thước như trên để xếp 460 viên phấn?

A. 17. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 18.

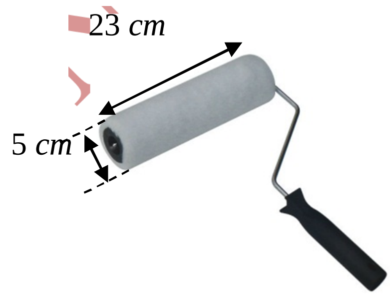
Câu 32: Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



A. $\frac{100}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **B.** $\frac{43}{3}\pi\left(dm^3\right)$

C. $41\pi\left(dm^3\right)$ **D.** $132\pi\left(dm^3\right)$

Câu 33: Một cái tục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là $5cm$, chiều dài lăn là $23cm$ (hình bên). Sau khi lăn trọn 15 vòng thì trục lăn tạo nên sân phẳng một diện diện tích là



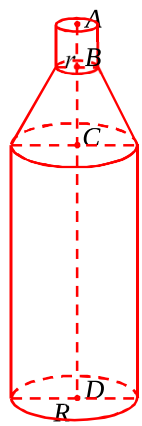
A. $1725\pi\ cm^2$. **B.** $3450\pi\ cm^2$.

C. $1725\pi\ cm^2$. **D.** $862,5\pi\ cm^2$.

Câu 34: Một quả bóng bàn và một chiếc chén hình trụ có cùng chiều cao. Người ta đặt quả bóng lên chiếc chén thấy phần ở ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, khi đó:

A. $9V_1 = 8V_2$. **B.** $3V_1 = 2V_2$. **C.** $16V_1 = 9V_2$. **D.** $27V_1 = 8V_2$.

Câu 35: Phần không gian bên trong của chai nước ngọt có hình dạng như hình bên. Biết bán kính đáy bằng $R = 5cm$, bán kính cổ $r = 2cm$, $AB = 3cm$, $BC = 6cm$, $CD = 16cm$. Thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt đó bằng:



A. $495\pi\left(cm^3\right)$. **B.** $462\pi\left(cm^3\right)$.

C. $490\pi\left(cm^3\right)$. **D.** $412\pi\left(cm^3\right)$.

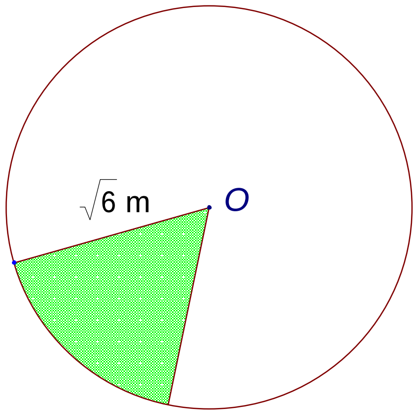
Câu 36: Bạn A muốn làm một chiếc thùng hình trụ không đáy từ nguyên liệu là mảnh tôn hình tam giác đều ABC có cạnh bằng $90\ (cm)$. Bạn muốn cắt mảnh tôn hình chữ nhật $MNPQ$ từ mảnh tôn nguyên liệu (với M, N thuộc cạnh BC; P và Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB) để tạo thành hình trụ có chiều cao bằng MQ. Thể tích lớn nhất của chiếc thùng mà bạn A có thể làm được là:

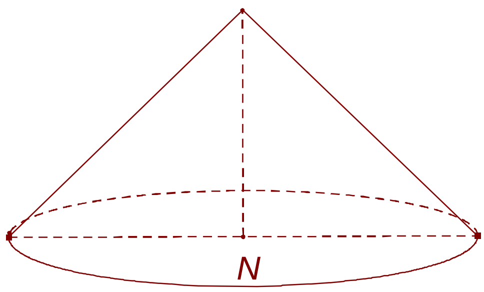
A. $\dfrac{91125}{4\pi}\left(cm^3\right)$. **B.** $\dfrac{91125}{2\pi}\left(cm^3\right)$. **C.** $\dfrac{108000\sqrt{3}}{\pi}\left(cm^3\right)$. **D.** $\dfrac{13500.\sqrt{3}}{\pi}\left(cm^3\right)$.

Câu 37: Nhà Nam có một chiếc bàn tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ m. Nam muốn mắc một bóng điện ở phía trên và chính giữa chiếc bàn sao cho mép bàn nhận được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C của bóng điện được biểu thị bởi công thức $C = c\dfrac{\sin\alpha}{l^2}$ (α là góc tạo bởi tia sáng tới mép bàn và mặt bàn, c - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng, l khoảng cách từ mép bàn tới bóng điện). Khoảng cách nam cần treo bóng điện tính từ mặt bàn là

A. 1m **B.** 1,2m **C.** 1.5 m **D.** 2m

Câu 38: Với một đĩa tròn bằng thép tráng có bán kính $R = \sqrt{6}m$ phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành hình tròn. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để hình nón có thể tích cực đại?



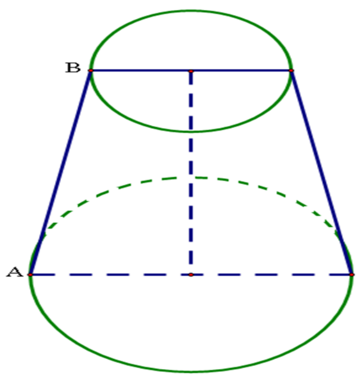


A. $\approx 66°$ **B.** $\approx 294°$ **C.** $\approx 12,56°$ **D.** $\approx 2,8°$

Câu 39: Một công ty nhận làm những chiếc thùng phi kín hay đáy với thể tích theo yêu cầu là $2\pi\, m^3$ mỗi chiếc yêu cầu tiết kiệm vật liệu nhất. Hỏi thùng phải có bán kính đáy R và chiều cao h là bao nhiêu?

A. $R = 2m, h = \dfrac{1}{2}m$. **B.** $R = \dfrac{1}{2}m, h = 8m$.**C.** $R = 4m, h = \dfrac{1}{8}m$. **D.** $R = 1m, h = 2m$.

Câu 40: Có một cái cốc làm bằng giấy, được úp ngược như hình vẽ. Chiều cao của chiếc cốc là $20cm$, bán kính đáy cốc là $4cm$, bán kính miệng cốc là $5cm$. Một con kiến đang đứng ở điểm A của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh than cốc để lên đến đáy cốc ở điểm B. Quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình gần đúng nhất với kết quả nào dưới đây?

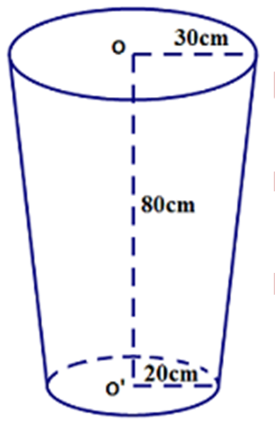


A. $59,98\,cm$ **B.** $59,93\,cm$ **C.** $58,67\,cm$ **D.** $58,80\,cm$.

Câu 41: Gia đình An xây bể hình trụ có thể tích 150 m^3. Đáy bể làm bằng bê tông giá $100\,000$ $đ/m^2$. Phần thân làm bằng tôn giá $90\,000\,đ/m^2$, nắp bằng nhôm giá $120\,000\,đ/m^2$. Hỏi khi chi phí sản suất để bể đạt mức thấp nhất thì tỷ số giữa chiều cao bể và bán kính đáy là bao nhiêu?

A. $\frac{22}{9}$. **B.** $\frac{9}{22}$. **C.** $\frac{31}{22}$. **D.** $\frac{21}{32}$.

Câu 42: Học sinh A sử dụng 1 xô đựng nước có hình dạng và kích thước giống như hình vẽ, trong đó đáy xô là hình tròn có bán kính 20 cm, miệng xô là đường tròn bán kính 30 cm, chiều cao xô là 80 cm. Mỗi tháng A dùng hết 10 xô nước**.** Hỏi A phải trả bao nhiêu tiền nước mỗi tháng, biết giá nước là 20000 đồng/1 m^3 (số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?



A. 35279 đồng. **B.** 38905 đồng. **C.** 42116 đồng. **D.** 31835 đồng.

Câu 43: Một cốc nước hình trụ có chiều cao $9cm$, đường kính $6cm$. Mặt đáy phẳng và dày $1cm$, thành cốc dày $0,2cm$. Đổ vào cốc $120ml$ nước sau đó thả vào cốc 5 viên bi có đường kính $2cm$. Hỏi mặt nước trong cốc cách mép cốc bao nhiêu cm. (Làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

A. $3,67\,cm$. **B.** $2,67\,cm$. **C.** $3,28\,cm$. **D.** $2,28\,cm$.

Câu 44: Người ta xếp 7 hình trụ có cùng bán kính đáy r và cùng chiều cao h vào một cái lọ hình trụ cũng có chiều cao h, sao cho tất cả các hình tròn đáy của hình trụ nhỏ đều tiếp xúc với đáy của hình trụ lớn, hình trụ nằm chính giữa tiếp xúc với sáu hình trụ xung quanh, mỗi hình trụ xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ lớn. Khi thể tích của lọ hình trụ lớn là:

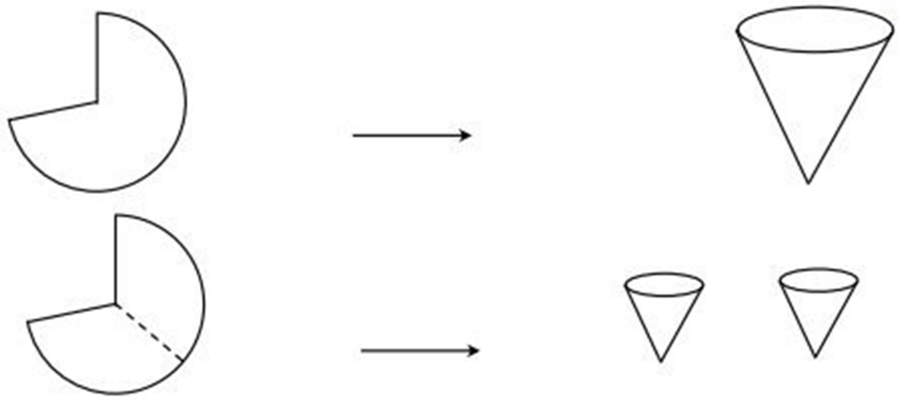
A. $16\pi r^2h$ **B.** $18\pi r^2h$ **C.** $9\pi r^2h$ **D.** $36\pi r^2h$

Câu 45: Từ cùng một tấm kim loại dẻo hình quạt như hình vẽ có kích thước bán kính $R=5$ và chu vi của hình quạt là $P=8\pi+10$, người ta gò tấm kim loại thành những chiếc phễu theo hai cách:

3. Gò tấm kim loại ban đầu thành mặt xung quanh của một cái phễu

4. Chia đôi tấm kim loại thành hai phần bằng nhau rồi gò thành mặt xung quanh của hai cái phễu

Gọi V_1 là thể tích của cái phễu thứ nhất, V_2 là tổng thể tích của hai cái phễu ở cách 2. Tính $\frac{V_1}{V_2}$?

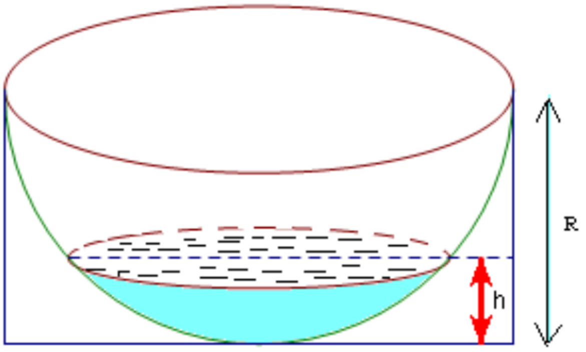


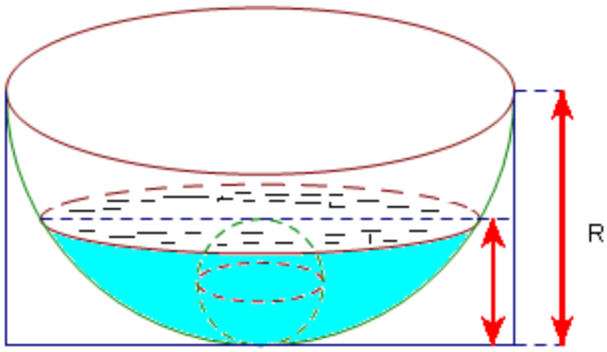
A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{21}{\sqrt{7}}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$ **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{\sqrt{6}}$ **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

Câu 46: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính $50cm$. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

A. $10\sqrt{2}cm$ **B.** $20cm$ **C.** $50\sqrt{2}cm$ **D.** $25cm$

Câu 47: Một chậu nước hình bán cầu bằng nhôm có bán kính $R=10cm$, đặt trong một khung hình hộp chữ nhật (hình 1). Trong chậu có chứa sẵn một khối nước hình chỏm cầu có chiều cao $h=4cm$. Người ta bỏ vào chậu một viên bi hình cầu bằng kim loại thì mặt nước dâng lên vừa phủ kín viên bi (hình 2). Bán kính của viên bi gần số nguyên nào sau đây. (Cho biết thể tích khối chỏm cầu là $V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$)





A. 2 **B.** 4 **C.** 7 **D.** 10

Câu 48: Một người có một dải duy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải duy băng đỏ đó quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10 cm của dải duy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải duy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

A. $4000\pi\ cm^3$ **B.** $32000\pi\ cm^3$ **C.** $1000\pi\ cm^3$ **D.** $16000\pi\ cm^3$

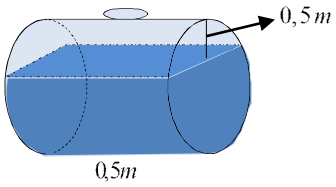
Câu 49: Một khối gạch hình lập phương (không thấm nước) có cạnh bằng 2 được đặt vào trong một chiếu phễu hình nón tròn xoay chứa đầy nước theo cách như sau: Một cạnh của viên gạch nằm trên mặt nước (nằm trên một đường kính của mặt này); các đỉnh còn lại nằm trên mặt nón; tâm của viên gạch nằm trên trục của hình nón. Tính thể tích nước còn lại ở trong phễu (làm tròn 2 chữ số thập phân).

A. V =22,27 **B.** V =22,30 **C.** V =23.10 **D.** 20,64

Câu 50: Một cái nồi hiệu Happycook dạng hình trụ không nắp chiều cao của nồi 11.4 cm, đường kính dáy là 20.8 cm. Hỏi nhà sản xuất cần miếng kim loại hình tròn có bán kính R tối thiểu là bao nhiêu để làm cái nồi như vậy (không kể quay nồi)

A. $R = 18.58cm$. **B.** $R = 19.58cm$. **C.** $R = 13.13cm$. **D.** $R = 14.13cm$.

Câu 51: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là $5m$, có bán kính đáy $1m$, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với $0,5m$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3)



A. $12,637m^3$.   **B.** $114,923m^3$.   **C.** $11,781m^3$.   **D.** $8,307m^3$.

B – HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Người ta bỏ 5 quả bóng bàn cùng kích thước vào một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng 5 lần đường kính của quả bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của 5 quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ là:

A. 2. **B.** $\frac{6}{5}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi bán kính của quả bóng bàn là R $(R>0)$

Ta có chiều cao h của hình trụ bằng 5 lần đường kính của quả bóng bàn nghĩa là: $h=5.2R=10R$

Khi đó: $S_1=5.4\pi.R^2=20\pi R^2$

Và $S_2=2\pi R.h=2\pi R.10R=20\pi R^2$

Vậy: $\frac{S_1}{S_2}=1$.

Câu 2: Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích $27cm^3$ với chiều cao là h và bán kính đáy là r để lượng giấy tiêu thụ là ít nhất thì giá trị của r là:

A. $r=\sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$. **B.** $r=\sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$. **C.** $r=\sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$. **D.** $r=\sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Thể tích của cốc: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=27\Rightarrow r^2h=\frac{81}{\pi}\Rightarrow h=\frac{81}{\pi}.\frac{1}{r^2}$

Lượng giấy tiêu thụ ít nhất khi và chỉ khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

$$S_{xq}=2\pi rl=2\pi r\sqrt{r^2+h^2}=2\pi r\sqrt{r^2+\frac{81^2}{\pi^2}\frac{1}{r^4}}=2\pi\sqrt{r^4+\frac{81^2}{\pi^2}\frac{1}{r^2}}$$

$$=2\pi\sqrt{r^4+\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}+\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}}\ge 2\pi\sqrt{3\sqrt[3]{r^4.\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}.\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}}}$$

$$=2\sqrt{3}\pi\sqrt[6]{\frac{81^4}{4\pi^4}}$$ (theo BĐT Cauchy)

S_{xq} nhỏ nhất $\Leftrightarrow r^4=\frac{81^2}{2\pi^2}\frac{1}{r^2}\Leftrightarrow r^6=\frac{3^8}{2\pi^2}\Leftrightarrow r=\sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$.

Câu 3: Một phễu đựng kem hình nón bằng giấy bạc có thể tích $12\pi\,(\text{cm}^3)$ và chiều cao là 4cm. Muốn tăng thể tích kem trong phễu hình nón lên 4 lần, nhưng chiều cao không thay đổi, diện tích miếng giấy bạc cần thêm là.

A. $(12\sqrt{13}-15)\pi\left(cm^2\right)$. **B.** $12\pi\sqrt{13}\left(cm^2\right)$.

C. $\dfrac{12\sqrt{13}}{15}\left(cm^2\right)$. **D.** $(12\sqrt{13}+15)\pi\left(cm^2\right)$

Hướng dẫn giải:

Gọi R_1 là bán kính đường tròn đáy hình nón lúc đầu; h_1 là chiều cao của hình nón lúc đầu.

Gọi R_2 là bán kính đường tròn đáy hình nón sau khi tăng thể tích; h_2 là chiều cao của hình nón sau khi tăng thể tích.

Ta có: $V_1=\frac{1}{3}\pi R_1^2h_1 \Rightarrow 12\pi=\frac{1}{3}\pi R_1^2 4 \Rightarrow R_1=3$

$$\left.\begin{array}{l} V_1=\frac{1}{3}\pi R_1^2h_1 \\ V_2=\frac{1}{3}\pi R_2^2h_2 \\ h_2=h_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1}=\frac{R_2^2}{R_1^2}=4 \Rightarrow R_2=2R_1=6$$

Diện tích xung quanh hình nón lúc đầu: $S_{xp1}=\pi R_1l_1=\pi 3\sqrt{16+9}=15\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích xung quanh hình nón sau khi tăng thể tích: $S_{xp2}=\pi R_2l_2=\pi 6\sqrt{16+36}=12\pi\sqrt{13}\left(cm^2\right)$

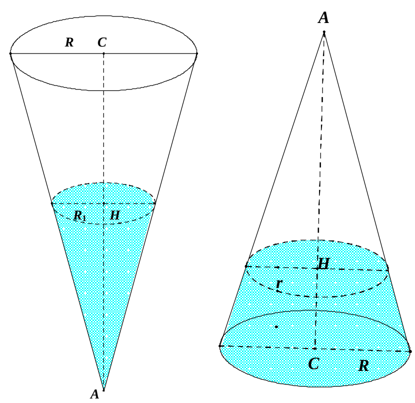
Diện tích phần giấy bạc cần tăng thêm là: $S=\left(12\sqrt{13}-15\right)\pi\left(cm^2\right)$

Chọn A.

Câu 4: Một cái phễu có dạng hình nón, chiều cao của phễu là $20\ cm$ (Hình 1) Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của cột nước trong phễu lả $10\ cm$. Nếu bịt kín miệng phễu rồi lật ngược lên (Hình 2) thì chiều cao cột nước trong phễu bằng giá trị nào sau đây

A. $10\ cm$ **B.** $0,87\ cm$

C. $1,07\ cm$ **D.** $1,35\ cm$

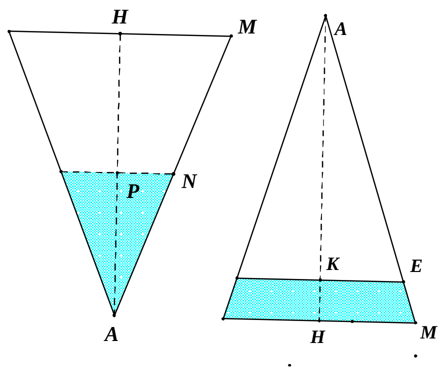


Hướng dẫn giải:

Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích của phễu, của phần chứa nước, và phần không chứa nước

Ta có $\begin{cases} V = \dfrac{1}{3}\pi.HM^2.AH \\ V_1 = \dfrac{1}{3}\pi PN^2.AP \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{PN^2.AP}{HM^2.AH} = \left(\frac{AP}{AH}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V_2}{V} = \frac{7}{8}$$

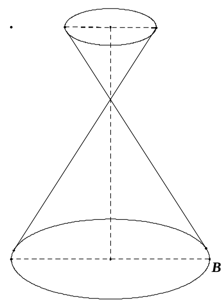


Khi lật ngược phễu. ta có:

$$\frac{V_2}{V} = \left(\frac{AK}{AH}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{7}{8} = \left(\frac{AK}{AH}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow AK = \sqrt[3]{\frac{7}{8}}.AH \Rightarrow HK = 0,87\,(cm)$$

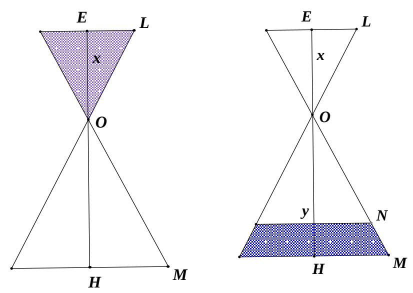
Câu 5: Cho một đồng hồ cát như hình vẽ (gồm hai hình nón chung đỉnh ghép lại) trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc 60^0. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là $30\,cm$ và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi\,(cm^3)$. Nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới. khi đó tỷ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần phía dưới là bao nhiêu



A. $\dfrac{1}{8}$ **B.** $\dfrac{1}{27}$

C. $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ **D.** $\dfrac{1}{64}$

Đặt $\begin{cases} OE = x > 0 \\ OH = y > 0 \Rightarrow x + y = 60 \quad (1) \\ x < y \end{cases}$



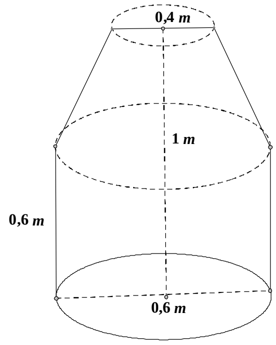
Ta có $\begin{cases} \dfrac{1}{3}\pi.EL^2.x + \dfrac{1}{3}\pi.\text{HM}^2.\text{y} = 1000\pi \\ \tan 60^0 = \dfrac{x}{EL} = \dfrac{y}{HM} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} EL^2.x + \text{HM}^2.\text{y} = 3000 \\ EL = \dfrac{x}{\sqrt{3}}; HM = \dfrac{y}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$\Rightarrow x^3 + y^3 = 9000\ (2)$.Từ $(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} x = 10\,(cm) \\ y = 20\,(cm) \end{cases}$ Khi cát chảy hết xuống dưới

$$\frac{V_{cat\,chiem\,cho}}{V_{duoi}} = \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Câu 6: Tính thể tích của thùng đựng nước có hình dạng và kích thước như hình vẽ



A. $\frac{0,238\pi}{3}\left(m^3\right)$ **B.** $\frac{0,238\pi}{\sqrt{2}}\left(m^3\right)$

C. $\frac{0,238\pi}{4}\left(m^3\right)$ **D.** $\frac{0,238\pi}{\sqrt{3}}\left(m^3\right)$

Hướng dẫn giải:

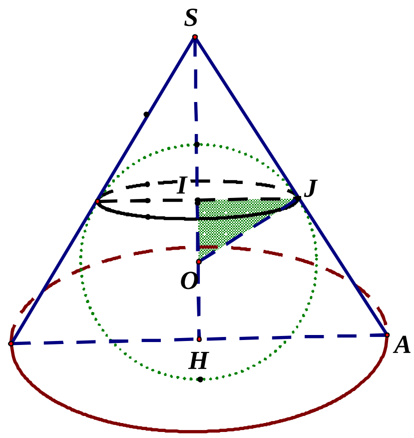
Ta có $V_{thung}=V_{tru}+V_{non\,cut}=\pi\left(0,3\right)^2.0,6+\frac{1}{3}\pi.0,4\left[\left(0,3\right)^2+\left(0,2\right)^2+0,2.0,3\right]=\frac{0,238}{3}\left(m^3\right)$

Câu 7: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính $50cm$. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

A. $10\sqrt{2}cm$ **B.** $20cm$ **C.** $50\sqrt{2}cm$ **D.** $25cm$

Hướng dẫn giải: :

Đặt $a=50cm$. Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình nón lần lượt là $x,y\left(x,y>0\right)$. Ta có



$SA=\sqrt{SH^2+AH^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

Khi đó diện tích toàn phần của hình nón là

$S_{tp}=\pi x^2+\pi x\sqrt{x^2+y^2}$

Theo giả thiết ta có:

$\pi x^2+\pi x\sqrt{x^2+y^2}=\pi a^2\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y^2}+x^2=a^2$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y^2}=a^2-x^2\Leftrightarrow$

$x^2\left(x^2+y^2\right)=a^4+x^4-2a^2x^2,\left(DK:x<a\right)\Leftrightarrow x^2=\frac{a^4}{y^2+2a^2}$

Khi đó thể tích khối nón là: $V=\frac{1}{3}\pi.\frac{a^4}{y^2+2a^2}.y=\frac{1}{3}\pi a^4.\frac{y}{y^2+2a^2}$

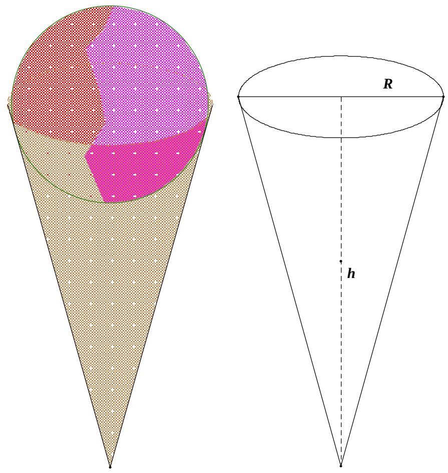
V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{y^2+2a^2}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Ta có $\frac{y^2+2a^2}{y}=y+\frac{2a^2}{y}\ge 2\sqrt{y.\frac{2a^2}{y}}=2\sqrt{2}a$

Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $y=\frac{2a^2}{y}$, tức là $y=a\sqrt{2}\Rightarrow x=\frac{a}{2}=25cm$

Chọn D.

Câu 8: Một kem ốc quế gồm hai phần, phần kem có dạng hình cầu, phần ốc quế có dạng hình nón, giả sử hình cầu và hình nón có bán kính bằng nhau, biết rằng nếu kem tan chảy hết sẽ làm đầy phần ốc quế. Biết thể tích kem sau khi tan chảy bằng 75% thể tích kem đóng băng ban đầu, gọi h, r lần lượt là chiều cao và bán kính của phần ốc quế. Tính tỷ số $\frac{h}{r}$



A. $\frac{h}{r}=3$ **B.** $\frac{h}{r}=2$

C. $\frac{h}{r}=\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{h}{r}=\frac{16}{3}$

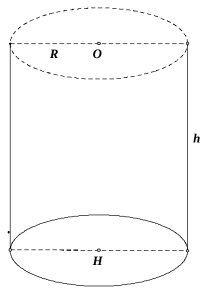
Hướng dẫn giải:

Thể tích kem ban đầu: $V_{kem(bd)}=\frac{4}{3}\pi R^3$

Thể tích phần ốc quế: $V_{ocque}=\frac{1}{3}\pi.R^2.h$

Ta có $V_{ocque}=\frac{3}{4}V_{kem(bd)} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi.R^2.h=\frac{3}{4}.\frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow \frac{h}{R}=3$

Câu 9: Một nhà sản xuất cần thiết kế một thùng sơn dạng hình trụ có nắp đậy với dung tích $1000\,cm^3$. Tính bán kính của nắp đậy để tiết kiệm được nguyên liệu nhất



A. $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\,(cm)$ **B.** $10.\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}\,(cm)$

C. $\frac{500}{\pi}\,(cm)$ **D.** $10.\sqrt{\frac{5}{\pi}}\,(cm)$

Hướng dẫn giải:

Ta có

$$S_{tp}=2.\pi R^2+2\pi Rh=2.\pi R^2+2\pi R\frac{V}{\pi.R^2}=2.\pi R^2+\frac{2V}{R}$$

$$S_{tp}=2.\pi R^2+\frac{V}{R}+\frac{V}{R}\geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}\Rightarrow \left(S_{tp}\right)_{\min}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}\Leftrightarrow 2.\pi R^2=\frac{V}{R}\Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\,(cm)$$

Câu 10: Giả sử viên phấn viết bảng có dạng hình trụ tròn xoay đường kính đáy bằng 1cm, chiều dài 6cm. Người ta làm những hộp carton đựng phấn dạng hình hộp chữ nhật có kích thước $6\times5\times6cm$. Muốn xếp 350 viên phấn vào 12 hộp, ta được kết quả nào trong 4 khả năng sau:

A. Vừa đủ **B.** Thiếu 10 viên **C.** Thừa 10 viên **D.** Không xếp được

Hướng dẫn giải:

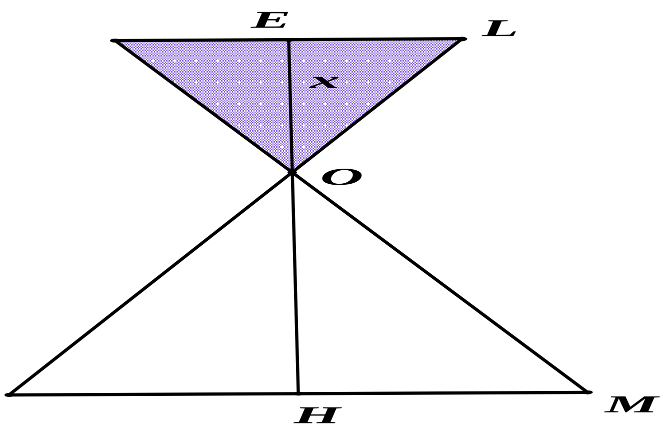
Vì chiều cao viên phấn là 6cm, nên chọn đáy hộp carton có kích thước 5×6. Mỗi viên phấn có đường kính 1cm nên mỗi hộp ta có thể đựng được 5.6=30 viên.

Số phấn đựng trong 12 hộp là: $30\times12=360$ viên

Do ta chỉ có 350 viên phấn nên thiếu 10 viên, nghĩa là đựng đầy 11 hộp, hộp 12 thiếu 10 viên.

Chọn B.

Câu 11: Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng song song với đáy thì phần hình nón nằm giữa mặt phẳng và đáy gọi là hình nón cụt. Một chiếc cốc có dạng hình nón cụt cao $9cm$, bán kính của đáy cốc và miệng cốc lần lượt là và $4cm$. Hỏi chiếc cốc có thể chứa được lượng nước tối đa là bao nhiêu trong số các lựa chọn sau:



A. $250ml$ **B.** $300ml$

C. $350ml$ **D.** $400ml$

Hướng dẫn giải:

$$\Delta AGC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AG}{AB} = \frac{GC}{BD} = \frac{3}{4} \Rightarrow AG = \frac{3}{4}AB$$

$$\Leftrightarrow \frac{AG}{AG+9} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AG = 27$$

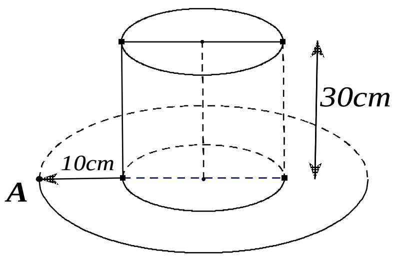
Suy ra $V_{coc} = V_{non\,lon} - V_{non\,nho}$

$$= \frac{1}{3}.\pi.4^2.(27+9) - \frac{1}{3}.\pi.3^2.27 = 111\pi \approx 348,72ml$$

Vậy lượng nước tối đa là $300ml$.

Chọn B.

Câu 12: Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với các kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không kể viền, mép, phần thừa).



A. $700\pi\left(cm^2\right)$ **B.** $754,25\pi\left(cm^2\right)$

C. $750,25\pi\left(cm^2\right)$ **D.** $756,25\pi\left(cm^2\right)$

Hướng dẫn giải:

$$S_{hinh\,tron} = \pi R^2 = \pi\left(\frac{35}{2}\right)^2;\ S_{xq\,lang\,tru} = 2\pi rl = 2\pi\left(\frac{35-20}{2}\right).30 = 450\pi$$

$$S = \pi\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 + 450\right] = 756,25\pi.$$

Chọn D.

Câu 13: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích của khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

A. 0,68. **B.** 0,6. **C.** 0,12. **D.** 0,52.

Hướng dẫn giải:

Gọi x $(x>0)$ là bán kính đáy của lon sữa.

Khi đó $V=\pi x^2h \Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi x^2}$.

Diện tích toàn phần của lon sữa là

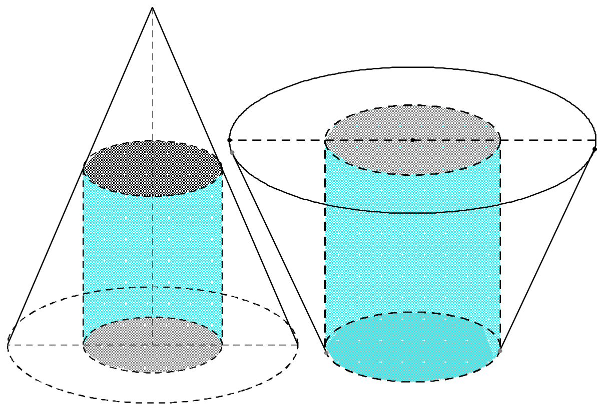
$$S(x)=2\pi x^2+2\pi xh=2\pi x^2+2\pi x\frac{V}{\pi x^2}=2\pi x^2+2\frac{2}{x}=2\pi x^2+\frac{4}{x},\ x>0$$

Bài toán quy về tìm GTNN của hàm số $S(x)=2\pi x^2+\dfrac{4}{x},\ x>0$

$$S'(x)=4\pi x-\frac{4}{x^2}$$

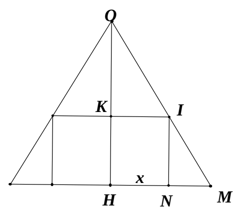
$$S'(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\approx 0,6827$$

Câu 14: Khi sản xuất hộp mì tôm, các nhà sản xuất luôn để một khoảng trống dưới đáy hộp để nước chảy xuống dưới và ngấm vào vắt mì, giúp mì chín. Hình vẽ dưới mô tả cấu trúc của hộp mì tôm. Vắt mì tôm có hình một khối trụ, hộp mì tôm có dạng hình nón cụt được cắt bởi hình nón có chiều cao $9\,cm$ và bán kính đáy là $6\,cm$. Nhà sản xuất đang tìm cách để sao cho vắt mì tôm có thể tích lớn nhất trong hộp với mục đích thu hút khách hàng. Thể tích lớn nhất đó là



A. $36\pi\left(cm^3\right)$ **B.** $54\pi\left(cm^3\right)$ **C.** $48\pi\left(cm^3\right)$ **D.** $\dfrac{81\pi}{2}\left(cm^3\right)$

Hướng dẫn giải:



Đặt $HN=x,\ (0<x<6)$. Suy ra $MN=6-x$

Ta có $\dfrac{IN}{OH}=\dfrac{MN}{HM}\Leftrightarrow IN=1,5(6-x)$

$$V_{tru}=\pi.x^2.1,5(6-x)=\frac{3}{4}.\pi.x.x.(12-2x)$$

$$\le\frac{3}{4}.\pi.\left(\frac{x+x+12-2x}{3}\right)^3=48\pi\left(cm^3\right)$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=4\ (cm)$

Câu 15: Một cái ly có dạng hình nón được rót nước vào với chiều cao mực nước bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao hình nón. Hỏi nếu bịch kính miệng ly rồi úp ngược ly xuống thì tỷ số chiều cao mực nước và chiều cao hình nón xấp xỉ bằng bao nhiêu?

A. $0,33$. **B.** $0,11$. **C.** $0,21$. **D.** $0,08$

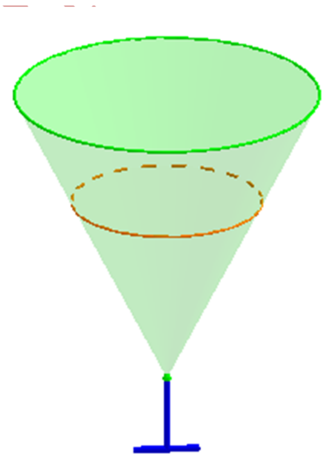
Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi chiều cao và bán kính đường tròn đáy của cái ly lần lượt là h và R.

Khi để cốc theo chiều xuôi thì lượng nước trong cốc là hình nón có chiều cao và bán kính đường tròn đáy lần lượt là $\frac{2h}{3}$ và $\frac{2R}{3}$.

Do đó thể tích lượng nước trong bình là $\frac{8V}{27} \Rightarrow$ Phần không chứa nước chiếm $\frac{19}{27}V$.



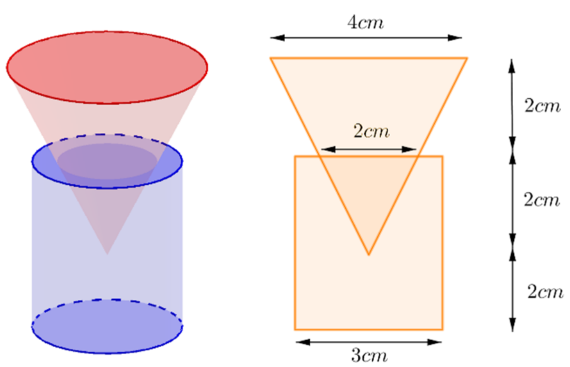
Khi úp ngược ly lại thì phần thể tích nước trong ly không đổi và lúc đó phần không chứa nước là hình nón và ta gọi h' và R' lần lượt là chiều cao và bán kính đường tròn đáy của phần hình nón không chứa nước đó.

Ta có $\frac{R'}{R} = \frac{h'}{h}$ và phần thể tích hình nón không chứa nước là $\frac{19}{27}V$

$$\Rightarrow \frac{h'}{3}.\pi R'^2 = \frac{19}{27}.\frac{h}{3}.\pi R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{h'}{h}\right)^3 = \frac{19}{27} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{\sqrt[3]{19}}{3}.$$

Do đó tỷ lệ chiều cao của phần chứa nước và chiều cao của cái ly trong trường hợp úp ngược ly là $1 - \frac{h'}{h} = \frac{3-\sqrt[3]{19}}{3}$.

Câu 16: Một nút chai thủy tinh là một khối tròn xoay (H), một mặt phẳng chứa trục của (H) cắt (H) theo một thiết diện như trong hình vẽ bên. Tính thể tích của (H) (đơn vị cm^3).



A. $V_{(H)} = 23\pi$. **B.** $V_{(H)} = 13\pi$. **C.** $V_{(H)} = \frac{41\pi}{3}$. **D.** $V_{(H)} = 17\pi$.

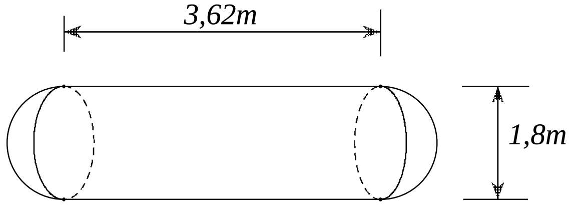
Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Thể tích khối trụ là $V_{tru} = Bh = \pi 1.5^2.4 = 9\pi$. Thể tích khối nón là $V_{non} = \frac{1}{3}\pi 2^2.4 = \frac{16\pi}{3}$.

Thể tích phần giao là: $V_{p.giao} = \frac{1}{3}\pi 1^2.2 = \frac{2\pi}{3}$. Vậy $V_{(H)} = 9\pi + \frac{16\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{41\pi}{3}$.

Câu 17: Một bồn chứa xăng có cấu tạo gồm 1 hình trụ ở giữa và 2 nửa hình cầu ở 2 đầu, biết rằng hình cầu có đường kính $1,8m$ và chiều dài của hình trụ là $3,62m$. Hỏi bồn đó có thể chứa tối đa bao nhiêu lít xăng trong các giá trị sau đây?



A. $10905l$ **B.** $23650l$ **C.** $12265l$ **D.** $20201l$

Hướng dẫn giải:

Ta có: $V_{tru} = \pi R^2 h$

Vì thể tích của 2 nửa hình cầu bằng nhau nên tổng thể tích của 2 nửa hình cầu là 1 khối cầu có $V_c = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Vậy $V_H = V_{tru} + V_C = \pi R^2 h + \frac{4}{3}\pi R^3 = 12,265m^3$

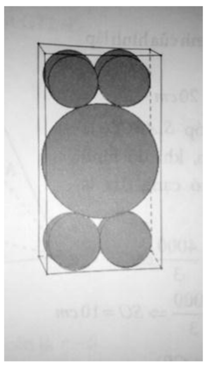
Vậy bồn xăng chứa: $12265\,l$.

Chọn C.

Câu 18: Một hình hộp chữ nhật kích thước $4\times 4\times h$ chứa một khối cầu lớn có bán kính bằng 2 và tám khối cầu nhỏ có bán kính bằng 1 sao cho các khối lớn tiếp xúc với tám khối cầu nhỏ và các khối cầu đều tiếp xúc với các mặt hình hộp. Thể tích khối hộp là:

A. $32+32\sqrt{7}$ **B.** $48+32\sqrt{5}$ **C.** $64+32\sqrt{7}$ **D.** $64\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải:



Gọi tâm hình cầu lớn là I và tâm bốn hình cầu nhỏ tiếp xúc với đáy là $ABCD$. Khi đó ta có

$I.ABCD$ là hình chóp đều với cạnh bên $IA = 3$ và cạnh đáy $AB = 2$ do đó chiều cao hình chóp là $\sqrt{7}$. Suy ra khoảng cách từ tâm I đến mặt đáy là $1+\sqrt{7}$ hay chiều cao hình hộp chữ nhật là:

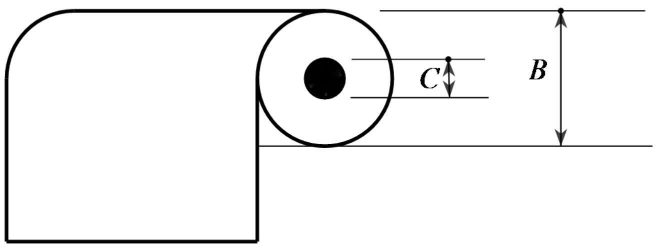
$2\left(1+\sqrt{7}\right)$ suy ra thể tích hình hộp là $32\left(1+\sqrt{7}\right)$.

Chọn A.

Câu 19: Một bang giấy dài được cuộn chặt lại thành nhiều vòng xung quanh một ống lõi hình trụ rỗng có đường kính $C = 12,5mm.$

Biết độ dày của giấy cuộn là $0,6mm$ và đường kính cả cuộn giấy là $B = 44,9mm.$

Tính chiều dài l của cuộn giấy.



A. $L \approx 44m$ **B.** $L \approx 38m$ **C.** $L \approx 4m$ **D.** $L \approx 24m$

Hướng dẫn giải:

Gọi chiều rộng của băng giấy là r, chiều dài băng giấy là L độ dày của giấy là m khi đó ta có thể tích của băng giấy: $V = r.m.L$ (1)

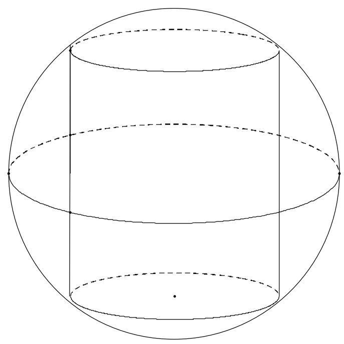
Khi cuộn lại ta cũng có thể tích: $V = \pi\left(\frac{B}{2}\right)^2.m - \pi\left(\frac{C}{24}\right)^2.m = \frac{\pi}{4}r\left(B^2 - C^2\right)$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra: $m.r.L = \frac{\pi}{4}r\left(B^2 - C^2\right) \Rightarrow L = \frac{\pi}{4m}\left(B^2 - C^2\right)$

Câu 20: Cho một khối cầu bán kính R. Đâm thủng khối cầu bởi một khối trụ có trục đi qua tâm mặt cầu và chiều dài hình trụ thu được là 6 (xem hình vẽ). Tính thể tích vật thể còn lại sau khi đục thủng.

A. 36π **B.** 54π **C.** 27π **D.** 288π

Hướng dẫn giải:



Gọi bán kính khối trụ là r.

Khi đó $r = \sqrt{R^2 - 9}$ và hai chỏm cầu có chiều cao là $h = R - 3$.

Thể tích vật thể còn lại là

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - 6\pi\left(R^2 - 9\right) - \frac{\pi\left(R-3\right)\left[3\left(R^2-9\right) + \left(R-3\right)^2\right]}{3} = 36\pi$$

Nhận xét: Kết quả không phụ thuộc vào bán kính R mà chỉ phụ thuộc vào chiều dài của hình trụ.

Chọn A.

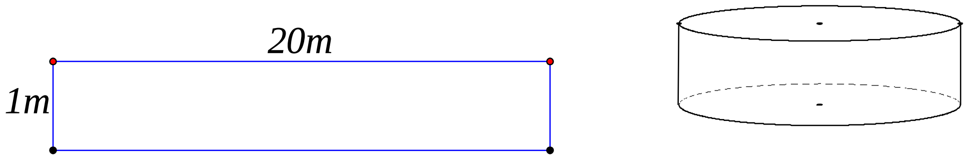
Câu 21: Một thầy giáo dự định xây dựng bể bơi di động cho học sinh nghèo miền núi từ 15 tấm tôn có kích thước $1m \times 20cm$ (biết giá $1m^2$ tôn là 90000 đồng) bằng 2 cách:

Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành 1 hình trụ như hình 1.

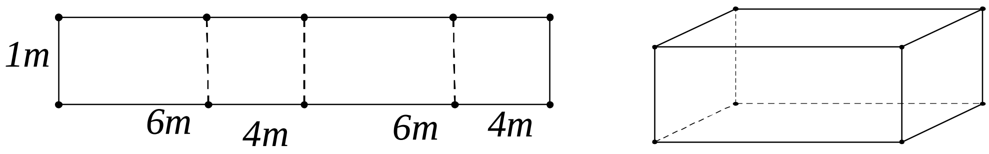
Cách 2: Chia chiều dài tấm tôn thành 4 phần rồi gò tấm tôn thành 1 hình hộp chữ nhật như hình 2.

Biết sau khi xây xong bể theo dự định, mức nước chỉ đổ đến $0,8m$ và giá nước cho đơn vị sự nghiệp là $9955dong\,/\,m^3$. Chi phí trong tay thầy hiệu trưởng là 2 triệu đồng. Hỏi thầy giáo sẽ chọn cách làm nào để không vượt quá kinh phí (giả sử chỉ tính đến các chi phí theo dữ kiện trong bài toán).

Hình 1



Hình 2



A. Cả 2 cách như nhau **B.** Không chọn cách nào

C. Cách 2 **D.** Cách 1

Hướng dẫn giải:

Ở cách 2:

$1m^2 \to 90.000$

$20m^2 \to 1.800.000$

Ta có $V_{nuoc} = 0,8.6.4 = 19,2m^3$

Do đó tổng tiền ở phương án 2 là $19,2.9955 + 20.90000 = 1.991.136$.

Ở cách 2:

$20m^2 \to 1.800.000$

Ta có $20 = 2\pi r \Rightarrow r = \dfrac{10}{\pi} \Rightarrow V_{nuoc} = h\pi r^2 = 0,8.\pi.\left(\dfrac{10}{\pi}\right)^2 \approx 25,46m^3$

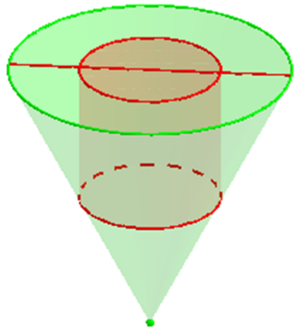
Do đó tiền nước: 253.454 đồng

Tổng tiền: 2.053.454 đồng.

Vậy thầy nên chọn cách 2.

Chọn C.

Câu 22: Một bình đựng nước dạng hình nón (không có nắp đáy), đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào bình đó một khối trụ và đo được thể tích nước trào ra ngoài là $\dfrac{16\pi}{9}(dm^3)$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của hình nón và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón (như hình vẽ dưới). Tính bán kính đáy R của bình nước.



A. $R=3\left(dm\right).$ **B.** $R=4\left(dm\right).$

C. $R=2\left(dm\right).$ **D.** $R=5\left(dm\right).$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi h,h' lần lượt là chiều cao của khối nón và khối trụ.

R,r lần lượt là bán kính của khối nón và khối trụ.

Theo đề ta có: $h=3R,h'=2R.$

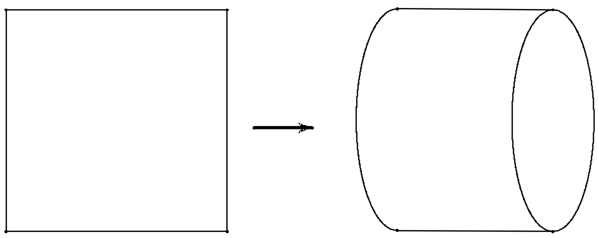
Xét tam giác SOA ta có: $\dfrac{r}{R}=\dfrac{IM}{OA}=\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{h-h'}{h}=\dfrac{3R-2R}{3R}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow r=\dfrac{1}{3}R$. Ta lại có: $V_{\text{trô}}=\pi r^2h'=\pi\cdot\dfrac{R^2}{9}\cdot 2R=\dfrac{2\pi R^3}{9}=\dfrac{16\pi}{9}$

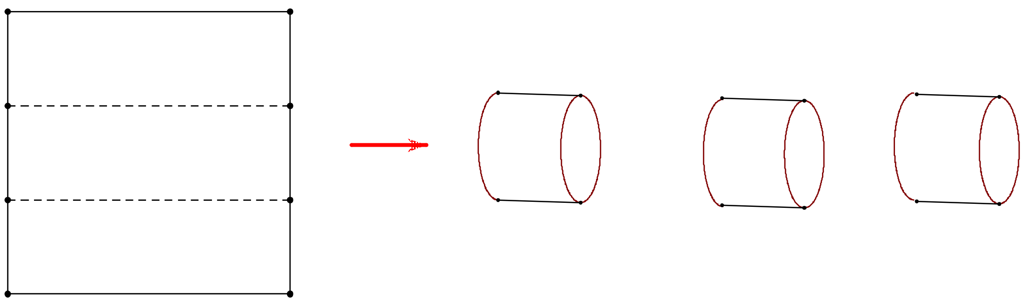
$\Rightarrow R^3=8\Leftrightarrow R=2\ dm.$

Câu 23: Có một miếng nhôm hình vuông, cạnh là $3dm,$ một người dự định tính tạo thành các hình trụ (không đáy) theo hai cách sau:

Cách 1: Gò hai mép hình vuông để thành mặt xunng quanh của một hình trụ, gọi thể tích của khối trụ đó là V_1.



Cách 2: Cắt hình vuông ra làm ba và gò thành mặt xung quanh của ba hình trụ, gọi tổng thể tích của chúng là V_2.



Khi đó, tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ là:

A. 3 **B.** 2 **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{1}{3}$

Hướng dẫn giải:

Gọi R_1 là bán kính đáy của khối trụ thứ nhất, có: $2\pi R_1=3\Leftrightarrow R_1=\dfrac{3}{2\pi}\Rightarrow V_1=\pi R_1^{\,2}h=\dfrac{27}{4\pi}$

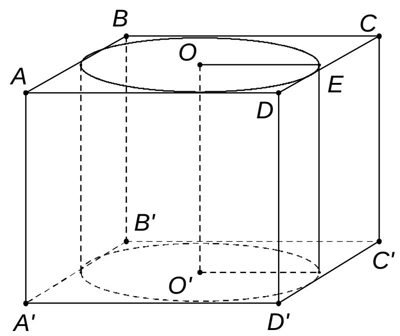
Gọi R_2 là bán kính đáy của khối trụ thứ hai, có: $2\pi R_2 = 1 \Leftrightarrow R_2 = \dfrac{1}{2\pi} \Rightarrow V_2 = \pi {R_2}^2 h = \dfrac{9}{4\pi}$

Chọn A.

Câu 24: Một chiếc hộp hình lập phương cạnh a bị khoét một khoảng trống có dạng là một khối lăng trụ với hai đáy là hai đường tròn nội tiếp của hai mặt đối diện của hình hộp. Sau đó, người ta dùng bìa cứng dán kín hai mặt vừa bị cắt của chiếc hộp lại như cũ, chỉ chừa lại khoảng trống bên trong. Tính thể tích của khoảng trống tạo bởi khối trụ này.

A. πa^3 **B.** $\dfrac{1}{2}\pi a^3$ **C.** $\dfrac{1}{4}\pi a^3$ **D.** $\dfrac{1}{8}\pi a^3$

Hướng dẫn giải:



Ta có $OE = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}$;

$OO' = a$

Thể tích là:

$V = \pi.OE^2.OO' = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2.\pi.a = \dfrac{\pi a^3}{4}$.

Chọn C.

Câu 25: Người ta dùng một loại vải vintage để bọc quả khối khí của khinh khí cầu, biết rằng quả khối này có dạng hình cầu đường kính $2m$. Biết rằng $1m^2$ vải có giá là 200.000 đồng. Hỏi cần tối thiểu bao nhiêu tiền mua vải để làm khinh khí cầu này?

A. 2.500.470 đồng **B.** 3.150.342 đồng

C. 2.513.274 đồng **D.** 2.718.920 đồng

Hướng dẫn giải:

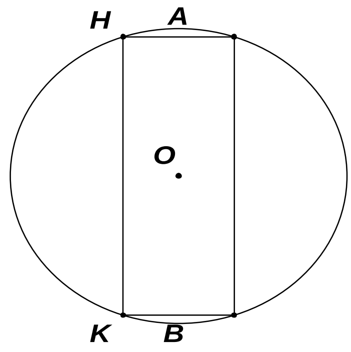
$S_{mat\ cau} = 4\pi R^2$

Với $R = \dfrac{d}{2} = 1(m)$. Vậy $S_{mat\ cau} = 4\pi.1^2 = 4\pi\left(m^2\right)$

Vậy cần tối thiểu số tiền: $4\pi.200000 = 2.513.274$ đồng.

Chọn C.

Câu 26: Cho biết rằng hình chỏm cầu có công thức thể tích là $\dfrac{\pi h\left(3r^2 + h^2\right)}{6}$, trong đó h là chiều cao chỏm cầu và r là bán kính đường tròn bề mặt chỏm cầu (bán kính này khác vớibán kính hình cầu). Bài hỏi đặt ra là với một quả dưa hấu hình cầu, người ta dùng một cái ống khoét thủng một lỗ hình trụ chưa rõ bán kính xuyên qua trái dưa như hình vẽ (trong hình có AB là đường kính trái dưa). Biết rằng chiều cao của lỗ là $12cm$ (trong hình trên, chiều cao này chính là độ dài HK). Tính thể tích của phần



dưa còn lại.

A. $200\pi cm^3$ **B.** $96\pi cm^3$ **C.** $288\pi cm^3$ **D.** $144\pi cm^3$

Hướng dẫn giải:

Đặt r là bán kính của hình cầu.

Chiều cao của lỗ là 12 nên chiều cao của chỏm cầu lag $r-6$.

Bán kính của chỏm cầu, cũng là bán kính đáy của hình trụ và là: $\sqrt{r^2-36}$

Thể tích hình trụ là $12\pi\left(r^2-36\right)$.

Thể tích 2 chỏm cầu: $\dfrac{2\pi(r-6)\left[\left(3\left(r^2-36\right)+(r-6)^2\right)\right]}{6}=\dfrac{\pi(r-6)\left(4r^2-12r-72\right)}{3}$

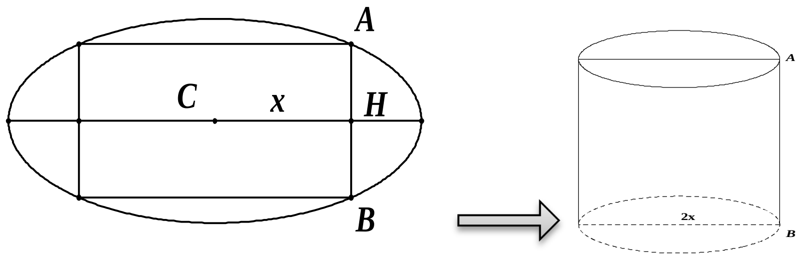
Thể tích cái lỗ là: $12\pi\left(r^2-36\right)+\dfrac{\pi(r-6)\left(4r^2-12r-72\right)}{3}$

$$=\pi(r-6)\left[12(r+6)+\frac{4r^2-12r-72}{3}\right]=\frac{\pi(r-6)\left(4r^2+24r+144\right)}{3}=\frac{4\pi\left(r^3-6^3\right)}{3}=\frac{4\pi r^3}{3}-288\pi$$

Thể tích hình cầu là $\dfrac{4\pi r^3}{3}$ nên thể tích cần tìm là: $V=288\pi$.

Chọn C.

Câu 27: người ta cần cắt một tấm tôn có hình dạng một elip với độ dài trục lớn bằng 8 độ dài trục bé bằng 4 để được một tấm tôn có dạng hình chữ nhật nội tiếp elíp. Người ta gò tấm tôn hình chữ nhật thu được thành một hình trụ không có đáy như hình bên. Tính thể tích lớn nhất có thể thu được của khối trụ đó



A. $\dfrac{128\sqrt{3}}{\pi}\left(cm^3\right)$ **B.** $\dfrac{64}{3\sqrt{2}\pi}\left(cm^3\right)$ **C.** $\dfrac{64}{3\sqrt{3}\pi}\left(cm^3\right)$ **D.** $\dfrac{128}{3\sqrt{2}\pi}\left(cm^3\right)$

Hướng dẫn giải:

Ta có $(E):\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{16}=1\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$. Chu vi 1 đáy của hình trụ $2\pi R=2x\Leftrightarrow R=\dfrac{x}{\pi}$

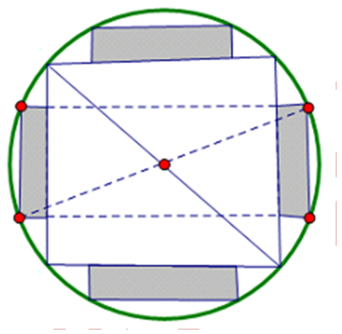
Ta có $AH=\dfrac{1}{2}\sqrt{16-x^2}\Rightarrow h=\sqrt{16-x^2}\Rightarrow V_{tru}=\pi.R^2.h=\pi\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2.\sqrt{16-x^2}=\pi x^2\sqrt{16-x^2}$

Đặt $f(x)=x^2\sqrt{16-x^2}$ $(-4<x<4)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-32x^3+32x}{\sqrt{16-x^2}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{\dfrac{32}{3}}\end{array}\right.$

$\Rightarrow \max f(x)=f\left(\pm\sqrt{\dfrac{32}{3}}\right)=\dfrac{128\sqrt{3}}{9}\Rightarrow V_{\max}=\dfrac{128\sqrt{3}}{9\pi}$

TỔNG QUÁT: Elip có độ dài trục lớn $2a$, trục bé $2b$ khi đó $(V_{tru})_{\max}=\dfrac{4a^2b}{3\sqrt{3}\pi}$

Câu 28: Từ một khúc gỗ tròn hình trụ có đường kính bằng 40 cm, cần xả thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ được tô màu xám như hình vẽ dưới đây. Tìm chiều rộng x của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất.



A. $x=\dfrac{3\sqrt{34}-17\sqrt{2}}{2}(cm)$

B. $x=\dfrac{3\sqrt{34}-19\sqrt{2}}{2}(cm)$

C. $x=\dfrac{5\sqrt{34}-15\sqrt{2}}{2}(cm)$

D. $x=\dfrac{5\sqrt{34}-13\sqrt{2}}{2}(cm)$

Hướng dẫn giải:

Diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là $S=S_{MNPQ}+4xy$

Cạnh hình vuông $MN=\dfrac{MP}{\sqrt{2}}=\dfrac{40}{\sqrt{2}}=20\sqrt{2}(cm)$

$\Rightarrow S=\left(20\sqrt{2}\right)^2+4xy=800+4xy$ (1)

Ta có $2x=AB-MN=AB-20\sqrt{2}<BD-20\sqrt{2}=40-20\sqrt{2}\Rightarrow 0<x<20-10\sqrt{2}$

Lại có $AB^2+AD^2=BD^2=40^2\Rightarrow\left(2x+20\sqrt{2}\right)^2+y^2=1600$

$\Rightarrow y^2=800-80x\sqrt{2}-4x^2\Rightarrow y=\sqrt{800-80x\sqrt{2}-4x^2}$

Thế vào $(1)\Rightarrow S=800+4x\sqrt{800-80x\sqrt{2}-4x^2}=800+4\sqrt{800x^2-80x^3\sqrt{2}-4x^4}$

Xét hàm số $f(x)=800x^2-80x^3\sqrt{2}-4x^4$, với $x\in\left(0;20-10\sqrt{2}\right)$ có

$f'(x)=1600x-240x^2\sqrt{2}-16x^3=16x\left(100-15x\sqrt{2}-x^2\right)$

Ta có $\begin{cases} x \in \left(0;20-10\sqrt{2}\right) \\ f'(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(0;20-10\sqrt{2}\right) \\ 16x\left(100-15x\sqrt{2}-x^2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{5\sqrt{34}-15\sqrt{2}}{2}$

Khi đó $x=\dfrac{5\sqrt{34}-15\sqrt{2}}{2}$ chính là giá trị thỏa mãn bài toán.

Chọn C.

Câu 29: Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp 3 lần so với giá làm vật liệu xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi h là chiều cao của thùng và bán kinh đáy là R. Tính tỷ số $\dfrac{h}{R}$ sao cho chi phí làm thùng là nhỏ nhất

A. $\dfrac{h}{R}=2$ **B.** $\dfrac{h}{R}=\sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{h}{R}=3\sqrt{2}$ **D.** $\dfrac{h}{R}=6$

Hướng dẫn giải:

Gọi V là thể tích của khối trụ, T là giá tiền cho một đơn vị S_{xq}

Ta có $V_{tru}=\pi.R^2.\text{h} \Leftrightarrow \text{h}=\dfrac{V_{tru}}{\pi R^2}$

Ta có $\begin{cases} S_{2day}=2\pi R^2 \\ S_{xq}=2\pi R.h=2\pi R.\dfrac{V_{tru}}{\pi R^2}=\dfrac{2V_{tru}}{R} \end{cases}$

Giá vật liệu để làm 2 đáy là: $G_{2d}=2\pi R^2.3T=6\pi T.R^2$, Giá vật liệu làm xung quanh thùng $G_{xq}=\dfrac{2V_{tru}}{R}.T$

Giá vật liệu làm thùng là:

$$G_{thung}=\frac{2V_{tru}.T}{R}+6\pi T.R^2=\frac{V_{tru}.T}{R}+\frac{V_{tru}.T}{R}+6\pi T.R^2 \ge 3\sqrt[3]{6V_{tru}^2}.T\ (const)$$

$$\Rightarrow \left(G_{thung}\right)_{\min}=3\sqrt[3]{6V_{tru}^2}.T \Leftrightarrow \frac{V_{tru}.T}{R}=6\pi T.R^2 \Leftrightarrow V_{tru}=6\pi R^3 \Rightarrow \frac{h}{R}=6$$

Câu 30: Một nhà máy sản xuất cần thiết kế một thùng sơn dạng hình trụ có nắp đậy với dung tích $1000\,cm^3$. Bán kính của nắp đậy để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất bằng

A. $\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}\ cm$. **B.** $10.\sqrt[3]{\dfrac{5}{\pi}}\ cm$. **C.** $\dfrac{500}{\pi}\ cm$. **D.** $10.\sqrt{\dfrac{5}{\pi}}\ cm$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi $h\ (cm)$ là chiều cao hình trụ và $R\ (cm)$ là bán kính nắp đậy.

Ta có: $V=\pi R^2h=1000$. Suy ra $h=\dfrac{1000}{\pi R^2}$.

Để nhà sản xuất tiết kiệm nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ nhỏ nhất.

Ta có: $S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + 2\pi R.\dfrac{1000}{\pi R^2}$

$= 2\pi R^2 + \dfrac{1000}{R} + \dfrac{1000}{R} \geq 3.\sqrt[3]{2\pi R^2.\dfrac{1000}{R}.\dfrac{1000}{R}} = 3\sqrt[3]{2\pi.1000^2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2\pi R^2 = \dfrac{1000}{R} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$.

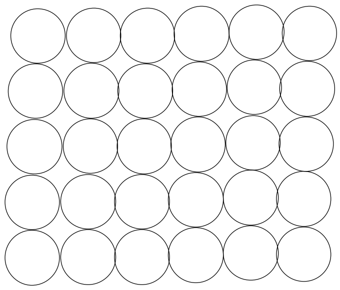
Câu 31: Một viên phấn bảng có dạng một khối trụ với bán kính đáy bằng $0,5cm$, chiều dài $6cm$. Người ta làm một hình hộp chữ nhật bằng carton đựng các viên phấn đó với kích thước $6cm \times 5cm \times 6cm$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu hộp kích thước như trên để xếp 460 viên phấn?

A. 17. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 18.

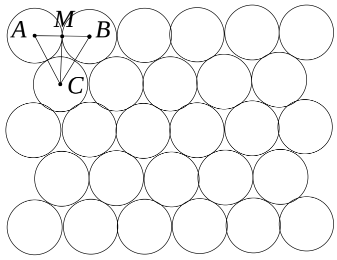
Hướng dẫn giải:

Chọn C.

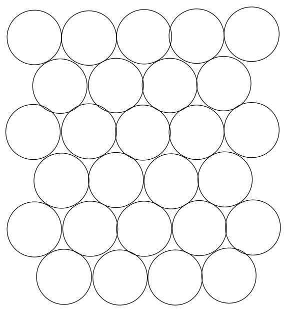
Có 3 cách xếp phấn theo hình vẽ dưới đây:



$H1$



$H2$



$H3$

- Nếu xếp theo hình $H1$: vì đường kính viên phấn là $2.0,5 = 1cm$ nên mỗi hộp xếp được tối đa số viên phấn là: $6.5 = 30$.
- Nếu xếp theo hình $H2$: hàng 6 viên xen kẽ hàng 5 viên. Gọi số hàng xếp được là $n+1, n \in \mathbb{Z}_+$.

  Ta có ΔABC đều cạnh bằng $1 \Rightarrow CM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

  Ta phải có $2.0,5 + n.\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq 5 \Rightarrow n \leq \dfrac{8}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ xếp tối đa được 5 hàng $\Rightarrow$ mỗi hộp xếp được tối đa số viên phấn là: $3.6 + 2.5 = 28$.
- Nếu xếp theo hình $H3$: hàng 5 viên xen kẽ hàng 4 viên. Gọi số hàng xếp được là $m+1, m \in \mathbb{Z}_+$.

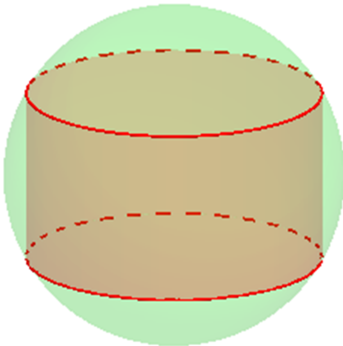
  Ta phải có $2.0,5 + m.\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq 6 \Rightarrow m \leq \dfrac{10}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ xếp tối đa được 6 hàng $\Rightarrow$ nên mỗi hộp xếp được tối đa số viên phấn là: $3.5 + 3.4 = 27$.

Vậy, xếp theo hình $H1$ thì xếp được nhiều phấn nhất, nên cần ít hộp nhất.
Ta có $460 : 30 \approx 15,3$ $\Rightarrow$ cần ít nhất 16 hộp để xếp hết 460 viên phấn.

Câu 32: Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.

A. $\frac{100}{3}\pi\left(dm^3\right)$ **B.** $\frac{43}{3}\pi\left(dm^3\right)$

C. $41\pi\left(dm^3\right)$ **D.** $132\pi\left(dm^3\right)$



Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Cách 1: Trên hệ trục tọa độ Oxy, xét đường tròn $(C):(x-5)^2+y^2=25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C), trục Ox, hai đường thẳng $x=0,\ x=2$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài.

Ta có $(x-5)^2+y^2=25 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{25-(x-5)^2}$

$\Rightarrow$ Nửa trên trục Ox của (C) có phương trình $y=\sqrt{25-(x-5)^2}=\sqrt{10x-x^2}$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1=\pi\int_0^2\left(10x-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(5x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{52\pi}{3}$$

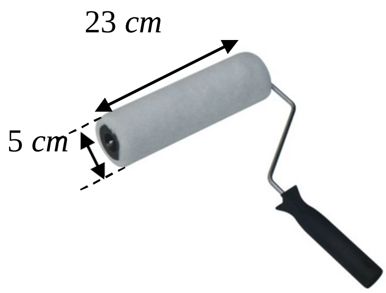
Thể tích khối cầu là: $V_2=\frac{4}{3}\pi.5^3=\frac{500\pi}{3}$

Thể tích cần tìm: $V=V_2-2V_1=\frac{500\pi}{3}-2.\frac{52\pi}{3}=132\pi\left(dm^3\right)$

Câu 33: Một cái tục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là $5cm$, chiều dài lăn là $23cm$ (hình bên). Sau khi lăn trọn 15 vòng thì trục lăn tạo nên sân phẳng một diện diện tích là

A. $1725\pi\ cm^2$. **B.** $3450\pi\ cm^2$.

C. $1725\pi\ cm^2$. **D.** $862,5\pi\ cm^2$.



Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Diện tích xung quanh của mặt trụ là $S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi.5.23 = 230\pi cm^2$.

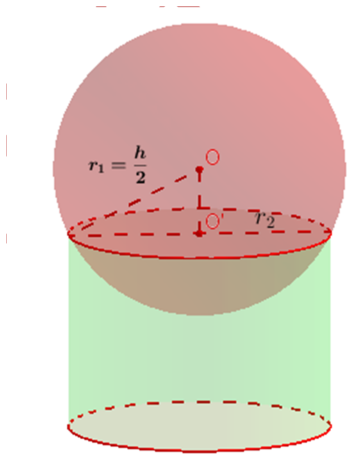
Sau khi lăn 15 vòng thì diện tích phần sơn được là: $S = 230\pi.15 = 3450\pi cm^2$.

Câu 34: Một quả bóng bàn và một chiếc chén hình trụ có cùng chiều cao. Người ta đặt quả bóng lên chiếc chén thấy phần ở ngoài của quả bóng có chiều cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao của nó. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của quả bóng và chiếc chén, khi đó:

A. $9V_1 = 8V_2$. **B.** $3V_1 = 2V_2$. **C.** $16V_1 = 9V_2$. **D.** $27V_1 = 8V_2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.



Gọi r_1 là bán kính quả bóng, r_2 là bán kính chiếc chén, h là chiều cao chiếc chén.

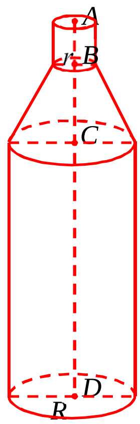
Theo giả thiết ta có $h = 2r_1 \Rightarrow r_1 = 2h$ và $OO' = \frac{r_1}{2} = \frac{h}{4}$.

Ta có $r_2^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}h^2$.

Thể tích của quả bóng là $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi h^3$

và thể tích của chén nước là $V_2 = B.h = \pi r_2^2 h = \frac{3}{16}\pi h^3 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{9}$.

Câu 35: Phần không gian bên trong của chai nước ngọt có hình dạng như hình bên. Biết bán kính đáy bằng $R = 5cm$, bán kính cổ $r = 2cm$, $AB = 3cm$, $BC = 6cm$, $CD = 16cm$. Thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt đó bằng:



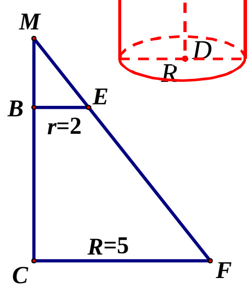
A. $495\pi\left(cm^3\right)$. **B.** $462\pi\left(cm^3\right)$.

C. $490\pi\left(cm^3\right)$. **D.** $412\pi\left(cm^3\right)$.

Hướng dẫn giải:

Thể tích khối trụ có đường cao CD: $V_1 = \pi R^2.CD = 400\pi\left(cm^3\right)$.

Thể tích khối trụ có đường cao AB: $V_2 = \pi r^2.AB = 12\pi\left(cm^3\right)$.



Ta có $\frac{MC}{MB} = \frac{CF}{BE} = \frac{5}{2} \Rightarrow MB = 4$

Thể tích phần giới hạn giữa BC:

$V_3 = \frac{\pi}{3}\left(R^2.MC - r^2.MB\right) = 78\pi\left(cm^3\right)$.

Suy ra: $V = V_1 + V_2 + V_3 = 490\pi\left(cm^3\right)$.

Chọn C.

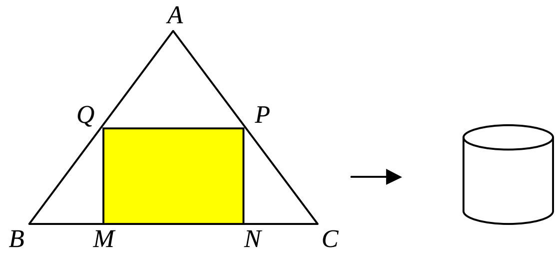
Câu 36: Bạn A muốn làm một chiếc thùng hình trụ không đáy từ nguyên liệu là mảnh tôn hình tam giác đều ABC có cạnh bằng 90 (cm). Bạn muốn cắt mảnh tôn hình chữ nhật $MNPQ$ từ mảnh tôn nguyên liệu (với M, N thuộc cạnh BC; P và Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB) để tạo thành hình trụ có chiều cao bằng MQ. Thể tích lớn nhất của chiếc thùng mà bạn A có thể làm được là:

A. $\dfrac{91125}{4\pi}\left(cm^3\right)$. **B.** $\dfrac{91125}{2\pi}\left(cm^3\right)$.

C. $\dfrac{108000\sqrt{3}}{\pi}\left(cm^3\right)$. **D.** $\dfrac{13500.\sqrt{3}}{\pi}\left(cm^3\right)$.

Hướng dẫn giải:

Gọi I là trung điểm BC. Suy ra I là trung điểm MN



Đặt MN=x ($0<x<90$);

$\Rightarrow \dfrac{MQ}{AI}=\dfrac{BM}{BI} \Rightarrow MQ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(90-x)$

Gọi R là bán kính của trụ $\Rightarrow R=\dfrac{x}{2\pi}$

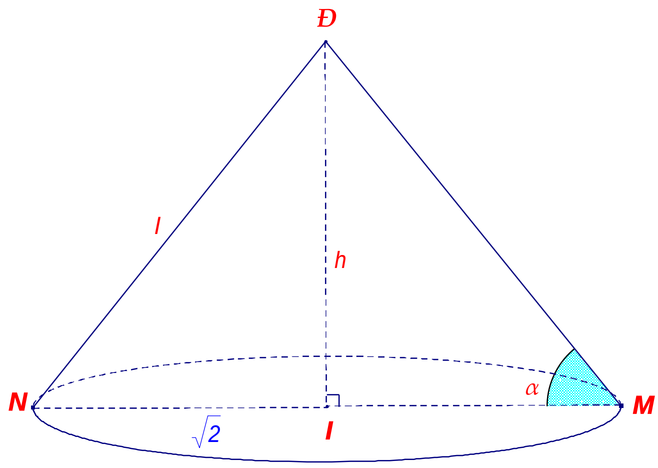
$\Rightarrow V_T=\pi(\dfrac{x}{2\pi})^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}(90-x)=\dfrac{\sqrt{3}}{8\pi}(-x^3+90x^2)$

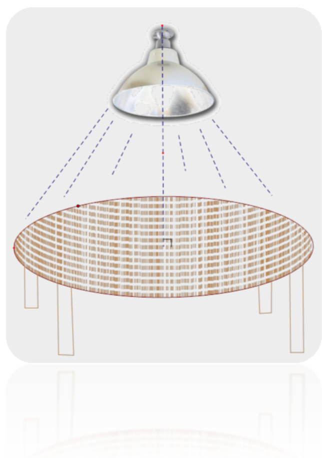
Xét $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{8\pi}(-x^3+90x^2)$ với $0<x<90$. Khi đó: $\max\limits_{x\in(0;90)} f(x)=\dfrac{13500.\sqrt{3}}{\pi}$ khi x= 60.

Câu 37: Nhà Nam có một chiếc bàn tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ m. Nam muốn mắc một bóng điện ở phía trên và chính giữa chiếc bàn sao cho mép bàn nhận được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C của bóng điện được biểu thị bởi công thức $C=c\dfrac{\sin\alpha}{l^2}$ (α là góc tạo bởi tia sáng tới mép bàn và mặt bàn, c - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng, l khoảng cách từ mép bàn tới bóng điện). Khoảng cách nam cần treo bóng điện tính từ mặt bàn là

A. 1m **B.** 1,2m **C.** 1.5 m **D.** 2m

Hướng dẫn giải:





Gọi h là độ cao của bóng điện so với mặt bàn (h > 0); Đ là bóng điện; I là hình chiếu của Đ lên mặt bàn. MN là đường kính của mặt bàn.(như hình vẽ)

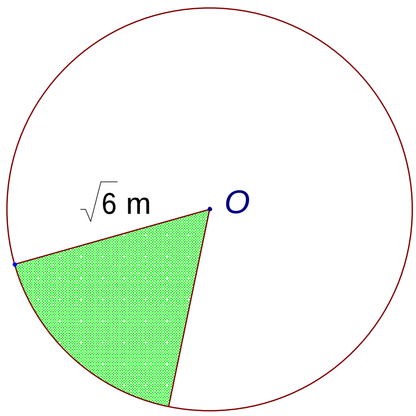
Ta có $\sin\alpha = \dfrac{h}{l}$ và $h^2 = l^2 - 2$, suy ra cường độ sáng là: $C(l) = c\dfrac{\sqrt{l^2-2}}{l^3}$ $(l > \sqrt{2})$.

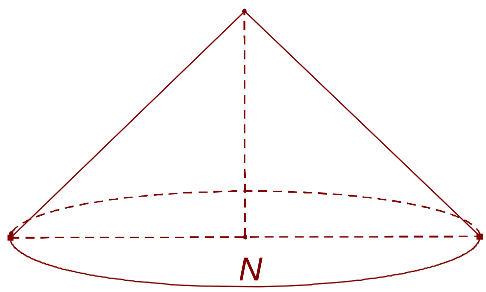
$C'(l) = c.\dfrac{6-l^2}{l^4.\sqrt{l^2-2}} > 0\left(\forall l > \sqrt{2}\right)$

$C'(l) = 0 \Leftrightarrow l = \sqrt{6}\left(l > \sqrt{2}\right)$

Lập bảng biến thiên ta thu được kết quả C lớn nhất khi $l = \sqrt{6}$, khi đó

Câu 38: Với một đĩa tròn bằng thép tráng có bán kính $R = \sqrt{6}m$ phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành hình tròn. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để hình nón có thể tích cực đại?





A. $\approx 66°$ **B.** $\approx 294°$ **C.** $\approx 12,56°$ **D.** $\approx 2,8°$

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có thể nhận thấy đường sinh của hình nón là bán kính của đĩa tròn. Còn chu vi đáy của hình nón chính là chu vi của đĩa trừ đi độ dài cung tròn đã cắt. Như vậy ta tiến hành giải chi tiết như sau:

Gọi $x(m)$ là độ dài đáy của hình nón (phần còn lại sau khi cắt cung hình quạt của đĩa).

Khi đó $x = 2\pi r \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$

Chiều cao của hình nón tính theo định lí PITAGO là $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$

Thể tích khối nón sẽ là: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{x^2}{4\pi^2}\sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$

Đến đây các em đạo hàm hàm $V(x)$ tìm được GTLN của $V(x)$ đạt được khi

$x = \dfrac{2\pi}{3}R\sqrt{6} = 4\pi$

Suy ra độ dài cung tròn bị cắt đi là: $2\pi R - 4\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\sqrt{6}\pi - 4\pi}{2\sqrt{6}\pi}360^0 \approx 66^0$

Câu 39: Một công ty nhận làm những chiếc thùng phi kín hay đáy với thể tích theo yêu cầu là $2\pi\, m^3$ mỗi chiếc yêu cầu tiết kiệm vật liệu nhất. Hỏi thùng phải có bán kính đáy R và chiều cao h là bao nhiêu?

A. $R = 2m, h = \dfrac{1}{2}m$. **B.** $R = \dfrac{1}{2}m, h = 8m$.**C.** $R = 4m, h = \dfrac{1}{8}m$. **D.** $R = 1m, h = 2m$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Gọi R là bán kính đáy thùng (m), h: là chiều cao của thùng (m). ĐK: $R > 0, h > 0$

Thể tích của thùng là: $V = \pi R^2 h = 2\pi \Leftrightarrow R^2 h = 2 \Leftrightarrow h = \dfrac{2}{R^2}$

Diện tích toàn phần của thùng là:

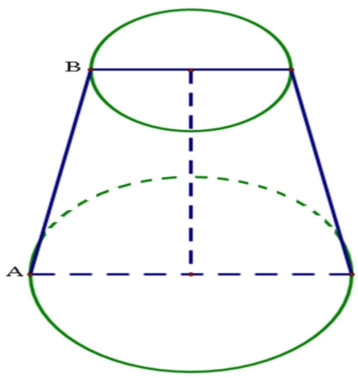
$$S_{tp} = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi R(h+R) = 2\pi R\left(\frac{2}{R^2} + R\right) = 2\pi\left(\frac{2}{R} + R^2\right)$$

Đặt $f(t) = 2\pi\left(\dfrac{2}{t} + t^2\right)(t > 0)$ với $t = R$

$$f'(t) = 4\pi\left(t - \frac{1}{t^2}\right) = \frac{4\pi(t^3 - 1)}{t^2}, f'(1) = 0 \Leftrightarrow t^3 = 1 \Leftrightarrow t = 1$$

Từ bảng biến thiên….. ta cần chế tạo thùng với kích thước $R = 1m, h = 2m$

Câu 40: Có một cái cốc làm bằng giấy, được úp ngược như hình vẽ. Chiều cao của chiếc cốc là $20\,cm$, bán kính đáy cốc là $4cm$, bán kính miệng cốc là $5cm$. Một con kiến đang đứng ở điểm A của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh than cốc để lên đến đáy cốc ở điểm B. Quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình gần đúng nhất với kết quả nào dưới đây?

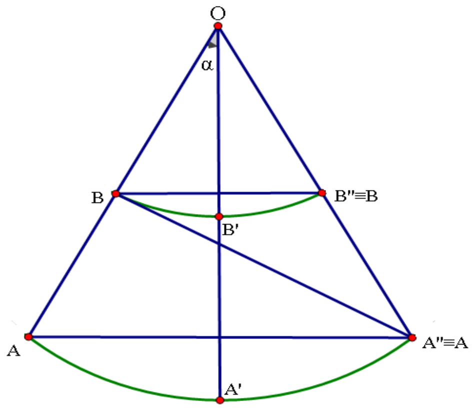


A. $59,98\,cm$ **B.** $59,93\,cm$ **C.** $58,67\,cm$ **D.** $58,80\,cm$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Đặt b, a, h lần lượt là bán kính đáy cốc, miệng cốc và chiều cao của cốc, α là góc kí hiệu như trên hình vẽ. Ta "trải" hai lần mặt xung quanh cốc lên mặt phẳng sẽ được một hình quạt của một khuyên với cung nhỏ $BB'' = 4\pi b$ và cung lớn $AA'' = 4\pi a$.



Độ dài ngắn nhất của đường đi của con kiến là độ dài đoạn thẳng BA". Áp dụng định lí hàm số cosin ta được:

$l = \sqrt{BO^2 + OA''^2 - 2BO.OA''.\cos 2\alpha}$ (1).

$B''A'' = AB = \sqrt{(a-b)^2 + h^2}$. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4\pi a}{4\pi b} = \dfrac{l(\overset{\frown}{BB''})}{l(\overset{\frown}{AA''})} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OB + AB}{OB} = 1 + \dfrac{AB}{\dfrac{2\pi b}{\alpha}} = 1 + \dfrac{AB.\alpha}{2\pi b}$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi(a-b)}{AB} = \dfrac{2\pi(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2 + h^2}}$ (a). $\dfrac{AB}{OB} = \dfrac{a}{b} - 1 = \dfrac{a-b}{b} \Rightarrow OB = \dfrac{b\sqrt{(a-b)^2 + h^2}}{a-b}$ (b).

$OA'' = OB + BA = \dfrac{b\sqrt{(a-b)^2 + h^2}}{a-b} + \sqrt{(a-b)^2 + h^2}$ (c).

Thay (a), (b), (c) vào (1) ta tìm được l.

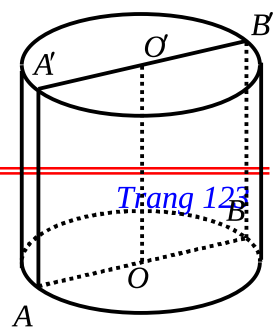
$l \approx 58,79609cm \approx 58,80$

Ghi chú. *Để tồn tại lời giải trên thì đoạn BA" phải không cắt cung $\overset{\frown}{BB''}$ tại điểm nào khác B, tức là BA" nằm dưới tiếp tuyến của $\overset{\frown}{BB''}$ tại B. Điều này tương đương với $2\alpha < \cos^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$. Tuy nhiên, trong lời giải của thí sinh không yêu cầu phải trình bày điều kiện này (và đề bài cũng đã cho thỏa mãn yêu cầu đó).*

Câu 41: Gia đình An xây bể hình trụ có thể tích 150 m^3. Đáy bể làm bằng bê tông giá $100\,000$ $đ/m^2$. Phần thân làm bằng tôn giá $90\,000\,đ/m^2$, nắp bằng nhôm giá $120\,000\,đ/m^2$. Hỏi khi chi phí sản suất để bể đạt mức thấp nhất thì tỷ số giữa chiều cao bể và bán kính đáy là bao nhiêu?

A. $\dfrac{22}{9}$. **B.** $\dfrac{9}{22}$. **C.** $\dfrac{31}{22}$. **D.** $\dfrac{21}{32}$.

Hướng dẫn giải: :
Chọn A.



Ta có: $V=150 \Leftrightarrow \pi R^2 h=150 \Rightarrow h=\dfrac{150}{\pi R^2}$

Mà ta có: $f\left(R\right)=100000\pi R^2+120000\pi R^2+180000\pi Rh$

$f\left(R\right)=220000\pi R^2+180000\pi R\dfrac{150}{\pi R^2}=220000\pi R^2+\dfrac{27000000}{R}$

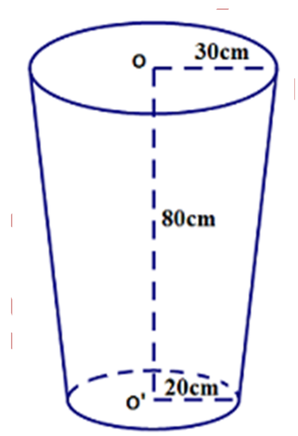
Để chi phí thấp nhất thì hàm số $f\left(R\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất với mọi $R>0$

$f'\left(R\right)=440000\pi R-\dfrac{27000000}{R^2}=\dfrac{440000\pi R^3-27000000}{R^2}$, cho $f'\left(R\right)=0 \Rightarrow R=\dfrac{30}{\sqrt[3]{440\pi}}$

Lập BBT, từ BBT suy ra $\min\limits_{R>0} f\left(R\right)$ khi $R=\dfrac{30}{\sqrt[3]{440\pi}}$

Nên $\dfrac{h}{R}=\dfrac{150}{\pi R^3}=\dfrac{22}{9}$

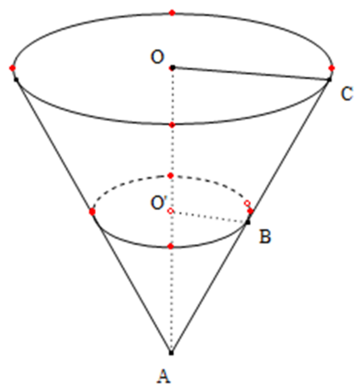
Câu 42: Học sinh A sử dụng 1 xô đựng nước có hình dạng và kích thước giống như hình vẽ, trong đó đáy xô là hình tròn có bán kính 20 cm, miệng xô là đường tròn bán kính 30 cm, chiều cao xô là 80 cm. Mỗi tháng A dùng hết 10 xô nước. Hỏi A phải trả bao nhiêu tiền nước mỗi tháng, biết giá nước là 20000 đồng/1 m^3 (số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?



A. 35279 đồng.	**B.** 38905 đồng.	**C.** 42116 đồng.	**D.** 31835 đồng.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



Ta xét hình nón đỉnh A, đường cao $h>80$ cm đáy là đường tròn tâm O, bán kính bằng 30 cm. Mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ cách mặt đáy 80 cm cắt hình nón theo giao tuyến là đường tròn tâm O' có bán kính bằng 20 cm. Mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ chia hình nón thành 2 phần. Phần I là phần chứa đỉnh A, phần II là phần không chứa đỉnh A (Như hình vẽ)

Ta có $\dfrac{O'B}{OC}=\dfrac{AO'}{AO} \Leftrightarrow \dfrac{AO'}{AO'+O'O}=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow AO'=160$ cm

Thể tích hình nón $V=\dfrac{1}{3}AO.\pi.30^2=72000\pi$ cm^3

Thể tích phần I là $V_1=\dfrac{1}{3}AO'.\pi.20^2=\dfrac{64000}{3}\pi$ cm^3

Vậy thể tích cái xô là thể tích phần II là $V_2 = V - V_1 = \dfrac{152000}{3}\pi \text{ cm}^3 = \dfrac{19}{375}\pi \left(\text{m}^3\right)$

Vậy số tiền phải trả là $T = \dfrac{19\pi}{375}.10.20000 \approx 31835$ đồng.

Câu 43: Một cốc nước hình trụ có chiều cao $9cm$, đường kính $6cm$. Mặt đáy phẳng và dày $1cm$, thành cốc dày $0,2cm$. Đổ vào cốc $120ml$ nước sau đó thả vào cốc 5 viên bi có đường kính $2cm$. Hỏi mặt nước trong cốc cách mép cốc bao nhiêu cm. (Làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

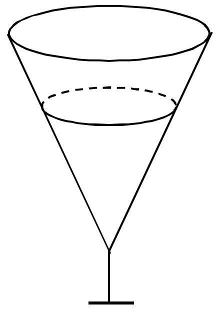
A. $3,67\,cm$. **B.** $2,67\,cm$. **C.** $3,28\,cm$. **D.** $2,28\,cm$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Thành cốc dày $0,2cm$ nên bán kính đáy trụ bằng $2,8cm$. Đáy cốc dày $1cm$ nên chiều cao hình trụ bằng $8cm$. Thể tích khối trụ là $V = \pi.(2,8)^2.8 = 197,04\left(cm^3\right)$.

Đổ $120ml$ vào cốc, thể tích còn lại là $197,04 - 120 = 77,04\left(cm^3\right)$.



Thả 5 viên bi vào cốc, thể tích 5 viên bi bằng $V_{bi} = 5.\dfrac{4}{3}.\pi.1^3 = 20,94\ (cm^3)$.

Thể tích cốc còn lại $77,04 - 20,94 = 56,1\left(cm^3\right)$.

Ta có $56,1 = h'.\pi.(2,8)^2 \Rightarrow h' = 2,28\ cm$.

Cách khác: Dùng tỉ số thể tích

$$\frac{V_{Tr}}{V_{nuoc}+V_{bi}} = \frac{h_{coc}}{h_{nuoc+bi}} \Leftrightarrow \frac{8.(2,8)^2.\pi}{120+5.\frac{4}{3}.\pi} = \frac{8}{h_{nuoc+bi}} \Rightarrow h_{nuoc+bi} = 5,72$$

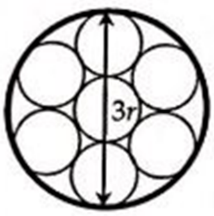
Chiều cao còn lại của trụ là $8 - 5,72 = 2,28$.

Vậy mặt nước trong cốc cách mép cốc là $2,28\,cm$.

Câu 44: Người ta xếp 7 hình trụ có cùng bán kính đáy r và cùng chiều cao h vào một cái lọ hình trụ cũng có chiều cao h, sao cho tất cả các hình tròn đáy của hình trụ nhỏ đều tiếp xúc với đáy của hình trụ lớn, hình trụ nằm chính giữa tiếp xúc với sáu hình trụ xung quanh, mỗi hình trụ xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ lớn. Khi thể tích của lọ hình trụ lớn là:

A. $16\pi r^2 h$ **B.** $18\pi r^2 h$ **C.** $9\pi r^2 h$ **D.** $36\pi r^2 h$

Hướng dẫn giải:



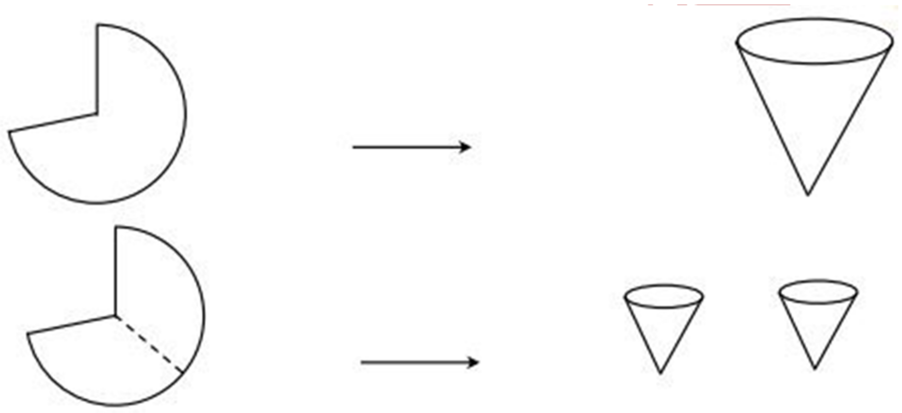
Ta có hình vẽ minh họa mặt đáy của hình đã cho như trên, khi đó ta rõ ràng nhận ra rằng $R = 3r$, đề bài thì có vẻ khá phức tạp, tuy nhiên nếu để ý kĩ thì lại rất đơn giản. Vậy khi đó $V = B.h = (3r)^2.\pi.h = 9\pi r^2 h.$

Câu 45: Từ cùng một tấm kim loại dẻo hình quạt như hình vẽ có kích thước bán kính $R = 5$ và chu vi của hình quạt là $P = 8\pi + 10$, người ta gò tấm kim loại thành những chiếc phễu theo hai cách:

3. Gò tấm kim loại ban đầu thành mặt xung quanh của một cái phễu

4. Chia đôi tấm kim loại thành hai phần bằng nhau rồi gò thành mặt xung quanh của hai cái phễu

Gọi V_1 là thể tích của cái phễu thứ nhất, V_2 là tổng thể tích của hai cái phễu ở cách 2. Tính $\dfrac{V_1}{V_2}$?



A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{21}{\sqrt{7}}$ **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$ **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$ **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Hướng dẫn giải:

Do chu vi của hình quạt tròn là P = độ dài cung + 2R. Do đó độ dài cung tròn là $l = 8\pi$

Theo cách thứ nhất: 8π chính là chu vi đường tròn đáy của cái phễu. Tức là $2\pi r = 8\pi \Rightarrow r = 4$

Khi đó $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$\Rightarrow V_1 = \dfrac{1}{3}.3\pi.4^2$

Theo cách thứ hai: Thì tổng chu vi của hai đường tròn đáy của hai cái phễu là 8π $\Leftrightarrow$ chu vi của một đường tròn đáy là $4\pi \Rightarrow 4\pi = 2\pi \text{r} \Rightarrow r = 2$

Khi đó $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

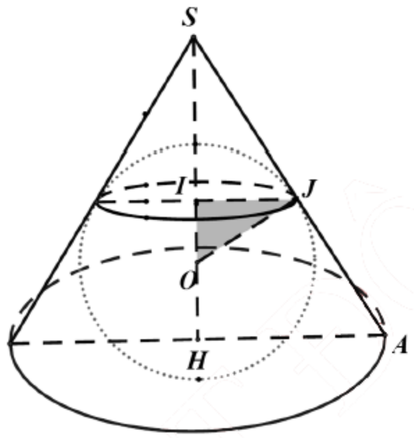
$\Rightarrow V_2 = 2.\dfrac{1}{3}\sqrt{21}.2^2.\pi$

Khi đó $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4^2}{\frac{8\sqrt{21}}{3}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$

Câu 46: Cho một miếng tôn hình tròn có bán kính $50cm$. Biết hình nón có thể tích lớn nhất khi diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích miếng tôn ở trên. Khi đó hình nón có bán kính đáy là

A. $10\sqrt{2}cm$ **B.** $20cm$ **C.** $50\sqrt{2}cm$ **D.** $25cm$

Hướng dẫn giải:



Đặt $a=50cm$

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình nón lần lượt là $x,y\left(x,y>0\right)$. Ta có $SA=\sqrt{SH^2+AH^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

Khi đó diện tích toàn phần của hình nón là $S_{tp}=\pi x^2+\pi x\sqrt{x^2+y^2}$

Theo giả thiết ta có

$\pi x^2+\pi x\sqrt{x^2+y^2}=\pi a^2\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y^2}+x^2=a^2$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y^2}=a^2-x^2\Leftrightarrow x^2\left(x^2+y^2\right)=a^4+x^4-2a^2x^2,\left(DK:x<a\right)\Leftrightarrow x^2=\frac{a^4}{y^2+2a^2}$

Khi đó thể tích khối nón là

$V=\frac{1}{3}\pi.\frac{a^4}{y^2+2a^2}.y=\frac{1}{3}\pi a^4.\frac{y}{y^2+2a^2}$

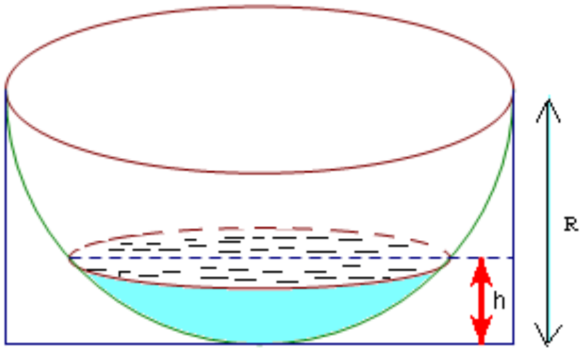
V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{y^2+2a^2}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất

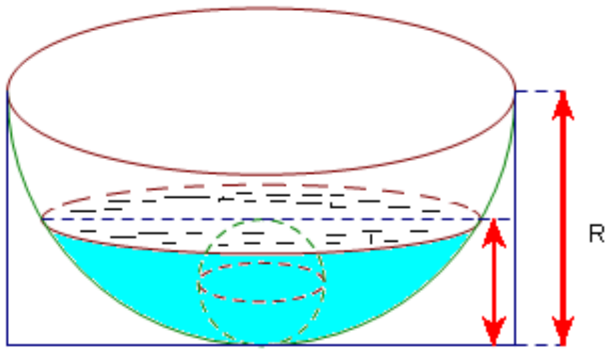
Ta có $\frac{y^2+2a^2}{y}=y+\frac{2a^2}{y}\ge 2\sqrt{y.\frac{2a^2}{y}}=2\sqrt{2}a$

Vậy V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $y=\frac{2a^2}{y}$, tức là $y=a\sqrt{2}\Rightarrow x=\frac{a}{2}=25cm$

Lưu ý: Bài trên các em xét hàm số và lập bảng biến thiên cũng được nhé

Câu 47: Một chậu nước hình bán cầu bằng nhôm có bán kính R =10*cm*, đặt trong một khung hình hộp chữ nhật (hình 1). Trong chậu có chứa sẵn một khối nước hình chỏm cầu có chiều cao h = 4*cm*. Người ta bỏ vào chậu một viên bi hình cầu bằng kim loại thì mặt nước dâng lên vừa phủ kín viên bi (hình 2). Bán kính của viên bi gần số nguyên nào sau đây. (Cho biết thể tích khối chỏm cầu là $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$)





A. 2 **B.** 4 **C.** 7 **D.** 10

Hướng dẫn giải:

Gọi x là bán kính viên bi hình cầu. Điều kiện: $0 < 2x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 5\ 0$

- Thể tích viên bi là $V_{bi} = \frac{4}{3}\pi x^3$.

- Thể tích khối nước hình chỏm cầu khi chưa thả viên bi vào $V_1 = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = 16\pi\left(10 - \frac{4}{3}\right) = \frac{416\pi}{3}$

- Khi thả viên bi vào thì khối chỏm cầu gồm khối nước và viên bi có

thể tích là: $V_2 = \pi(2x)^2\left(R - \frac{2x}{3}\right) = \frac{4\pi x^2(30-2x)}{3}$

- Ta có phương trình:

$$V_2 - V_1 = V_{bi} \Leftrightarrow \frac{4\pi x^2(30-2x)}{3} - \frac{416\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Leftrightarrow 4\pi x^2(30-2x) - 416\pi = 4\pi x^3$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 30x^2 + 104 = 0$$

- Giải phương trình ta có các nghiệm: $x_1 \approx 9{,}6257 > 5$ (loại)

$x_2 \approx 2{,}0940 < 5$ (thỏa mãn), và $x_3 \approx -1{,}8197$ (loại).

Vậy bán kính viên bi là: $r \approx 2{,}09$ (cm).

Câu 48: Một người có một dải duy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải duy băng đỏ đó quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10 cm của dải duy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải duy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

A. $4000\pi\ cm^3$ **B.** $32000\pi\ cm^3$ **C.** $1000\pi\ cm^3$ **D.** $16000\pi\ cm^3$

Hướng dẫn giải:

Một bài toán thực tế khá hay trong ứng dụng của việc tìm giá trị lớn nhất của hàm số. Ta nhận thấy, dải duy băng tạo thành hai hình chữ nhật quanh cái hộp, do đó chiều dài của dải duy băng chính là tổng chu vi của hai hình chữ nhật đó. Tất nhiên chiều dài duy băng đã phải trừ đi phần duy băng dùng để thắt nơ, có nghĩa là: $22(2r+h)=120 \Leftrightarrow h=30-2r$

Khi đó thể tích của hộp quà được tính bằng công thức:

$V=B.h=\pi.r^2(30-2r)=\pi(-2r^3+30r^2)$

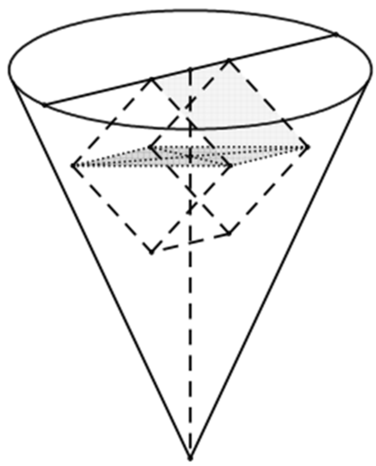
Xét hàm số $f(r)=-2r^3+30r^2$ trên $(0;15)$

$f'(r)=-6r^2+60r;\ f'(r)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r=0(l) \\ r=10 \end{array}\right.$

Khi đó vẽ BBT ta nhận ra $\underset{(0;10)}{Max}\, f(r)=f(10)$. Khi đó thể tích của hộp quà $V=B.h=\pi.10^2.10=1000\pi$

Câu 49: Một khối gạch hình lập phương (không thấm nước) có cạnh bằng 2 được đặt vào trong một chiếu phễu hình nón tròn xoay chứa đầy nước theo cách như sau: Một cạnh của viên gạch nằm trên mặt nước (nằm trên một đường kính của mặt này); các đỉnh còn lại nằm trên mặt nón; tâm của viên gạch nằm trên trục của hình nón. Tính thể tích nước còn lại ở trong phễu (làm tròn 2 chữ số thập phân).

A. V =22,27 **B.** V =22,30 **C.** V =23.10 **D.** 20,64



Hướng dẫn giải:

Gọi R,h lần lượt là bán kính và chiều cao của hình nón (phễu).

Thiết diện của hình nón song song với đáy của hình nón, qua tâm của viên gạch là hình tròn có bán kính $R_1=\sqrt{3}$ thỏa mãn $\dfrac{R_1}{R}=\dfrac{h-\sqrt{2}}{h}\Rightarrow \dfrac{h-\sqrt{2}}{h}.R=\sqrt{3}\,(1)$

Thiết diện của hình nón song song với đáy hình nón, chứa cạnh đối diện với cạnh nằm trên đáy của hình nón là hình tròn có bán kính $R_2=1$ thỏa mãn $\dfrac{R_2}{R}=\dfrac{h-2\sqrt{2}}{h}\Rightarrow \dfrac{h-2\sqrt{2}}{h}.R=1\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{h-\sqrt{2}}{h-2\sqrt{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow h=\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ và $R=2\sqrt{3}-1$

Thể tích lượng nước còn lại trong phễu là $V=V_{\text{nón}}-V_{\text{gạch}}=\dfrac{1}{3}\pi R^2h-2^3\approx 22,2676$

Câu 50: Một cái nồi hiệu Happycook dạng hình trụ không nắp chiều cao của nồi 11.4 cm, đường kính dáy là 20.8 cm. Hỏi nhà sản xuất cần miếng kim loại hình tròn có bán kính R tối thiểu là bao nhiêu để làm cái nồi như vậy (không kể quay nồi)

A. $R=18.58cm$. **B.** $R=19.58cm$.
C. $R=13.13cm$. **D.** $R=14.13cm$.

Hướng dẫn giải:

Diện tích xung quanh của nồi là

$S_1=2\pi rl=2\pi.10,4.11,4=\dfrac{5928}{25}\pi$

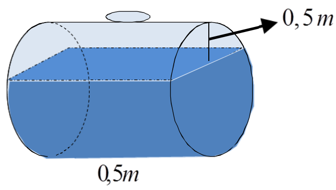
Diện tích đáy nồi là $S_2=\pi r^2=\dfrac{2704}{25}\pi$

Suy ra diện tích tối thiểu miếng kim loại hình tròn là

$S=S_1+S_2=\dfrac{8632}{25}\pi=\pi R^2\Rightarrow R=18.58cm$

Chọn A.

Câu 51: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là $5m$, có bán kính đáy $1m$, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với $0,5m$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3)



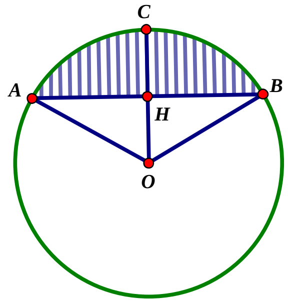
A. $12,637m^3$. **B.** $114,923m^3$. **C.** $11,781m^3$. **D.** $8,307m^3$.

Hướng dẫn giải:

Nhận xét $OH = CH = 0,5 = \frac{R}{22} = \frac{OB}{2}$ suy ra ΔOHB là tam giác nửa đều

$\Rightarrow \widehat{HOB} = 60° \Rightarrow \widehat{AOB} = 120°$

Suy ra diện tích hình quạt OAB là: $S = \frac{1}{3}\pi R^2 = \frac{1}{3}\pi$



Mặt khác: $S_{\Delta AOB} = 2S_{\Delta HOB} = S_{\Delta BOC} = \frac{OB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (ΔBOC đều)

Vậy diện tích hình viên phân cung AB là $\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$

Suy ra thể tích dầu được rút ra: $V_1 = 5.\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Thể tích dầu ban đầu: $V = 5.\pi.1^2 = 5\pi$

Vậy thể tích còn lại: $V_2 = V - V_1 \simeq 12,637m^3$.

Chọn A.