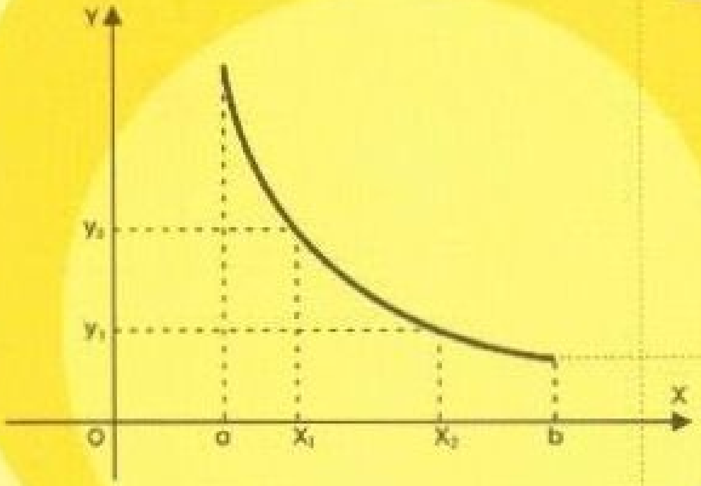
NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10



ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

Giải bài tập ĐẠI SỐ 10

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Đơn vị liên kết :
Công ty Sách hoa hồng

Lời nói đầu

Quyển sách này được biên soạn theo chương trình giáo khoa Đại số 10 hiện hành, nhằm giúp các em học sinh không có điều kiện ôn tập theo nhóm, lớp có tài liệu tham khảo để so sánh với kết quả tự ôn tập của mình hoặc để tham khảo thêm nếu cần.

Chúng tôi mong đón nhận ý kiến xây dựng từ quý độc giả.

NHÓM BIÊN SOẠN

Chương I. MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

§1. MỆNH ĐỀ

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Mệnh đề

Mỗi mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai.

Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.

2. Phủ định của một mệnh đề

Kí hiệu mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$, ta có:

$\overline{P}$ đúng khi P sai.

$\overline{P}$ sai khi P đúng.

3. Mệnh đề kéo theo

• Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là mệnh đề kéo theo, và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là "P kéo theo Q" hoặc "Từ P suy ra Q".

• Các định lí toán học là những mệnh đề đúng và thường có dạng $P \Rightarrow Q$.

Khi đó ta nói: P là giả thiết, Q là kết luận của định lí, hoặc

P là **điều kiện đủ** để có Q, hoặc

Q là **điều kiện cần** để có P.

4. Mệnh đề đảo – Hai mệnh đề tương đương

- Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
- Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng ta nói P và Q là hai mệnh đề tương đương.

  Khi đó ta kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$ và đọc là P tương đương Q, hoặc P là điều kiện cần và đủ để có Q, hoặc P khi và chỉ khi Q.

5. Kí hiệu $\forall$ và $\exists$

a) Cho mệnh đề chứa biến P(x) với $x \in X$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" là: "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$".

b) Cho mệnh đề chứa biến P(x) với $x \in X$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X, P(x)$" là: "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$".

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề, câu nào là mệnh đề chứa biến?

a) $3 + 2 = 7$; b) $4 + x = 3$; c) $x + y > 1$; d) $2 - \sqrt{5} < 0$.

Trả lời

Câu a) và d) là mệnh đề;

Câu b) và c) là mệnh đề chứa biến.

2. Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau và phát biểu mệnh đề phủ định của nó.

a) 1794 chia hết cho 3;

b) $\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ;

c) $\pi < 3{,}15$;

d) $|-125| \le 0$.

Giải

a) "1794 chia hết cho 3" là mệnh đề đúng; mệnh đề phủ định là "1794 không chia hết cho 3".

b) "$\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ" là mệnh đề sai; mệnh đề phủ định là "$\sqrt{2}$ không là một số hữu tỉ".

c) "$\pi < 3{,}15$" là mệnh đề đúng; mệnh đề phủ định là "$\pi \ge 3{,}15$";

d) "$|-125| \le 0$" là mệnh đề sai; mệnh đề phủ định là "$|-125| > 0$".

3. Cho các mệnh đề kéo theo.

Nếu a và b cùng chia hết cho c thì a + b chia hết cho c (a, b, c là những số nguyên).

Các số nguyên có tận cùng bằng 0 đều chia hết cho 5.

Tam giác cân có hai trung tuyến bằng nhau.

Hai tam giác bằng nhau có diện tích bằng nhau.

a) Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mỗi mệnh đề trên.

b) Phát biểu mỗi mệnh đề trên, bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện đủ".

c) Phát biểu mỗi mệnh đề trên, bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiệm cần".

Giải

a) Các mệnh đề đảo của mỗi mệnh đề trên là:

Nếu a + b chia hết cho c thì a và b chia hết cho c.

Các số chia hết cho 5 đều có tận cùng bằng 0.

Tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau là tam giác cân.

Hai tam giác có diện tích bằng nhau thì bằng nhau.

b) Sử dụng khái niệm "diều kiện đủ"

Điều kiện đủ để a + b chia hết cho c là a và b chia hết cho c.

Điều kiện đủ để một số chia hết cho 5 là số đó có tận cùng bằng 0.

Điều kiện đủ để một tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau là tam giác đó cân.

Điều kiện đủ để hai tam giác có diện tích bằng nhau là chúng bằng nhau.

c) Sử dụng khái niệm "điều kiện cần"

Điều kiện cần để a và b chia hết cho c là a + b chia hết cho c.

Điều kiện cần để một số có tận cùng bằng 0 là số đó chia hết cho 5.

Điều kiện cần để một tam giác là tam giác cân là hai đường trung tuyến của nó bằng nhau.

Điều kiện cần để hai tam giác bằng nhau là chúng có diện tích bằng nhau.

4. Phát biểu mỗi mệnh đề sau, bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện cần và đủ"

a) Một số có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì chia hết cho 9 và ngược lại.

b) Một hình bình hành có các đường chéo vuông góc là một hình thoi và ngược lại.

c) Phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi biệt thức của nó dương.

Giải

a) Điều kiện cần và đủ để một số chia hết cho 9 là tổng các chữ số của nó chia hết cho 9.

b) Điều kiện cần và đủ để một hình bình hành là hình thoi là hai đường chéo của nó vuông góc với nhau.

c) Điều kiện cần và đủ để phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt là biệt thức của nó dương.

5. Dùng kí hiệu $\forall$, $\exists$ để viết các mệnh đề sau

a) Mọi số nhân với 1 đều bằng chính nó;

b) Có một số cộng với chính nó bằng 0;

c) Mọi số cộng với số đối của nó đều bằng 0.

Giải

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x.1 = x$; b) $\exists x \in \mathbb{R}: x + x = 0$; c) $\forall x \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$.

6. Phát biểu thành lời mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của nó

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$; b) $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = n$;

c) $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq 2n$; d) $\exists x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{x}$.

Giải

a) Bình phương của mọi số thực đều dương (mệnh đề sai, vì với $x = 0$: $0^2 = 0$).

b) Tồn tại số tự nhiên n mà bình phương của nó lại bằng chính nó (mệnh đề đúng, chẳng hạn n = 0).

c) Mọi số tự nhiên n đều không vượt quá hai lần nó (mệnh đề đúng).

d) Tồn tại số thực x nhỏ hơn nghịch đảo của nó (mệnh đề đúng, chẳng hạn x = 0,5).

7. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của nó

a) $\forall n \in \mathbb{N}$: n chia hết cho n; b) $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$;

c) $\forall x \in \mathbb{R} : x < x + 1$; d) $\exists x \in \mathbb{R} : 3x = x^2 + 1$.

Giải

a) $\exists n \in \mathbb{N}$: n không chia hết cho n. Mệnh đề này đúng, đó là số 0;

b) $\forall x \in \mathbb{Q}: x^2 \neq 2$. Mệnh đề đúng.

c) $\exists x \in \mathbb{R} : x \geq x + 1$: Mệnh đề sai. (vì $x \geq x + 1 \Leftrightarrow 0 \geq 1$)

d) $\forall x \in \mathbb{R} : 3x \neq x^2 + 1$. Mệnh đề này sai vì phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ có nghiệm.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Trong các câu dưới đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không là mệnh đề? Nếu là mệnh đề thì cho biết nó đúng hay sai?

a) Hãy im lặng! b) 7 < 5

c) 11 là một số chẵn. d) 1 là số nguyên tố.

2. Phủ định các mệnh đề sau:

a) 3 là một số nguyên tố; b) $\exists x \in \mathbb{Q}: 4x^2 - 1 = 0$; c) $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 > n$.

Cho biết tính đúng sai của các mệnh đề phủ định.

3. Cho mệnh đề chứa biến: P(n): "3n + 3 là một số lẻ".

Xét P(3) và P(4) đúng hay sai.

4. Hãy phát biểu và chứng minh định lí đảo của định lí sau (nếu có) rồi sử dụng thuật ngữ điều kiện "cần và đủ" để phát biểu gộp lại cả hai định lí thuận và đảo:

Nếu m, n là hai số nguyên dương và mỗi số đều chia hết cho 3 thì tổng $m^2 + n^2$ cũng chia hết cho 3.

5. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau và lập mệnh đề phủ định của chúng:

a) $\forall x \in \mathbb{R}: x < x^2$

b) $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 + 1$ không chia hết cho 3

c) $\exists r \in \mathbb{Q}: r^2 = 3$

d) $\exists r \in \mathbb{N}: n^2 + 1$ chia hết cho 8.

§2. TẬP HỢP

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Khái niệm tập hợp

a) Tập hợp và phần tử:

a là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \in A$.

a không là phần tử của A, ta viết: $a \notin A$.

b) Cách xác định tập hợp:

Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp giữa hai dấu { }

Nêu tính đặc trưng của tập hợp: A = {a / a có tính chất T}

c. Tập hợp rỗng:

Tập hợp rỗng, kí hiệu là $\varnothing$, là tập hợp không chứa phần tử nào.

2. Tập hợp con

Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là một tập hợp con của B và viết $A \subset B$ (đọc là A chứa trong B).

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Tính chất:

a) $A \subset A$ với mọi tập hợp A;

b) Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$;

c) $\varnothing \subset A$ với mọi tập hợp A.

3. Tập hợp bằng nhau

Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ ta nói tập hợp A bằng tập hợp B và viết là A = B.

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. a) Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 20$ và x chia hết cho 3$\}$.

   Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp A.

   b) Cho tập hợp B = {2, 6, 12, 20, 30}.

   Hãy xác định B bằng cách chỉ ra một tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

   c) Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp các học sinh lớp em cao dưới 1m60.

Giải

a) Ta có A = {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18}

b) $B = \{x \in \mathbb{N} / x = n(n + 1), 1 \le n \le 5\}$.

2. Trong hai tập hợp A, B dưới đây, tập hợp nào là tập con của tập hợp còn lại? Hai tập hợp A và B có bằng nhau không?

a) A là tập hợp các hình vuông

B là tập hợp các hình thoi.

b) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là một ước chung của 24 và $30\}$

$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là một ước của $6\}$.

Giải

a) $A \subset B$ vì mọi hình vuông đều là hình thoi.

$A \neq B$ vì có những hình thoi không là hình vuông.

b) $n \in A$ thì n là ước chung của 24 và 30 mà UCLN $(24; 30) = 6$ nên n là ước của $6 \Rightarrow n \in B$.

Vậy $A \subset B$ (1)

Nếu $n \in B$ thì n là ước của 6, suy ra n là ước chung của 24 và 30. Vậy $n \in A$ do đó $B \subset A$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $A = B$.

3. Tìm tất cả các tập con của tập hợp sau:

a) $A = \{a, b\}$; b) $B = \{0, 1, 2\}$.

Giải

a) Các tập con của $A = \{a, b\}$ là: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, A.

b) Các tập con của $B = \{0, 1, 2\}$ là: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, B.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Viết các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$

b) $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 3 < n^2 < 30)$

2. Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó:

a) $A = \{2; 3; 5; 7\}$; b) $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

c) $C = \{-5; 0; 5; 10; 15\}$

3. Cho tập hợp $A = \{a; b; c; d\}$. Liệt kê tất cả các tập con của A có:

a) Ba phần tử; b) Hai phần tử; c) Không quá một phần tử.

4. Gọi A, B, C, D, E và F lần lượt là tập hợp các tứ giác lồi, tập hợp các hình thang, tập hợp các hình bình hành, tập hợp các hình chữ nhật, tập hợp các hình thoi và tập hợp các hình vuông. Hỏi tập nào là tập con của tập nào?

§3. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Giao của hai tập hợp

Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B được gọi là giao của A và B.

Kí hiệu $C = A \cap B$

2. Hợp của hai tập hợp

C gồm các phần tử hoặc thuộc A hoặc thuộc B được gọi là hợp của A và B.

Kí hiệu $C = A \cup B$

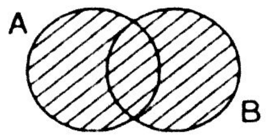
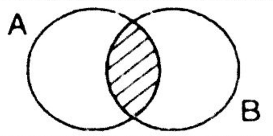
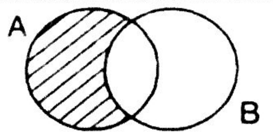
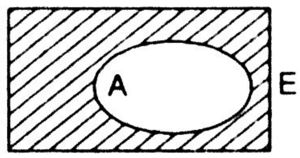
3. Hiệu và phần bù của hai tập hợp

Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là hiệu của A và B.

Kí hiệu $C = A \setminus B$

Khi $B \subset A$ thì $A \setminus B$ gọi là phần bù của B trong A, kí hiệu $C_A B$.

Các phép toán trên tập hợp

Phép toán	Kí hiệu	Định nghĩa	Kết quả	Biểu đồ Ven
Hợp	$A \cup B$	$\{x \mid x \in A$ hoặc $x \in B\}$	$x \in A \cup B$ $\Leftrightarrow x \in A$ hoặc $x \in B$	
Giao	$A \cap B$	$\{x \mid x \in A$ và $x \in B\}$	$x \in A \cap B$ $\Leftrightarrow x \in A$ và $x \in B$	
Hiệu	$A \setminus B$	$\{x \mid x \in A$ và $x \notin B\}$	$x \in A \setminus B$ $\Leftrightarrow x \in A$ và $x \notin B$	
Phần bù	C_E^A	$A \subset E$ $\{x \in E \mid x \notin A\} = E \setminus A$	$x \in C_E^A$ $\Leftrightarrow x \in E$ và $x \notin A$	

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Kí hiệu $\mathcal{A}$ là tập hợp các chữ cái (không dấu) trong câu "CÓ CHÍ THÌ NÊN", $\mathcal{B}$ là tập hợp các chữ cái (không dấu) trong câu "CÓ CÔNG MÀI SẮT CÓ NGÀY NÊN KIM". Hãy xác định $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$.

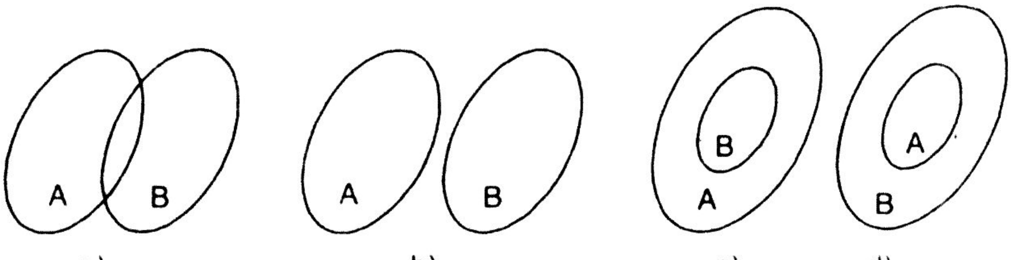
Giải

$\mathcal{A}$ = {C, O, H, I, T, N, Ê}; $\mathcal{B}$ = {C, O, Ô, N, G, M, A, I, S, Ă, T, Y, Ê, K}

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ = {C, O, I, T, N, Ê}; $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ = {C, O, H, I, T, N, Ê, Ô, G, M, A, S, Ă, Y, K}

$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ = {H}; $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ = {Ô, G, M, A, S, Ă, Y, K}.

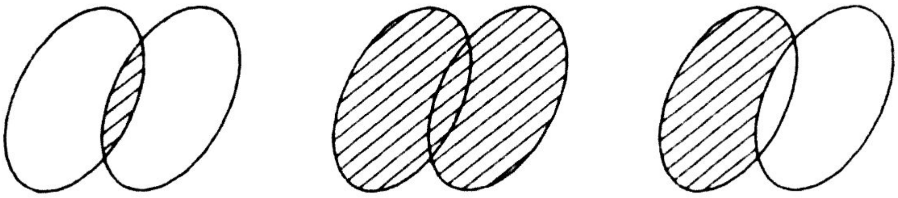
2. Vẽ lại và gạch chéo các tập hợp $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ trong các trường hợp sau.



a) b) c) d)

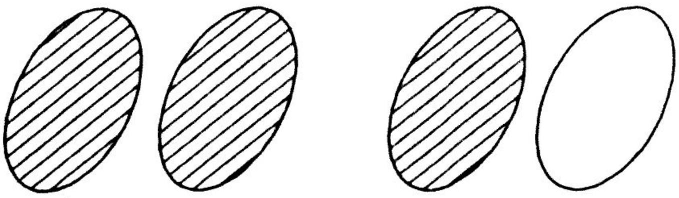
Giải

a)



$A \cap B$, $A \cup B$ $A \setminus B$

b) $A \cap B = \varnothing$



$A \cup B$ $A \setminus B$

c), d) học sinh tự vẽ

3. Trong số 45 học sinh của lớp 10A có 15 bạn được xếp loại học lực giỏi, 20 bạn được xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa học lực giỏi, vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi

a) Lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng bạn đó phải học lực giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt?

b) Lớp 10A có bao nhiêu bạn chưa được xếp loại học lực giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt?

Giải

a) Vì có 10 bạn vừa có học lực giỏi vừa được xếp loại hạnh kiểm tốt nên số bạn hoặc có học lực giỏi, hoặc được xếp loại hạnh kiểm tốt là:

$$15 + 20 - 10 = 25.$$

b) Số bạn học lực chưa giỏi và chưa được xếp loại hạnh kiểm tốt là:

$$45 - 25 = 20$$

4. Cho tập hợp A, hãy xác định $A \cap A$, $A \cup A$, $A \cap \varnothing$, $A \cup \varnothing$, C_AA, $C_A\varnothing$.

Giải

Ta có: $A \cap A = A$; $A \cup A = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;

$A \cup \varnothing = A$; $C_AA = \varnothing$; $C_A\varnothing = A$.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Xác định hai tập hợp A và B, biết rằng:

$$A \setminus B = \{1; 5; 7; 8\},\ B \setminus A = \{2; 10\} \text{ và } A \cap B = \{3; 6; 9\}$$

2. Cho $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9\}$, $B = \{0; 2; 4; 6; 8; 9\}$ và $C = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Hãy tìm $A \cap (B \setminus C)$ và $(A \cap B) \setminus C$. Hai tập hợp nhận được bằng nhau hay khác nhau?

3. Cho A và B là hai tập hợp. Dùng biểu đồ Ven để kiểm nghiệm rằng:

a) $(A \setminus B) \subset A$; b) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$; c) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

§4. CÁC TẬP HỢP SỐ

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Các tập hợp số đã học

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$; $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$;

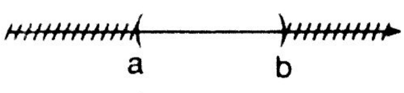
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\}$

Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ gồm các số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn và vô hạn không tuần hoàn. Các số thập phân vô hạn không tuần hoàn gọi là số vô tỉ.

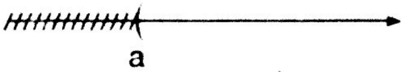
2. Các tập hợp con thường dùng của $\mathbb{R}$

Khoảng

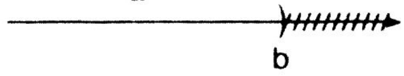
$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$.

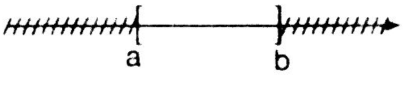


$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.



Đoạn

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$.



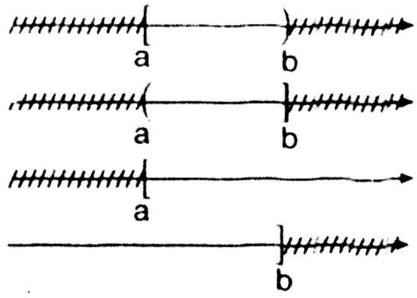
Nửa khoảng

$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$

$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$

$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$

$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$.



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số

1. a) $[-3; 1) \cup (0; 4]$; b) $(0; 2] \cup [-1; 1)$; c) $(-2; 15) \cup (3; +\infty)$;

d) $\left(-1; \dfrac{4}{3}\right) \cup [-1; 2)$; e) $(-\infty; 1) \cup (-2; +\infty)$.

Giải

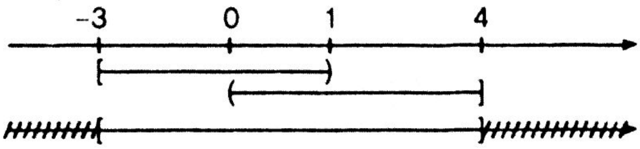
a) $[-3; 1) \cup (0; 4] = [-3; 4]$ b) $(0; 2] \cup [-1; 1) = [-1; 2]$

c) $(-2; 15) \cup (3; +\infty) = (-2; +\infty)$ d) $\left(-1; \dfrac{4}{3}\right) \cup [-1; 2) = [-1; 2)$

e) $(-\infty; 1) \cup (-2; +\infty) = (-\infty; +\infty)$

Biểu diễn trên trục số.

Chẳng hạn a)



2. a) $(-12; 3] \cap [-1; 4]$; b) $(4; 7) \cap (-7; -4)$;

c) $(2; 3) \cap [3; 5)$; d) $(-\infty; 2] \cap [-2; +\infty)$.

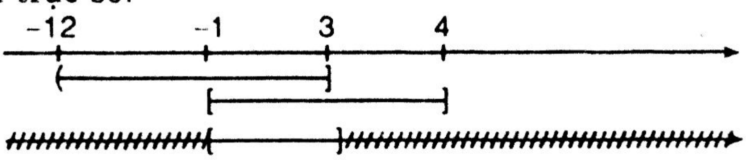
Giải

a) $(-12; 3] \cap [-1; 4] = [-1; 3]$; b) $(4; 7) \cap (-7; -4) = \varnothing$;

c) $(2; 3) \cap [3; 5) = \varnothing$; d) $(-\infty; 2] \cap [-2; +\infty) = [-2; 2]$.

Biểu diễn trên trục số.

Chẳng hạn a)



3. a) $(-2; 3) \setminus (1; 5)$; b) $(-2; 3) \setminus [1; 5)$;

c) $\mathbb{R} \setminus (2; +\infty)$; d) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3]$.

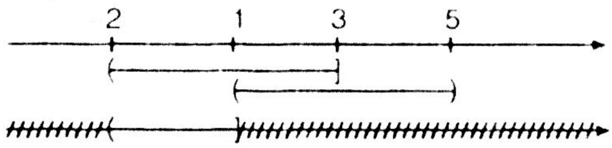
Giải

a) $(-2; 3) \setminus (1; 5) = (-2; 1]$ b) $(-2; 3) \setminus [1; 5) = (-2; 1)$

c) $\mathbb{R} \setminus (2; +\infty) = (-\infty; 2]$ d) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3] = (3; +\infty)$

Biểu diễn trên trục số.

(Chẳng hạn a)



C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho $A = (-\infty; 2)$ và $B = (1; 3]$.

Hãy xác định các tập hợp: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$

C_R^A, C_R^B, $C_R^{(A \cap B)}$, $C_R^A \cup C_R^B$.

Đáp số: $A \cap B = (1; 2)$; $A \cup B = (-\infty; 3]$; $B \setminus A = [2; 3]$

$C_R^A = [2; +\infty)$; $C_R^B = (-\infty; 1] \cup (3; +\infty)$

$C_R^{(A \cap B)} = C_R^A \cup C_R^B = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$

2. Cho $A, B, C \subset E$, chứng minh rằng:

a) $C_E^{(A \cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$

b) $C_E^{(A \cup B)} = C_E^A \cap C_E^B$

c) Nếu $A \cup B = E$ và $A \cap B = \varnothing$ thì $C_E^A = B$

d) $A \setminus B = A \setminus (A \cup B) = (A \cap B) \setminus B$

3. Cho $B \subset A \subset E$, chứng minh rằng:

a) $A \cup B = A$; b) $A \cap B = B$; c) $C_E^A \subset C_E^B$

4. Chứng minh rằng nếu $A \setminus B = A$ thì $A \cap B = \varnothing$ và ngược lại.

§5. SỐ GẦN ĐÚNG, SAI SỐ

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Sai số tuyệt đối của một số gần đúng

Nếu a là số gần đúng của số đúng $\bar{a}$ thì $\Delta_a = |\bar{a} - a|$ được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a.

2. Độ chính xác của một số gần đúng

Nếu $\Delta_a = |\bar{a} - a| \le d$ thì $-d \le \bar{a} - a \le d$ hay $a - d \le \bar{a} \le a + d$.

Ta nói a là số gần đúng của $\bar{a}$ với độ chính xác d, và quy ước viết gọn là $\bar{a} = a \pm d$.

3. Quy tắc làm tròn số

Nếu chữ số sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta thay nó và các chữ số bên phải nó bởi chữ số 0.

Nếu chữ số sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cũng làm như trên, nhưng cộng thêm một đơn vị vào chữ số của hàng quy tròn.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Biết $\sqrt[3]{5} = 1,709975947...$

Viết gần đúng $\sqrt[3]{5}$ theo nguyên tắc làm tròn với hai, ba, bốn chữ số thập phân và ước lượng sai số tuyệt đối.

Giải

Nếu lấy $\sqrt[3]{5} = 1,71$ thì vì $1,70 < \sqrt[3]{5} = 1,7099... < 1,71$ nên ta có:

$$|\sqrt[3]{5} - 1,71| < |1,70 - 1,71| = 0,01.$$

Vậy sai số tuyệt đối trong trường hợp này không vượt quá 0,01.

Tương tự, nếu lấy $\sqrt[3]{5}$ bằng 1,710 thì vì $1,709 < \sqrt[3]{5} = 1,7099... < 1,710$ nên ta có

$$|\sqrt[3]{5} - 1,710| < |1,709 - 1,710| = 0,001$$

Vậy sai số tuyệt đối trong trường hợp này không vượt quá 0,001.

Nếu lấy $\sqrt[3]{5}$ bằng 1,7100 thì vì $1,7099 < \sqrt[3]{5} = 1,70997... < 1,7100$ nên ta có

$$|\sqrt[3]{5} - 1,7100| < |1,7099 - 1,7100| = 0,0001$$

Vậy sai số tuyệt đối trong trường hợp này không vượt quá 0,0001.

2. Chiều dài một cái cầu đo được là $l = 1745,25m \pm 0,01m$.

Hãy viết số quy tròn của số gần đúng 1745,25.

Giải

Vì độ chính xác là 0,01 nên ta quy tròn 1745,25 đến hàng phần mười. Vậy số quy tròn là 1745,3.

3. a) Cho giá trị gần đúng của π là $a = 3,141592653589$ với độ chính xác là 10^{-10}. Hãy viết số quy tròn của a;

b) Cho $b = 3,14$ và $c = 3,1416$ là những giá trị gần đúng của π. Hãy ước lượng sai số tuyệt đối của b và c.

Giải

a) Vì độ chính xác là 10^{-10} nên ta quy tròn a đến chữ số thập phân thứ 9. Vậy số quy tròn của a là 3,141592654.

b) Với $b = 3,14$ thì sai số tuyệt đối được ước lượng là

$$\Delta_b = |\pi - 3,14| < |3,142 - 3,14| = 0,002.$$

Với $c = 3,1416$ thì sai số tuyệt đối được ước lượng là

$$\Delta_c = |\pi - 3,1416| < |3,1415 - 3,1416| = 0,0001.$$

4. Thực hiện các phép tính sau trên máy tính bỏ túi (trong kết quả lấy 4 chữ số ở phần thập phân).

a) $3^7.\sqrt{14}$; b) $\sqrt[3]{15}.12^4$.

Hướng dẫn

a) Nếu dùng máy tính CASIO fx–500 MS ta làm như sau:

Ấn $\boxed{3}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{7}\ \boxed{\times}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ 14\ \boxed{\ }$

Ấn liên tiếp phím $\boxed{\text{MODE}}$ cho đến khi màn hình hiện ra

Fix	Sci	Norm
1	2	3

Ấn liên tiếp $\boxed{1}\ \boxed{4}$ để lấy 4 chữ số ở phần thập phân. Kết quả hiện ra trên màn hình là 8183,0047.

- Giải tương tự như trên b) 51139, 3736.

5. Thực hiện các phép tính sau trên máy tính bỏ túi

a) $\sqrt[3]{217} : 13^5$ với kết quả có 6 chữ số thập phân;

b) $(\sqrt[3]{42} + \sqrt[3]{37}) : 14^5$ với kết quả có 7 chữ số thập phân;

c) $\left[(1,23)^5 + \sqrt[3]{-42}\right]^9$ với kết quả có 5 chữ số thập phân.

Hướng dẫn

a) Nếu dùng máy tính CASIO fx–500 MS ta làm như sau:

Ấn $\boxed{3}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ 217\ \boxed{:}\ 13\ \boxed{\wedge}\ \boxed{5}\ \boxed{\ }$

Ấn liên tiếp phím $\boxed{\text{MODE}}$ cho đến khi màn hình hiện ra

Fix	Sci	Norm
1	2	3

Ấn liên tiếp $\boxed{1}\ \boxed{6}$ để lấy 6 chữ số thập phân.

Kết quả hiện ra màn hình là 0,000016.

- Giải tương tự như trên b) 0,0000127; c) −0,02400.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Số $\frac{99}{70}$ dùng để xấp xỉ $\sqrt{2}$. Chứng minh rằng sai số tuyệt đối của $\frac{99}{70}$ so với $\sqrt{2}$ nhỏ hơn $7,3.10^{-5}$.

2. Các nhà toán học đã xấp xỉ số π bởi số $\frac{355}{113}$. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối biết: $3{,}14159265 < \pi < 3{,}14159266$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Xác định tính đúng sai của mệnh đề phủ định $\overline{A}$ theo tính đúng sai của mệnh đề A.

Trả lời: $\overline{A}$ đúng khi A sai, $\overline{A}$ sai khi A đúng.

2. Thế nào là mệnh đề đảo của mệnh đề $A \Rightarrow B$? Nếu $A \Rightarrow B$ là mệnh đề đúng, thì mệnh đề đảo của nó có đúng không ? Cho ví dụ minh họa.

Trả lời: Mệnh đề đảo của $A \Rightarrow B$ là $B \Rightarrow A$. Nếu $A \Rightarrow B$ đúng thì chưa chắc $B \Rightarrow A$ đúng. Ví dụ: "Số tự nhiên có tận cùng là 0 thì chia hết cho 5" là mệnh đề đúng. Đảo lại, "Số tự nhiên chia hết cho 5 thì có tận cùng là 0" là mệnh đề sai.

3. Thế nào là hai mệnh đề tương đương?

Trả lời: Ta có $A \Leftrightarrow B$ khi và chỉ khi $A \Rightarrow B$ và $B \Rightarrow A$ cùng đúng.

4. Nêu định nghĩa tập hợp con của một tập hợp và định nghĩa hai tập hợp bằng nhau.

Trả lời: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$

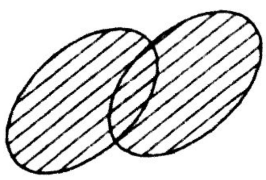
$A = B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A$.

5. Nêu các định nghĩa hợp, giao, hiệu và phần bù của hai tập hợp. Minh hoạ các khái niệm đó bằng hình vẽ.

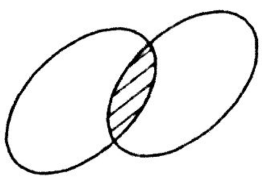
Trả lời: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ hoặc $x \in B\}$.

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ và $x \in B\}$.

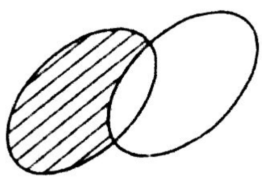
$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ và $x \notin B\}$; khi $B \subset A$ thì $C_A B = A \setminus B$.



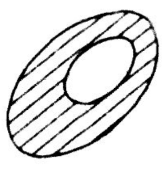
$A \cup B$



$A \cup B$



$A \setminus B$



$C_A B$

6. Nêu định nghĩa đoạn $[a; b]$, khoảng $(a; b)$, nửa khoảng $[a; b)$, $(a; b]$, $(-\infty; b]$, $[a; +\infty)$. Viết tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực dưới dạng một khoảng.

Trả lời: $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$; $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;

$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$; $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$;

$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$; $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$;

$\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$.

7. Thế nào là sai số tuyệt đối của một số gần đúng? Thế nào là độ chính xác của một số gần đúng?

Trả lời: $\Delta_a = |\bar{a} - a|$ là sai số tuyệt đối của số gần đúng a. Nếu $\Delta_a \leq d$ thì d là độ chính xác của số gần đúng a.

8. Cho tứ giác ABCD. Xét tính đúng sai của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ với

a) P: "ABCD là một hình vuông";

Q: "ABCD là một hình bình hành".

b) P: "ABCD là một hình thoi";

Q: "ABCD là một hình chữ nhật".

Giải

a) $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng; b) $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề sai;

9. Xét mối quan hệ bao hàm giữa các tập hợp sau:

A là tập hợp các hình tứ giác; B là tập hợp các hình bình hành;

C là tập hợp các hình thang; D là tập hợp các hình chữ nhật;

E là tập hợp các hình vuông; G là tập hợp các hình thoi.

Giải

Ta có: $E \subset G \subset B \subset C \subset A$; $E \subset D \subset B \subset C \subset A$.

10. Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau

a) $A = \{3k - 2 \mid k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 12\}$;

c) $C = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Giải

a) $A = \{-2, 1, 4, 7, 10, 13\}$;

b) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$;

c) $C = \{-1, 1\}$.

11. Giả sử A, B là hai tập hợp số và x là một số đã cho. Tìm các cặp mệnh đề tương đương trong các mệnh đề sau

P: "$x \in A \cup B$"; S: "$x \in A$ và $x \in B$";

Q: "$x \in A \setminus B$"; T: "$x \in A$ hoặc $x \in B$";

R: "$x \in A \cap B$"; X: "$x \in A$ và $x \notin B$".

Giải

Ta có: $P \Leftrightarrow T$; $R \Leftrightarrow S$; $Q \Leftrightarrow X$.

12. Xác định các tập hợp sau:

a) $(-3; 7) \cap (0; 10)$; b) $(-\infty; 5) \cap (2; +\infty)$; c) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3)$.

Giải

a) $(-3; 7) \cap (0; 10) = (0; 7)$; b) $(-\infty; 5) \cap (2; +\infty) = (2; 5)$;

c) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3) = [3; +\infty)$.

13. Dùng máy tính bỏ túi hoặc bảng số để tìm giá trị gần đúng a của $\sqrt[3]{12}$ (kết quả được làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba). Ước lượng sai số tuyệt đối của a.

Đáp số: $a \approx 2,289$; $\Delta_a < 0,001$.

14. Chiều cao của một ngọn đồi là $h = 347,13m \pm 0,2m$. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng là 347,13.

Trả lời: Vì độ chính xác đến hàng phần mười nên ta quy tròn 347,13 đến hàng đơn vị. Vậy số quy tròn của 347,13 là 347.

15. Những quan hệ nào trong các quan hệ sau là đúng ?

a) $A \subset A \cup B$; b) $A \subset A \cap B$; c) $A \cap B \subset A \cup B$;

d) $A \cup B \subset B$; e) $A \cap B \subset A$.

Trả lời: a) Đúng; b) Sai; c) Đúng; d) Sai; e) Đúng.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng trong các bài tập sau.

16. Cho các số thực a, b, c, d, $a < b < c < d$. Ta có:

(A) $(a; c) \cap (b; d) = (b; c)$; (B) $(a; c) \cap (b; d) = [b; c)$;

(C) $(a; c) \cap [b; d) = [b; c]$; (D) $(a; c) \cup (b; d) = (b; d)$.

Trả lời: Ta có $(a; c) \cap (b; d) = (b; c)$. Chọn (A)

17. Biết $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng. Ta có

(A) P là điều kiện cần để có Q; (B) P là điều kiện đủ để có Q;

(C) Q là điều kiện cần và đủ để có P; (D) Q là điều kiện đủ để có P.

Trả lời: P là điều kiện đủ để có Q. Chọn (B).

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I LÀM THÊM

1. Cho $A = (-\infty; 2)$, $B = (1; 3]$. Xác định các tập hợp:

$$A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A,\ C_R^A,\ C_R^B,\ C_R^{A \cup B},\ C_A^A \cap C_R^B.$$

2. Cho $A, B, C \subset E$, chứng minh rằng:

a) $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$

b) $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$

c) Nếu $A \cup B = E$ và $A \cap B = \varnothing$ thì $C_E^A = B$

d) $A \setminus B = A \setminus (A \cup B) = (A \cap B) \setminus B$

3. Kí hiệu $|A|$ là số phần tử của tập hợp A

a) Chứng minh rằng nếu $A \cap B = \varnothing$ thì $|A \cup B| = |A| + |B|$

b) Chứng minh: $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$ và $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$

c) Chứng minh rằng: $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$

Từ đó suy ra công thức: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

4. Cho $A = \{x \in R \ / \ |x - 2| > 3\}$

$B = \{x \in R \ / \ |x + 1| < 5\}$

Tìm $A \cap B$.

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1. HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Hàm số. Tập xác định của hàm số

Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số. Ta gọi x là biến số và y là hàm số của x.

Tập hợp D được gọi là tập xác định của hàm số.

2. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số y = f(x) xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm M(x; f(x)) trên mặt phẳng toạ độ với mọi x thuộc D.

3. Sự biến thiên của hàm số

Hàm số y = f(x) gọi là đồng biến (tăng) trên khoảng (a; b) nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Hàm số y = f(x) gọi là nghịch biến (giảm) trên khoảng (a; b) nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

4. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Hàm số y = f(x) với tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu

$$\forall x \in D \text{ thì } -x \in D \text{ và } f(-x) = f(x).$$

Hàm số y = f(x) với tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu

$$\forall x \in D \text{ thì } -x \in D \text{ và } f(-x) = -f(x).$$

5. Đồ thị của hàm số chẵn, hàm số lẻ

Đồ thị của một hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

Đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \dfrac{3x-2}{2x+1}$; b) $y = \dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$; c) $y = \sqrt{2x+1} - \sqrt{3-x}$.

Giải

a) y xác định $\Leftrightarrow 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

b) y xác định $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$

c) y xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 3$. Vậy $D = \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$

2. Cho hàm số $y = \begin{cases} x + 1 & \text{với } x \geq 2 \\ x^2 - 2 & \text{với } x < 2 \end{cases}$

Tính giá trị của hàm số đó tại $x = 3$; $x = -1$; $x = 2$.

Giải

$y(3) = 3 + 1 = 4$; $y(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$

$y(2) = 2 + 1 = 3$.

3. Cho hàm số $y = 3x^2 - 2x + 1$. Các điểm sau có thuộc đồ thị của hàm số đó không?

a) $M(-1; 6)$; b) $N(1; 1)$; c) $P(0; 1)$.

Giải

Gọi $y = f(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Ta có

a) $f(-1) = 6$ vậy $M(-1; 6)$ thuộc đồ thị của hàm số.

b) $f(1) = 2$ vậy $N(1; 1)$ không thuộc đồ thị của hàm số.

c) $f(0) = 1$ vậy $P(0; 1)$ thuộc đồ thị của hàm số.

4. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số

a) $y = |x|$; b) $y = (x + 2)^2$; c) $y = x^3 + x$; d) $y = x^2 + x + 1$.

Giải

a) $f(x) = |x|$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = |-x| = |x| = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy $y = |x|$ là hàm số chẵn.

b) $f(x) = (x + 2)^2$.

Ta có $f(1) = 3$, $f(-1) = 1 \Rightarrow f(-1) \neq f(1)$ và $f(-1) \neq -f(1)$

nên $y = (x + 2)^2$ là hàm số không chẵn và không lẻ.

c) $f(x) = x^3 + x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = -x^3 - x = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy $y = x^3 + x$ là hàm số lẻ.

d) Hàm số $y = f(x) = x^2 + x + 1$ không là hàm số chẵn, cũng không là hàm số lẻ, vì $f(1) = 3$, $f(-1) = 1$, $f(1) \neq \pm f(-1)$.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - x + 1$; b) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$; c) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x}$;

d) $y = \sqrt{1-x} + \dfrac{1}{x\sqrt{1+x}}$; e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - 2x - 2x^2}}$; f) $y = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x|x - 4|}}$

Đáp số: a) $D = \mathbb{R}$; b) $D = \mathbb{R}$; c) $D = \mathbb{R}\setminus\{0; 3\}$

d) $D = (-1; 0) \cup (0; 1)$; e) $D = (-2; 1)$; f) $D = (0; 4) \cup (4; +\infty)$

2. Cho hàm số $y = \sqrt{2 - x} + \sqrt{2x + m}$.

Định m để miền xác định của hàm số là đoạn có chiều dài bằng 1.

3. Khảo sát tính đơn điệu của hàm số $y = x^2 - 4x$ trên hai khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

4. Chứng minh rằng hàm số $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ giảm trên từng khoảng xác định. Lập bảng biến thiên của hàm số trên.

5. Chứng minh rằng hàm số $y = x^3 - x^2 + x - 5$ tăng trên $\mathbb{R}$.

6. Khảo sát tính chẵn lẻ của các hàm số:

a) $y = x^7 - \dfrac{x^5 - x}{\sqrt{|x| + x^2}}$; b) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + |x + 2|$

c) $y = \dfrac{|x + 1| + |x - 1|}{|x + 1| - |x - 1|}$; d) $y = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{nếu } x \le -1 \\ 0 & \text{nếu } -1 < x < 1 \\ x^3 - 1 & \text{nếu } x \ge 1 \end{cases}$

Đáp số: a) Hàm số lẻ; b) Hàm số chẵn;

c) Hàm số lẻ; d) Hàm số lẻ.

§2. HÀM SỐ $y = ax + b$

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Hàm số bậc nhất

$$y = ax + b \ (a \neq 0)$$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Chiều biến thiên

Với $a > 0$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $a < 0$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên.

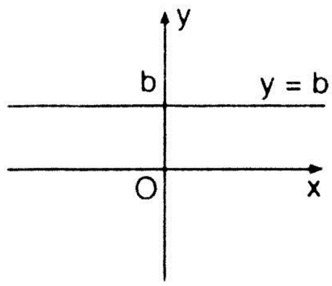
$a > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
y		$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$		

$a < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	
			$-\infty$

2. Hàm số hằng $y = b$



Đồ thị của hàm số $y = b$ là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm $(0; b)$. Đường thẳng này gọi là đường thẳng $y = b$.

3. Hàm số $y = |x|$

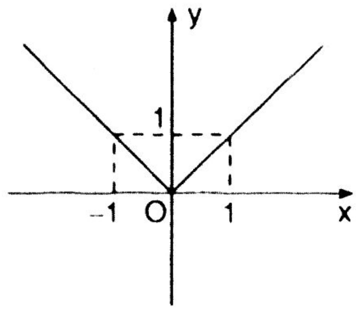
TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Hàm số $y = |x|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



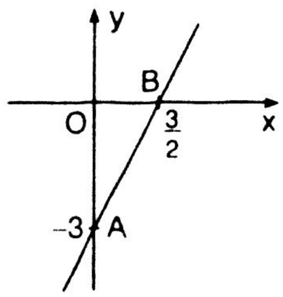
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Vẽ đồ thị của các hàm số

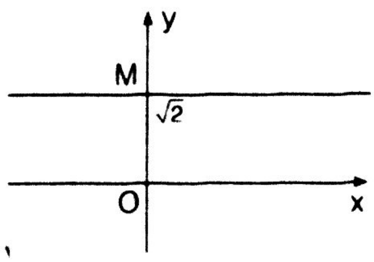
a) $y = 2x - 3$; b) $y = \sqrt{2}$; c) $y = -\frac{3}{2}x + 7$; d) $y = |x| - 1$.

Giải

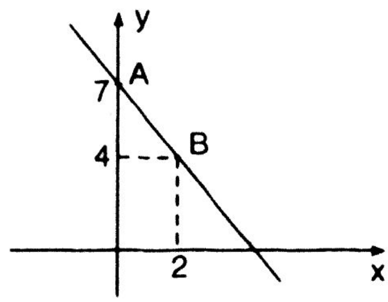
a) Đồ thị là đường thẳng đi qua hai điểm $A(0; -3)$, $B(\frac{3}{2}; 0)$.



b) Đồ thị là đường thẳng song song với Ox và cắt trục tung tại điểm $M(0; \sqrt{2})$

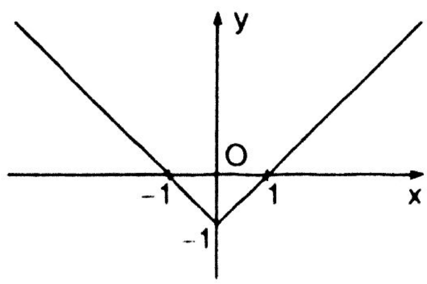


c) Đồ thị là đường thẳng đi qua hai điểm $A(0; 7)$, $B(2; 4)$.



d) $y = |x| - 1 = \begin{cases} x - 1 & \text{với } x \geq 0 \\ -x - 1 & \text{với } x < 0 \end{cases}$

Đồ thị là hai nửa đường thẳng cùng xuất phát từ điểm có toạ độ $(0; -1)$, đối xứng với nhau qua trục Oy.



2. Xác định a, b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua các điểm

a) $A(0; 3)$ và $B\left(\dfrac{3}{5}; 0\right)$; b) $A(1; 2)$ và $B(2; 1)$; c) $A(15; -3)$ và $B(21; -3)$.

Giải

Gọi d là đồ thị hàm số $y = ax + b$

a) Vì A, B $\in$ d nên: $\begin{cases} 3 = b \\ 0 = \dfrac{3}{5}a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 3 \end{cases}$

b) Vì A, B $\in$ d nên: $\begin{cases} 2 = a + b \\ 1 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$

c) A, B $\in$ d nên: $\begin{cases} -3 = 15a + b \\ -3 = 21a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \end{cases}$

3. Viết phương trình $y = ax + b$ của các đường thẳng

a) Đi qua hai điểm $A(4; 3)$ và $B(2; -1)$;

b) Đi qua điểm $A(1; -1)$ và song song với Ox.

Giải

Gọi d là đồ thị hàm số $y = ax + b$

a) A, B $\in$ d nên $\begin{cases} 4a + b = 3 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \end{cases}$. Vậy d: $y = 2x - 5$

b) A $\in$ d và d // Ox nên $\begin{cases} a = 0 \\ -1 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$. Vậy d: $y = -1$.

4. Vẽ đồ thị của các hàm số:

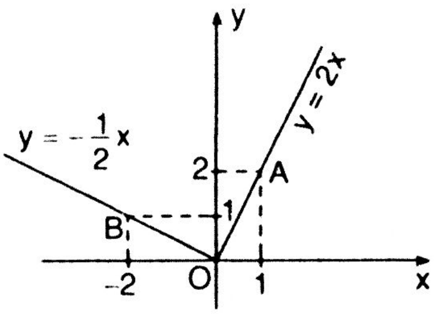
a) $y = \begin{cases} 2x & \text{với } x \geq 0 \\ -\dfrac{1}{2}x & \text{với } x < 0; \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} x + 1 & \text{với } x \geq 1 \\ -2x + 4 & \text{với } x < 1. \end{cases}$

Giải

a) Đường thẳng $y = 2x$ đi qua $O(0; 0)$ và $A(1; 2)$.

Đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}x$ đi qua $O(0; 0)$ và $B(-2; 1)$.

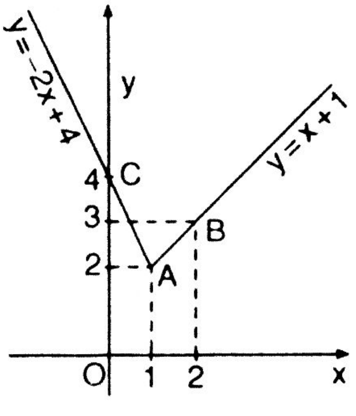
Đồ thị (hình bên).



b) Đường thẳng $y = x + 1$ đi qua $A(1; 2)$ và $B(2; 3)$.

Đường thẳng $y = -2x + 4$ đi qua $A(1; 2)$ và $C(0; 4)$.

Đồ thị (hình bên).



C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho hàm số $y = 2x + 3$ có đồ thị (D) và $A(1; -2)$.

a) Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua A và song song với (D).

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = 2x - 4$.

c) Suy ra đồ thị các hàm số $y = 2|x| - 4$ và $y = |2x - 4|$.

2. Vẽ đồ thị hàm số: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số.

3. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = 2|x| - |x - 1|$;   b) $y = x|x - 3| - 4$

Bằng đồ thị hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$x|x - 3| - 4 = m$$

§3. HÀM SỐ BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức: $y = ax^2 + bx + c$ trong đó x là biến số; a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.

2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ là một parabol có đỉnh $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$ và nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng.

3. Bảng biến thiên:

$a > 0$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -\frac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline y & +\infty & \searrow & \frac{-\Delta}{4a} & \nearrow & +\infty \end{array}$$

$a < 0$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -\frac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline y & -\infty & \nearrow & \frac{-\Delta}{4a} & \searrow & -\infty \end{array}$$

Căn cứ vào bảng biến thiên, khi $a > 0$ ta nói hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị cực tiểu bằng $-\frac{\Delta}{4a}$ tại $x = -\frac{b}{2a}$, khi $a < 0$ ta nói hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị cực đại bằng $-\frac{\Delta}{4a}$ tại $x = -\frac{b}{2a}$.

4. Định lí

Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$

Nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; Đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$

Đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; Nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Xác định toạ độ của đỉnh và các giao điểm với trục tung, trục hoành (nếu có) của mỗi parabol:

a) $y = x^2 - 3x + 2$; b) $y = -2x^2 + 4x - 3$;

c) $y = x^2 - 2x$; d) $y = -x^2 + 4$.

Giải

a) Ta có: $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$.

Hoành độ đỉnh $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{4}$

Vậy đỉnh $I\left(\frac{3}{2}; \frac{-1}{4}\right)$

$x = 0 \Rightarrow y = 2$: (P) cắt trục tung tại điểm $A(0; 2)$.

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

(P) cắt trục hoành tại $B(1; 0)$ và $C(2; 0)$.

b) $a = -2$, $b = 4$, $c = -3$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow y_0 = -1$

Đỉnh $I(1; -1)$, giao điểm với trục tung $A(0; -3)$. (P) không cắt trục hoành.

c) Đỉnh $I(1; -1)$, cắt trục tung tại $O(0; 0)$, cắt trục hoành tại $O(0; 0)$ và $B(2; 0)$.

d) Đỉnh $I(0; 4)$, cắt trục tung tại $A(0; 4)$, cắt trục hoành tại $B(2; 0)$ và $C(-2; 0)$.

2. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

a) $y = 3x^2 - 4x + 1$; b) $y = -3x^2 + 2x - 1$; c) $y = 4x^2 - 4x + 1$;

d) $y = -x^2 + 4x - 4$; e) $y = 2x^2 + x + 1$; f) $y = -x^2 + x - 1$.

Giải

a) Hoành độ đỉnh $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{3} \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{3}$

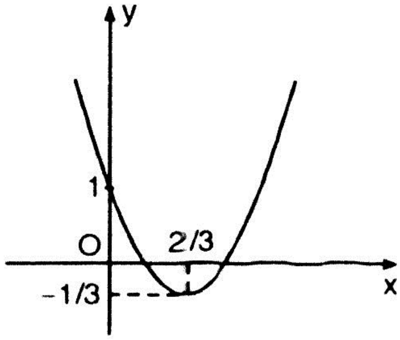
Đỉnh $I\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

Trục đối xứng: $x = \frac{2}{3}$

Giao điểm với Oy là A(0; 1).

Bảng biến thiên và đồ thị:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$



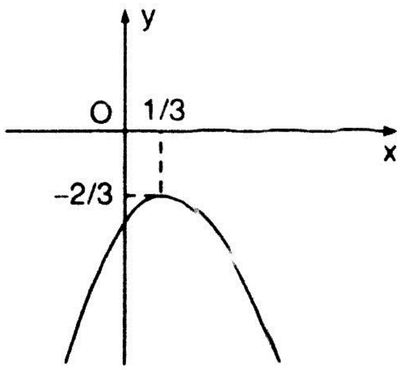
b) Đỉnh $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

Trục đối xứng: $x = \frac{1}{3}$

Giao điểm với Oy là A(0; –1)

Bảng biến thiên và đồ thị

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\infty$



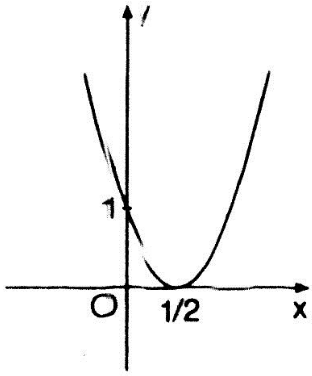
c) Đỉnh $I(\frac{1}{2}; 0)$

Trục đối xứng: $x = \frac{1}{2}$

Giao điểm với Oy là A(0; 1).

Bảng biến thiên và đồ thị

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



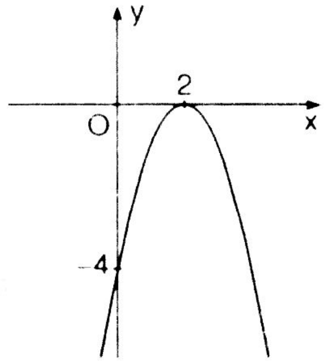
d) Đỉnh I(2; 0)

Trục đối xứng: x = 2

Giao điểm với Oy là A(0; –4).

Bảng biến thiên và đồ thị

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



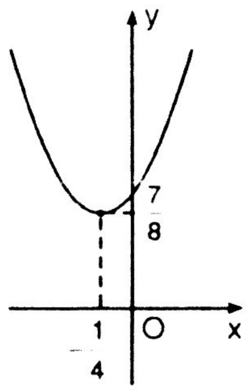
e) Đỉnh $I\left(-\frac{1}{4}; \frac{7}{8}\right)$

Trục đối xứng: $x = -\frac{1}{4}$

Giao điểm với Oy là A(0; 1).

Bảng biến thiên và đồ thị

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{7}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$



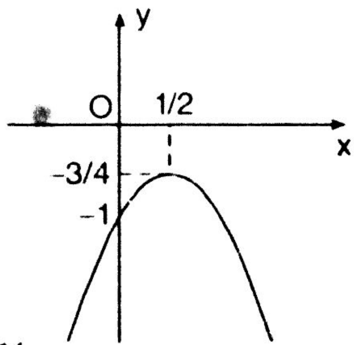
f) Đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$

Trục đối xứng: $x = \frac{1}{2}$

Giao điểm với Oy là A(0; −1).

Bảng biến thiên và đồ thị

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\infty$



3 Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 2$ biết rằng parabol đó:

a) Đi qua hai điểm M(1; 5) và N(−2; 8);

b) Đi qua điểm A(3; −4) và có trục đối xứng là $x = -\frac{3}{2}$;

c) Có đỉnh là I(2; −2);

d) Đi qua điểm B(−1; 6) và tung độ của đỉnh là $-\frac{1}{4}$.

Giải

a) Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua hai điểm M(1; 5), N(−2; 8)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 2 = 5 \\ 4a - 2b + 2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 4a - 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Vậy parabol là: $y = 2x^2 + x + 2$.

b) Ta tìm a, b thỏa: $\begin{cases} 9a + 3b + 2 = -4 \\ -\dfrac{3}{2} = -\dfrac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 3b = -6 \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} \\ b = -1 \end{cases}$

Vậy parabol: $y = -\frac{1}{3}x^2 - x + 2$

c) Từ giả thiết, ta có: $\frac{-b}{2a} = 2$; $\frac{-\Delta}{4a} = -2$, hay $b = -4a$ và $8a - b^2 = -8a$.

Suy ra: $a = 1$; $b = -4$. Vậy $y = x^2 - 4x + 2$.

d) Từ giả thiết, ta có: $6 = a - b + 2$; $\frac{-\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$ hay $a - b = 4$ và $8a - b^2 = -a$.

Suy ra: $a = 1$; $b = -3$ hoặc $a = 16$; $b = 12$.

Vậy: $y = x^2 - 3x + 2$ hoặc $y = 16x^2 + 12x + 2$.

4. Xác định a, b, c biết parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm A(8; 0) và có đỉnh là I(6; −12).

Giải

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} 64a + 8b + c = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 6 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64a + 8b + c = 0 \\ 12a + b = 0 \\ 4ac - b^2 = -48a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -12a \\ c = 32a \\ 128a^2 - 144a^2 = -48a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -36 \\ c = 96 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = 3x^2 - 36x + 96.$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số

a) $y = x^2 + x + 1$; b) $y = -2x^2 + x - 2$; c) $y = 4x^2 - 4x + 1$;

d) $y = -x^2 + 2x - 1$; e) $y = 3x^2 - 2x - 1$.

2. Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 1$.

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số.

b) Tìm giao điểm của đồ thị (P) với đường thẳng $y = -x + 1$.

c) Tìm giao điểm của đồ thị (P) với đường thẳng $y = 2x - 5$.

Vẽ đường thẳng này trên cùng hệ trục tọa độ của đồ thị (P).

3. Xác định các hệ số a, b và c để cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$ và nhận giá trị bằng 1 khi $x = 1$. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đó.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \dfrac{2}{x+1} + \sqrt{x+3}$; b) $y = \sqrt{2-3x} - \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$; c) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x+3} & \text{với } x \geq 1 \\ \sqrt{2-x} & \text{với } x < 1 \end{cases}$.

Giải

a) y xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \geq -3 \end{cases}$. Vậy $D = [-3; +\infty) \setminus \{-1\}$.

b) y xác định $\begin{cases} 2-3x \geq 0 \\ 1-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{2}{3} \\ x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$. Vậy $D = \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$

c) $D = \mathbb{R}$

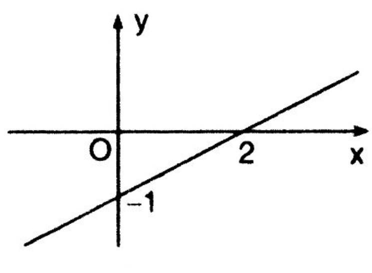
2. Xét chiều biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = \dfrac{1}{2}x - 1$; b) $y = 4 - 2x$; c) $y = \sqrt{x^2}$; d) $y = |x+1|$.

Hướng dẫn

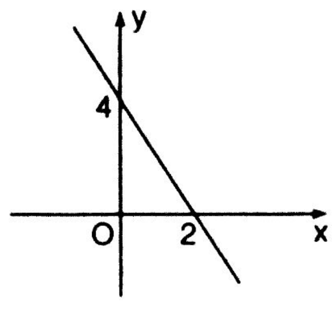
a) $y = \dfrac{1}{2}x - 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$+\infty$



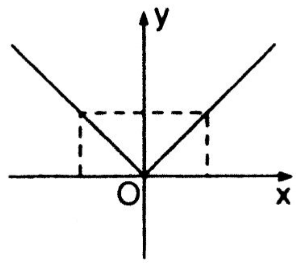
b) $y = 4 - 2x$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\infty$



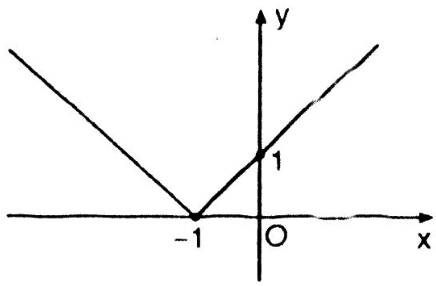
c) $y = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x \text{ với } x \geq 0 \\ -x \text{ với } x < 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



d) $y = |x + 1| = \begin{cases} x + 1 \text{ với } x \geq -1 \\ -x - 1 \text{ với } x < -1 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



3. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số

a) $y = x^2 - 2x - 1$;　　　　　　b) $y = -x^2 + 3x + 2$.

Hướng dẫn

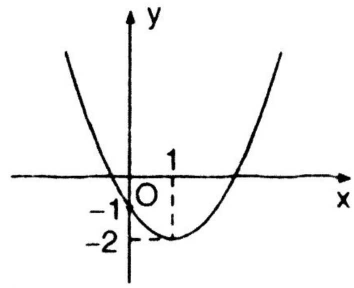
a) Đỉnh $I(1; -2)$

Trục đối xứng: $x = 1$

Giao điểm với Oy là $A(0; -1)$

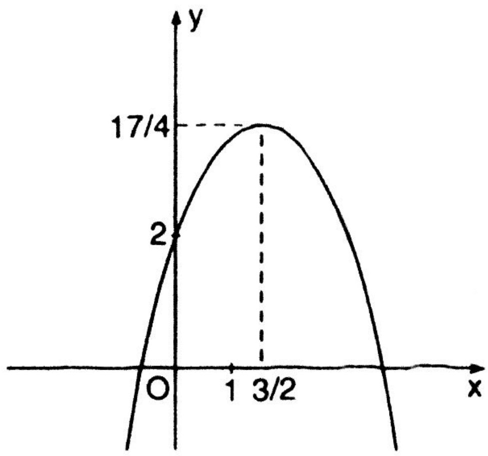
Bảng biến thiên và đồ thị

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$



b) Đỉnh $I\left(\frac{3}{2}; \frac{17}{4}\right)$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$\frac{17}{4}$	↘	$-\infty$



4. Xác định a, b biết đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(1; 3)$, $B(-1; 5)$.

Giải

Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $A(1; 3)$, $B(-1; 5)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ -a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$$

5. Xác định a, b, c biết parabol $y = ax^2 + bx + c$

a) Đi qua ba điểm $A(0; -1)$, $B(1; -1)$, $C(-1; 1)$;

b) Có đỉnh $I(1; 4)$ và đi qua điểm $D(3; 0)$.

Giải

a) Vì A, B, C $\in$ (P) nên $\begin{cases} c = -1 \\ a + b + c = -1 \\ a - b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$. Vậy (P): $y = x^2 - x - 1$

b) Giải hệ $\begin{cases} 9a + 3b + c = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 3b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$

Vậy (P): $y = -x^2 + 2x + 3$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng trong các bài tập sau:

6. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x - 3} - \sqrt{1 - 2x}$ là

(A) $D = \left[\dfrac{1}{2}; 3\right]$; (B) $D = \left[-\infty; \dfrac{1}{2}\right] \cup [3; +\infty)$; (C) $D = \varnothing$; (D) $D = \mathbb{R}$.

Trả lời: y xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy $D = \varnothing$. Chọn (C).

7. Parabol $y = 3x^2 - 2x + 1$ có đỉnh là:

(A) $I\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$; (B) $I\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$; (C) $I\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$; (D) $I\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.

Trả lời: Đỉnh $\begin{cases} x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{3} \\ y_0 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$. Chọn (D).

8. Hàm số $y = x^2 - 5x + 3$

(A) Đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{5}{2}\right)$; (B) Đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{5}{2}; +\infty\right)$;

(C) Nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{5}{2}; +\infty\right)$; (D) Đồng biến trên khoảng (0; 3).

Trả lời: Đỉnh $I\left(\dfrac{5}{2}; -\dfrac{13}{4}\right)$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & \dfrac{5}{2} & & +\infty \\ \hline & +\infty & & & & +\infty \\ y & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & -\dfrac{13}{4} & & \end{array}$$

Chọn (B).

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Phương trình một ẩn

Phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng:

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

trong đó f(x) và g(x) là những biểu thức của x. Ta gọi f(x) là vế trái, g(x) là vế phải của phương trình (1).

Nếu có số thực x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ là mệnh đề đúng thì x_0 được gọi là một nghiệm của phương trình (1).

Giải phương trình (1) là tìm tất cả các nghiệm của nó (nghĩa là tìm tập nghiệm).

Nếu phương trình không có nghiệm nào cả thì ta nói phương trình vô nghiệm (hoặc nói tập nghiệm của nó là rỗng).

2. Phương trình tương đương

Hai phương trình được gọi là tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.

3. Phép biến đổi tương đương

Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương.

a) Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc một biểu thức;

b) Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

4. Phương trình hệ quả

Nếu mọi nghiệm của phương trình f(x) = g(x) đều là nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ thì phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ được gọi là phương trình hệ quả của phương trình f(x) = g(x).

Ta viết: $f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho hai phương trình: $3x = 2$ và $2x = 3$.

Cộng các vế tương ứng của hai phương trình đã cho. Hỏi

a) Phương trình nhận được có tương đương với một trong hai phương trình đã cho hay không?

b) Phương trình đó có phải là phương trình hệ quả của một trong hai phương trình đã cho hay không?

Giải

Cộng các vế tương ứng của hai phương trình đã cho ta được $5x = 5$.

a), b) Phương trình $5x = 5$ không tương với phương trình nào trong hai phương trình đã cho và cũng không là hệ quả của một trong hai phương trình đó.

2. Cho hai phương trình: $4x = 5$ và $3x = 4$

Nhân các vế tương ứng của hai phương trình đã cho. Hỏi

a) Phương trình nhận được có tương đương với một trong hai phương trình đã cho hay không?

b) Phương trình đó có phải là phương trình hệ quả của một trong hai phương trình đã cho hay không?

Giải

Nhân ta được phương trình: $12x^2 = 20$

a) Phương trình $12x^2 = 20$ không tương đương với một trong hai phương trình đã cho.

b) Phương trình $12x^2 = 20$ không là hệ quả của một trong hai phương trình đã cho.

3. Giải các phương trình

a) $\sqrt{3-x} + x = \sqrt{3-x} + 1$;

b) $x + \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + 2$;

c) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{9}{\sqrt{x-1}}$;

d) $x^2 - \sqrt{1-x} = \sqrt{x-2} + 3$.

Giải

a) Điều kiện: $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$

Ta có $\sqrt{3-x} + x = \sqrt{3-x} + 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa điều kiện)

Vậy $S = \{1\}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

$x = 2$ thỏa phương trình nên $S = \{2\}$.

c) Điều kiện $x > 1$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{9}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ (nhận)} \\ x = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $S = \{3\}$.

d) Điều kiện: $\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy $S = \varnothing$.

4. Giải các phương trình

a) $x+1+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{x+5}{x+3}$;

b) $2x+\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{3x}{x-1}$;

c) $\dfrac{x^2-4x-2}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{x-2}$;

d) $\dfrac{2x^2-x-3}{\sqrt{2x-3}}=\sqrt{2x-3}$.

Giải

a) Điều kiện: $x \neq -3$

Ta có: $x+1+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{x+5}{x+3} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+4x+5}{x+3}=\dfrac{x+5}{x+3}$

$$\Leftrightarrow x^2+3x=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ (nhận)} \\ x=-3 \text{ (loại do vi phạm điều kiện)} \end{array}\right.$$

Vậy $S=\{0\}$.

b) Điều kiện $x \neq 1$

Ta có: $2x+\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{3x}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-2x+3}{x-1}=\dfrac{3x}{x-1}$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (loại)} \\ x=\dfrac{3}{2} \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

c) Điều kiện $x>2$

$$\dfrac{x^2-4x-2}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{x-2} \Leftrightarrow 2x^2-4x-2=x-2$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ (loại do vi phạm điều kiện)} \\ x=5 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

Vậy $S=\{5\}$.

d) Điều kiện: $x>\dfrac{3}{2}$

$$\dfrac{2x^2-x-3}{\sqrt{2x-3}}=\sqrt{2x-3} \Leftrightarrow 2x^2-x-3=2x-3$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(2x-3)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ (loại)} \\ x=\dfrac{3}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $S=\varnothing$.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải các phương trình:

a) $\frac{|x|}{\sqrt{x-2}} = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$; b) $(x^2 - 6x + 5)\sqrt{x-3} = 0$;

c) $x - \sqrt{2-x} = 5 - \sqrt{2-x}$.

2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x-3} = \sqrt{7x-1}$; b) $\sqrt{x+1} = 2 - x$; c) $|x+1| = 2 - x$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Phương trình bậc nhất

Giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$

ax + b = 0 (1)		
Hệ số		Kết luận
$a \neq 0$		(1) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$
$a = 0$	$b \neq 0$	(1) vô nghiệm
	$b = 0$	(1) nghiệm đúng với mọi x

2. Phương trình bậc hai

$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)\ (2)$	
$\Delta = b^2 - 4ac$	Kết luận
$\Delta > 0$	(2) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	(2) có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	(2) vô nghiệm

3. Định lí Vi-ét

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\quad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng u + v = S và tích uv = P thì u và v là các nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

4. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối $|A| = B$

Cách 1: Xét dấu A rồi áp dụng $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$

Cách 2: Điều kiện $B \geq 0$

$$|A| = B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$$

5. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

6. Phương trình chứa ẩn ở mẫu:

- Đặt điều kiện (ĐKXĐ).
- Quy đồng mẫu thức và bỏ mẫu thức chung.
- Đưa về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai.
- Kiểm tra điều kiện.
- Kết luận tập nghiệm.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Giải các phương trình

a) $\dfrac{x^2+3x+2}{2x+3} = \dfrac{2x-5}{4}$; b) $\dfrac{2x+3}{x-3} - \dfrac{4}{x+3} = \dfrac{24}{x^2-9} + 2$;

c) $\sqrt{3x-5} = 3$; d) $\sqrt{2x+5} = 2$.

Giải

a) Điều kiện: $x \neq -\dfrac{3}{2}$

$$\frac{x^2+3x+2}{2x+3} = \frac{2x-5}{4} \Leftrightarrow 4(x^2+3x+2) = (2x+3)(2x-5)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 8 = 4x^2 - 10x + 6x - 15 \Leftrightarrow 16x = -23$$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{23}{16}$ (thỏa điều kiện)

Vậy $S = \left\{-\dfrac{23}{16}\right\}$.

b) Điều kiện: $x \neq \pm 3$

Ta có: $\frac{2x+3}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{24}{x^2-9} + 2$

$\Leftrightarrow \quad (2x+3)(x+3) - 4(x-3) = 24 + 2(x^2 - 9) \Leftrightarrow 5x = -15$

$\Leftrightarrow \quad x = -3$ (loại). Vậy $S = \varnothing$

c) Điều kiện: $x \geq \frac{5}{3}$

$$\sqrt{3x-5} = 3 \Leftrightarrow 3x - 5 = 9 \Leftrightarrow x = \frac{14}{3} \text{ (nhận)}$$

Vậy $S = \left\{\frac{14}{3}\right\}$.

d) Điều kiện: $x \geq -\frac{5}{2}$

$$\sqrt{2x+5} = 2 \Leftrightarrow 2x + 5 = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy } S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

2. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

a) $m(x-2) = 3x + 1$; b) $m^2x + 6 = 4x + 3m$;

c) $(2m+1)x - 2m = 3x - 2$.

Giải

a) Ta có $m(x-2) = 3x + 1 \Leftrightarrow (m-3)x = 2m + 1$

Nếu $m \neq 3$ thì $x = \frac{2m+1}{m-3}$; $S = \left\{\frac{2m+1}{m-3}\right\}$

Nếu $m = 3$ thì $0x = 7$; $S = \varnothing$

b) $m^2x + 6 = 4x + 3m \Leftrightarrow (m^2 - 4)x = 3m - 6 \Leftrightarrow (m-2)(m+2)x = 3(m-2)$.

Nếu $m \neq \pm 2$ thì $x = \frac{3}{m+2}$; $S = \left\{\frac{3}{m+2}\right\}$

Nếu $m = 2$ thì $0x = 0$; $S = \mathbb{R}$

Nếu $m = -2$ thì $0x = -12$; $S = \varnothing$

c) $(2m+1)x - 2m = 3x - 2 \Leftrightarrow (2m-2)x = 2m - 2$.

Nếu $m \neq 1$ thì $x = 1$; $S = \{1\}$

Nếu $m = 1$ thì $0x = 0$; $S = \mathbb{R}$.

3. Có hai rổ quýt chứa số quýt bằng nhau. Nếu lấy 30 quả ở rổ thứ nhất đưa sang rổ thứ hai thì số quả ở rổ thứ hai bằng $\frac{1}{3}$ của bình phương số quả còn lại ở rổ thứ nhất. Hỏi số quả quýt ở mỗi rổ lúc ban đầu là bao nhiêu?

Giải

Gọi x là số quýt ở mỗi rổ. Điều kiện là x nguyên và lớn hơn 30. Ta có phương trình

$$x + 30 = \frac{1}{3}(x - 30)^2 \Leftrightarrow x^2 - 63x + 810 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 45 \\ x = 18 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy số quýt ở mỗi rổ lúc đầu là 45 quả.

4. Giải các phương trình

a) $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$; b) $3x^4 + 2x^2 - 1 = 0$.

Giải

a) Đặt $X = x^2$ $(X \geq 0)$

Ta có: $2X^2 - 7X + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = \frac{5}{2} \\ X = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{5}{2} \\ x^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2} \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

Vậy $S = \left\{-1; 1; -\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$.

b) Đặt $x = X^2$ $(X \geq 0)$

Ta có: $3X^2 + 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = -1 \text{ (loại)} \\ X = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

5. Giải các phương trình sau bằng máy tính bỏ túi (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba)

a) $2x^2 - 5x - 4 = 0$; b) $-3x^2 + 4x + 2 = 0$;

c) $3x^2 + 7x + 4 = 0$; d) $9x^2 - 6x - 4 = 0$.

Đáp số: a) $x_1 \approx 3,137$; $x_2 \approx -0,637$; b) $x_1 \approx -0,387$; $x_2 \approx 1,721$;

c) $x_1 = -1$; $x_2 \approx -1,333$; d) $x_1 \approx 1,079$; $x_2 \approx -0,412$.

6. Giải các phương trình

a) $|3x - 2| = 2x + 3$; b) $|2x - 1| = |-5x - 2|$;

c) $\frac{x-1}{2x-3} = \frac{-3x+1}{|x+1|}$; d) $|2x + 5| = x^2 + 5x + 1$.

Giải

a) Điều kiện: $x \geq -\frac{3}{2}$

Ta có: $|3x - 2| = 2x + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 2 = 2x + 3 \\ 3x - 2 = -2x - 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -\dfrac{1}{5} \end{array}\right.$

Cả hai nghiệm đều thỏa điều kiện. Vậy $S = \left\{-\dfrac{1}{5}; 5\right\}$.

b) Ta có: $|2x - 1| = |-5x - 2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = -5x - 2 \\ 2x - 1 = 5x + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{7} \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy $S = \left\{-1; -\dfrac{1}{7}\right\}$.

c) Điều kiện: $x \neq \dfrac{3}{2}$ và $x \neq -1$.

Nếu $x > -1$ phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$x^2 - 1 = -6x^2 + 11x - 3 \Leftrightarrow 7x^2 - 11x + 2 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{11 \pm \sqrt{65}}{14}$ (thỏa điều kiện $x > -1$ và $x \neq \dfrac{3}{2}$)

Nếu $x < -1$ phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$1 - x^2 = -6x^2 + 11x - 3 \Leftrightarrow 5x^2 - 11x + 4 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{11 \pm \sqrt{41}}{10}$ (loại vì $\dfrac{11 \pm \sqrt{41}}{10}$ đều lớn hơn -1)

Vậy $S = \left\{\dfrac{11 - \sqrt{65}}{14}; \dfrac{11 + \sqrt{65}}{14}\right\}$.

d) • Với $x > -\dfrac{5}{2}$ ta có: $|2x + 5| = x^2 + 5x + 1 \Leftrightarrow 2x + 5 = x^2 + 5x + 1$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -4 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

• Với $x < -\dfrac{5}{2}$ ta có: $|2x + 5| = x^2 + 5x + 1 \Leftrightarrow -2x - 5 = x^2 + 5x + 1$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = -6 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$

Vậy $S = \{1; -6\}$.

7. Giải các phương trình:

a) $\sqrt{5x + 6} = x - 6$;

b) $\sqrt{3 - x} = \sqrt{x + 2} + 1$;

c) $\sqrt{2x^2 + 5} = x + 2$;

d) $\sqrt{4x^2 + 2x + 10} = 3x + 1$.

Giải

a) $\sqrt{5x+6} = x - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6 \geq 0 \\ 5x + 6 = (x-6)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x^2 - 17x + 30 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ \left[\begin{array}{l} x = 15 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 15$. Vậy $S = \{15\}$.

b) Điều kiện $-2 \leq x \leq 3$.

Ta có: $\sqrt{3-x} = \sqrt{x+2} + 1 \Leftrightarrow 3 - x = x + 2 + 2\sqrt{x+2} + 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ x + 2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = -1$ (nhận). Vậy $S = \{-1\}$.

c) $\sqrt{2x^2+5} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ 2x^2 + 5 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$

Vậy $S = \{2 - \sqrt{3} ; 2 + \sqrt{3}\}$.

d) $\sqrt{4x^2 + 2x + 10} = 3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 4x^2 + 2x + 10 = (3x+1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ 5x^2 + 4x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$. Vậy $S = \{1\}$

8. Cho phương trình $3x^2 - 2(m+1)x + 3m - 5 = 0$.

Xác định m để phương trình có một nghiệm gấp ba nghiệm kia. Tìm các nghiệm trong trường hợp đó.

Giải

Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - 3(3m-5) = m^2 - 7m + 16 = \left(m - \dfrac{7}{2}\right)^2 + \dfrac{15}{4} > 0; \forall m$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Theo đề bài và định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m+2}{3} & (1) \\ x_1 = 3x_2 & (2) \\ x_1 x_2 = \dfrac{3m-5}{3} & (3) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra $x_1 = \dfrac{m+1}{2}$; $x_2 = \dfrac{m+1}{6}$

Thay x_1, x_2 vào (3) ta được:

$$(m+1)^2 = 4(3m-5) \Leftrightarrow m^2 - 10m + 21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 7 \end{array}\right.$$

Với $m = 3$ ta có phương trình $3x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$ $\quad S = \left\{2; \dfrac{2}{3}\right\}$

Với $m = 7$ ta có phương trình $3x^2 - 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$ $\quad S = \left\{4; \dfrac{4}{3}\right\}$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải và biện luận các phương trình sau:

a) $m^2x + 1 = mx + m$;

b) $mx + 2(x - m) = (m+1)^2 + 3$;

c) $a(ax + 2b^2) - a^2 = b^2(x + a)$.

2. Định a, b để phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$:

$$a(3x - 1) + b(6x + 1) = 2x + 2$$

Đáp số: $a = -\dfrac{10}{9}$; $b = \dfrac{8}{9}$.

3. Định m để phương trình sau có nghiệm dương: $m^2(x - 1) = 4x - 3m + 2$.

Đáp số: $m < -2$ hoặc $m > 1$.

4. Cho tam giác có ba cạnh a, b, c. Chứng minh phương trình sau vô nghiệm:

$$b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

Hướng dẫn: $\Delta = (a + b + c)(b + c - a)(b + a - c)(b - c - a) < 0$

5. Chứng minh rằng phương trình:

$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ luôn có nghiệm.

Hướng dẫn: Biến đổi phương trình về dạng:

$$3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = 0$$

$$\Delta' = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0.$$

6. Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m + 1 = 0$. Định m để phương trình:

a) Có hai nghiệm trái dấu; b) Có hai nghiệm dương phân biệt;

c) Có đúng một nghiệm dương.

Đáp số: a) $m < -1$; b) $m > 3$; c) $m = 3$ hoặc $m < -1$.

7. Cho phương trình $2x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $3x_1 - 4x_2 = 11$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm đều âm.

c) Tìm một hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.

8. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m:

a) $\dfrac{mx - m + 1}{x + 2} = 3$ (1); b) $\dfrac{mx + m - 2}{x - m} = 3$ (2)

c) $\dfrac{x - m}{x - 1} + \dfrac{x - 1}{x - m} = 2$ (3); d) $\dfrac{x + m}{x - 1} = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

9. Giải phương trình:

a) $(x + 5)(2 - x) = 3\sqrt{x^2 + 3x}$; b) $1 + \dfrac{2}{3}\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$;

c) $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$.

§3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là:

$$ax + by = c \ (1)$$

trong đó a, b, c là các hệ số, với điều kiện a và b không đồng thời bằng 0.

2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (*)$$

trong đó x, y là hai ẩn; các chữ số còn lại là hệ số.

Nếu cặp số $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của hai phương trình của hệ thì $(x_0; y_0)$ gọi là một nghiệm của hệ phương trình (*).

Giải hệ phương trình (*) là tìm tập nghiệm của nó.

3. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

Phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là

$$ax + by + cz = d$$

trong đó x, y, z là ba ẩn; a, b, c, d là các hệ số và a, b, c không đồng thời bằng 0.

Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

trong đó x, y, z là ba ẩn; các chữ còn lại là các hệ số. Mỗi bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ nghiệm đúng cả ba phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 7x - 5y = 9 \\ 14x - 10y = 10; \end{cases}$

Tại sao không cần giải ta cũng kết luận được hệ phương trình này vô nghiệm?

Giải

Hệ phương trình vô nghiệm, vì $\begin{cases} 7x - 5y = 9 \\ 14x - 10y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 5y = 9 \\ 7x - 5y = 5. \end{cases}$

2. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 3; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 4x - 2y = 2; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{3}{4}y = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 0,3x - 0,2y = 0,5 \\ 0,5x + 0,4y = 1,2. \end{cases}$

Giải

Giải bằng phương pháp thế hoặc cộng đại số sau đó sử dụng máy tính cầm tay để kiểm tra kết quả.

Đáp số: a) $\left(\dfrac{11}{7}; \dfrac{5}{7}\right)$; b) $\left(\dfrac{9}{11}; \dfrac{7}{11}\right)$; c) $\left(\dfrac{9}{8}; -\dfrac{1}{6}\right)$; d) (2; 0,5).

3. Hai bạn Vân và Lan đến cửa hàng mua trái cây. Bạn Vân mua 10 quả quýt, 7 quả cam với giá tiền là 17800 đồng. Bạn Lan mua 12 quả quýt, 6 quả cam hết 18000 đồng. Hỏi giá tiền mỗi quả quýt và mỗi quả cam là bao nhiêu?

Giải

Gọi x (đồng) là giá tiền một quả quýt, y (đồng) là giá tiền một quả cam (x > 0, y > 0). Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 10x + 7y = 17800 \\ 12x + 6y = 18000 \end{cases} \Leftrightarrow x = 800, y = 1400.$

Giá mỗi quả quýt là 800 đồng, giá mỗi quả cam là 1400 đồng.

4. Có hai dây chuyền may áo sơ mi. Ngày thứ nhất cả hai dây chuyền may được 930 áo. Ngày thứ hai do dây chuyền thứ nhất tăng năng suất 18%, dây chuyền thứ hai tăng năng suất 15% nên cả hai dây chuyền may được 1083 áo. Hỏi trong ngày thứ nhất mỗi dây chuyền may được bao nhiêu áo sơ mi?

Giải

Gọi x và y lần lượt là số áo sơ mi dây chuyền thứ nhất, thứ hai may được trong ngày thứ nhất, điều kiện x và y nguyên dương.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 930 \\ 1,18x + 1,15y = 1083 \end{cases} \Leftrightarrow x = 450, y = 480.$

Vậy trong ngày thứ nhất dây chuyền thứ nhất may được 450 áo và dây chuyền thứ hai may được 480 áo.

5. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 8 \\ 2x + 2y + z = 6 \\ 3x + y + z = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y + 2z = -7 \\ -2x + 4y + 3z = 8 \\ 3x + y - z = 5. \end{cases}$

Giải

a) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất cho –2 rồi cộng vào phương trình thứ hai, nhân hai vế phương trình thứ nhất cho –3 rồi cộng vào phương trình thứ ba ta được:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 8 \\ -4y - 3z = -10 \\ -8y - 5z = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 8 \\ -4y - 3z = -10 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \\ z = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $S = \{(1; 1; 2)\}$

b) $S = \left\{\left(\frac{11}{14}; \frac{5}{2}; -\frac{1}{7}\right)\right\}.$

6. Một cửa hàng bán áo sơ mi, quần âu nam và váy nữ. Ngày thứ nhất bán được 12 áo, 21 quần và 18 váy, doanh thu là 5 349 000 đồng. Ngày thứ hai bán được 16 áo, 24 quần và 12 váy, doanh thu là 5 600 000 đồng. Ngày thứ ba bán được 24 áo, 15 quần và 12 váy, doanh thu là 5 259 000 đồng. Hỏi giá bán mỗi áo, mỗi quần và mỗi váy là bao nhiêu?

Giải

Gọi x (ngàn đồng) là giá bán một áo sơ mi,

y (ngàn đồng) là giá bán một quần âu,

z (ngàn đồng) là giá bán một váy nữ. (Điều kiện $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$)

Ta có: $\begin{cases}12x + 21y + 18z = 5349\\16x + 24y + 12z = 5600\\24x + 15y + 12z = 5259\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x + 7y + 6z = 1783\\8x + 12y + 6z = 2800\\8x + 5y + 4z = 1753\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4x + 7y + 6z = 1783\\-2y - 6z = -766\\-9y - 8z = -1813\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x + 7y + 6z = 1783\\y + 3z = 383\\-9y - 8z = -1813\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4x + 7y + 6z = 1783\\y + 3z = 383\\19z = 1634\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 98\\y = 125\\z = 86.\end{cases}$

Vậy giá một áo là 98000 đồng, giá một quần là 125000 đồng, giá một váy là 86000 đồng.

7 Giải các hệ phương trình sau bằng máy tính bỏ túi (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

a) $\begin{cases}3x - 5y = 6\\4x + 7y = -8;\end{cases}$ b) $\begin{cases}-2x + 3y = 5\\5x + 2y = 4.\end{cases}$

c) $\begin{cases}2x - 3y + 4z = -5\\-4x + 5y - z = 6\\3x + 4y - 3z = 7;\end{cases}$ d) $\begin{cases}-x + 2y - 3z = 2\\2x + y + 2z = -3\\-2x - 3y + z = 5.\end{cases}$

Đáp số: a) $(x; y) \approx (0{,}05; -1{,}17)$; b) $(x; y) \approx (0{,}11; 1{,}74)$

c) $(x; y; z) \approx (0{,}22; 1{,}30; -0{,}39)$; d) $(x; y; z) \approx (-4; 1{,}57; 1{,}71)$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1 Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases}5x - 4y = 3\\7x - 9y = 8\end{cases}$; b) $\begin{cases}\sqrt{3}x - \sqrt{2}y = -1\\2\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0\end{cases}$

2 Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases}\dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{y-1} = 3\\\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{y-1} = 4\end{cases}$; b) $\begin{cases}\dfrac{3(x+y)}{x-y} = -7\\\dfrac{5x-y}{y-x} = \dfrac{5}{3}\end{cases}$

3 Giải hệ phương trình sau (có thể sử dụng máy tính bỏ túi):

$$\begin{cases}x + y + z = 11\\2x - y + z = 5\\3x + 2y + z = 24\end{cases}$$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Giải các phương trình

a) $\sqrt{x-5}+x=\sqrt{x-5}+6$;

b) $\sqrt{1-x}+x=\sqrt{x-1}+2$;

c) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{8}{\sqrt{x-2}}$;

d) $3+\sqrt{2-x}=4x^2-x+\sqrt{x-3}$.

Giải

a) Điều kiện: $\Leftrightarrow x \geq 5$

$$\sqrt{x-5}+x=\sqrt{x-5}+6 \Leftrightarrow x=6 \text{ (nhận). Vậy } S=\{6\}.$$

b) Điều kiện $\begin{cases}1-x \geq 0\\ x-1 \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x=1$

$x = 1$ không thỏa phương trình. Vậy $S = \varnothing$

c) Điều kiện: $x > 2$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x-2}}=\frac{8}{\sqrt{x-2}} \Leftrightarrow x^2=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\sqrt{2}\\ x=-2\sqrt{2} \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

Vậy $S = \{2\sqrt{2}\}$.

d) Điều kiện $\begin{cases}2-x \geq 0\\ x-3 \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \leq 2\\ x \geq 3\end{cases}$ vô nghiệm. Vậy $S = \varnothing$.

2. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{3x+4}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{4}{x^2-4}+3$ (1);

b) $\dfrac{3x^2-2x+3}{2x-1}=\dfrac{3x-5}{2}$ (2);

c) $\sqrt{x^2-4}=x-1$ (3).

Giải

a) Điều kiện: $x \neq \pm 2$

$(1) \Leftrightarrow (3x+4)(x+2)-(x-2)=4+3(x^2-4)$

$\Leftrightarrow 3x^2+10x+8-x+2=4+3x^2-12$

$\Leftrightarrow 9x=-18 \Leftrightarrow x=-2$ (loại)

Vậy $S = \varnothing$.

b) Điều kiện: $x \neq \dfrac{1}{2}$

$(2) \Leftrightarrow 6x^2-4x+6=(2x-1)(3x-5)$

$\Leftrightarrow 6x^2-4x+6=6x^2-13x+5 \Leftrightarrow 9x=-1$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{9}$. Vậy $S=\left\{-\dfrac{1}{9}\right\}$

c) $\sqrt{x^2 - 4} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 4 = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x - 5 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$. Vậy $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

3. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} -2x + 5y = 9 \\ 4x + 2y = 11; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 5x - 2y = 7; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 2y = 8; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + 3y = 15 \\ 4x - 5y = 6. \end{cases}$

Đáp số: a) $x = \frac{37}{24}$, $y = \frac{29}{12}$; b) $x = 2$, $y = \frac{3}{2}$;

c) $x = \frac{34}{13}$, $y = \frac{1}{13}$; d) $x = \frac{93}{37}$; $y = \frac{30}{37}$.

4. Hai công nhân được giao việc sơn một bức tường. Sau khi người thứ nhất làm được 7 giờ và người thứ hai làm được 4 giờ thì họ sơn được $\frac{5}{9}$ bức tường. Sau đó họ cùng làm việc với nhau trong 4 giờ nữa thì chỉ còn lại $\frac{1}{18}$ bức tường chưa sơn. Hỏi nếu mỗi người làm riêng thì sau bao nhiêu giờ mỗi người mới sơn xong bức tường?

Giải

Gọi t_1 (giờ) là thời gian người thứ nhất sơn xong bức tường, t_2 (giờ) là thời gian người thứ hai sơn xong bức tường; điều kiện $t_1 > 0$, $t_2 > 0$.

Trong một giờ người thứ nhất sơn được $\frac{1}{t_1}$ bức tường, người thứ hai sơn được $\frac{1}{t_2}$ bức tường.

Theo đề bài ta có: $\frac{7}{t_1} + \frac{4}{t_2} = \frac{5}{9}$.

Sau 4 giờ làm việc chung họ sơn được: $\frac{4}{9} - \frac{1}{18} = \frac{7}{18}$ (bức tường).

Vậy ta có: $\frac{4}{t_1} + \frac{4}{t_2} = \frac{7}{18}$

Đặt $x = \frac{1}{t_1}$, $y = \frac{1}{t_2}$ ta được hệ phương trình: $\begin{cases} 7x + 4y = \frac{5}{9} \\ 4x + 4y = \frac{7}{18}. \end{cases}$

Giải ra được $x = \frac{1}{18}$, $y = \frac{1}{24}$. Suy ra $t_1 = 18$; $t_2 = 24$.

Vậy nếu làm riêng, người thứ nhất sơn xong bức tường sau 18 giờ, người thứ hai sơn xong bức tường sau 24 giờ.

5. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2x - 3y + z = -7 \\ -4x + 5y + 3z = 6 \\ x + 2y - 2z = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ -2x + 3y + z = -6 \\ 3x + 8y - z = 12. \end{cases}$

Đáp số: a) $x = -\dfrac{3}{5}$; $y = \dfrac{3}{2}$; $z = -\dfrac{13}{10}$; b) $x = \dfrac{181}{43}$, $y = \dfrac{7}{43}$, $z = \dfrac{83}{43}$

6. Ba phân số đều có tử số là 1 và tổng của ba phân số đó bằng 1. Hiệu của phân số thứ nhất và phân số thứ hai bằng phân số thứ ba, còn tổng của phân số thứ nhất và phân số thứ hai bằng 5 lần phân số thứ ba. Tìm các phân số đó.

Giải

Gọi phân số thứ nhất là x, phân số thứ hai là y, phân số thứ ba là z.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y \quad = z \\ x + y \quad = 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z \ = 1 \\ x - y - z \ = 0 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases}$

Giải ra được $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{3}$, $z = \dfrac{1}{6}$. Vậy: $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{6}$.

7. Một phân xưởng được giao sản xuất 360 sản phẩm trong một số ngày nhất định. Vì phân xưởng tăng năng suất, mỗi ngày làm thêm được 9 sản phẩm so với định mức, nên trước khi hết hạn một ngày thì phân xưởng đã làm vượt số sản phẩm được giao là 5%. Hỏi nếu vẫn tiếp tục làm việc với năng suất đó thì khi đến hạn phân xưởng làm được tất cả bao nhiêu sản phẩm?

Giải

Gọi x là số sản phẩm theo định mức mà phân xưởng phải sản xuất một ngày. Điều kiện x > 0. Số ngày phải giao sản phẩm là $\dfrac{360}{x}$.

Ta có phương trình: $\left(\dfrac{360}{x} - 1\right)(x + 9) = 360.\dfrac{105}{100} = 378$

$\Leftrightarrow \quad (360 - x)(x + 9) = 378x$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 27x - 3240 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 45 \\ x = -72 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy số ngày phải giao sản phẩm là $\dfrac{360}{45} = 8$ (ngày).

Đến lúc đó phân xưởng đã sản xuất được

$$8(45 + 9) = 8.54 = 432 \text{ (sản phẩm)}.$$

8. Giải các phương trình sau bằng máy tính bỏ túi

a) $5x^2 - 3x - 7 = 0$;

b) $3x^2 + 4x + 1 = 0$;

c) $0,2x^2 + 1,2x - 1 = 0$;

d) $\sqrt{2}x^2 + 5x + \sqrt{8} = 0$.

Đáp số: Nếu làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư thì ta có đáp số là:

a) $x_1 \approx 1,5207$; $x_2 \approx -0,9207$;

b) $x_1 \approx -0,3333$; $x_2 = -1,0000$;

c) $x_1 = 0,7417$; $x_2 \approx -6,7417$;

d) $x_1 = -0,7071$; $x_2 = -2,8284$

9. Giải các phương trình

a) $|4x - 9| = 3 - 2x$;

b) $|2x + 1| = |3x + 5|$.

Giải

a) Điều kiện: $3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{3}{2}$.

Ta có: $|4x - 9| = 3 - 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - 9 = 3 - 2x \\ 4x - 9 = 2x - 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{12}{2} = 2 \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{6}{2} = 3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy: $S = \varnothing$.

b) Ta có: $|2x + 1| = |3x + 5| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 1 = 3x + 5 \\ 2x + 1 = -3x - 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -\dfrac{6}{5} \end{array}\right.$

Vậy: $S = \left\{-4; -\dfrac{6}{5}\right\}$.

10. Tìm hai cạnh của một mảnh vườn hình chữ nhật trong hai trường hợp

a) Chu vi là 94,4m và diện tích là $494,55m^2$.

b) Hiệu của hai cạnh là 12,1m và diện tích là $1089m^2$.

Giải

a) Gọi x, y (x, y > 0) là hai cạnh của hình chữ nhật.

Ta có: $\begin{cases} x + y = 47,2 \\ xy = 494,55 \end{cases}$

Vậy x, y là nghiệm phương trình: $X^2 - 47,2X + 494,55 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 31,5 \\ X = 15,7 \end{array}\right.$

Vậy chiều dài là 31,5 m và chiều rộng 15,7 m.

b) Giải hệ $\begin{cases} x - y = 12,1 \\ xy = 1089 \end{cases}$ ta được $\begin{cases} x = 39,6 \\ y = 27,5 \end{cases}$

Vậy chiều dài là 39,6 m và chiều rộng là 27,5 m.

11. Hai người quét sân. Cả hai người cùng quét sân hết 1 giờ 20 phút, trong khi nếu chỉ quét một mình thì người thứ nhất quét hết nhiều hơn 2 giờ so với người thứ hai. Hỏi mỗi người quét sân một mình thì hết mấy giờ?

Giải

Giả sử người thứ nhất quét sân một mình hết t_1 giờ, người thứ hai quét một mình hết t_2 giờ (điều kiện $t_1 > 0$, $t_2 > 0$). Trong 1 giờ hai người quét lần lượt là: $\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}$ sân.

Ta có: $\begin{cases} t_1 = t_2 + 2 \quad (1) \left(1\text{giờ } 20 \text{ phút} = \frac{4}{3} \text{ giờ}\right) \\ \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{3}{4} \quad (2) \end{cases}$

Từ (2) suy ra: $4(t_1 + t_2) = 3t_1t_2$. (3)

Thay (1) vào (3): $3t_2^2 - 2t_2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_2 = 2 \\ t_2 = -\frac{4}{3} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$$t_2 = 2 \Rightarrow t_1 = 4.$$

Vậy người thứ nhất quét sân một mình hết 4 giờ, người thứ hai quét sân một mình hết 2 giờ.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng trong các bài tập sau:

12. Điều kiện của phương trình $x + 2 - \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{4-3x}}{x+1}$ là

(A) $x > -2$ và $x \neq -1$;

(B) $x > -2$ và $x < \frac{4}{3}$;

(C) $x > -2$, $x \neq -1$ và $x \leq \frac{4}{3}$;

(D) $x \neq -2$ và $x \neq -1$.

Trả lời: Điều kiện $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 4 - 3x \geq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq \frac{4}{3} \\ x \neq -1 \end{cases}$. Chọn (C).

13. Tập nghiệm của phương trình $\frac{(m^2+2)x+2m}{x}=2$ trong trường hợp $m \neq 0$ là

(A) $\left\{-\frac{2}{m}\right\}$; (B) $\varnothing$; (C) $\mathbb{R}$; (D) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Trả lời: $m^2x=-2m \Leftrightarrow x=-\frac{2}{m}$ (vì $m \neq 0$).

Chọn (A).

14. Nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}3x-5y=2\\4x+2y=7\end{cases}$ là

(A) $\left(-\frac{39}{26};\frac{3}{13}\right)$; (B) $\left(-\frac{17}{13};\frac{-5}{13}\right)$;

(C) $\left(\frac{39}{26};\frac{1}{2}\right)$; (D) $\left(-\frac{1}{3};\frac{17}{6}\right)$.

Trả lời: Chọn (C).

15. Nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}3x-2y-z=7\\-4x+3y-2z=15\\-x-2y+3z=-5\end{cases}$ là

(A) (-10; 7; 9); (B) $\left(\frac{3}{2};-2;\frac{3}{2}\right)$;

(C) $\left(-\frac{1}{4};\frac{-9}{2};\frac{5}{4}\right)$; (D) (–5; –7; –8).

Trả lời: Chọn (D).

Chương IV. BẤT ĐẲNG THỨC. BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. BẤT ĐẲNG THỨC

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Bất đẳng thức hệ quả và bất đẳng thức tương đương

Nếu mệnh đề "$a < b \Rightarrow c < d$" đúng thì ta nói bất đẳng thức $c < d$ là bất đẳng thức hệ quả của bất đẳng thức $a < b$ và cũng viết là $a < b \Rightarrow c < d$.

2. Tính chất của bất đẳng thức

Tính chất		Tên gọi
Điều kiện	Nội dung	
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	Cộng hai vế của bất đẳng thức với một số
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều
$a > 0, c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều
n nguyên dương	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một luỹ thừa
	$0 < a < b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n}$	
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	

3. Bất đẳng thức Cô-si

Trung bình nhân của hai số không âm nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của chúng.

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \qquad \forall a, b \geq 0$$

Đẳng thức $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$ xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Hệ quả 1: Tổng của một số dương với nghịch đảo của nó lớn hơn hoặc bằng 2.

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \qquad \forall a > 0$$

Hệ quả 2: Nếu x, y cùng dương và có tổng không đổi thì tích xy lớn nhất khi và chỉ khi x = y.

Hệ quả 3: Nếu x, y cùng dương và có tích không đổi thì tổng x + y nhỏ nhất khi và chỉ khi x = y.

4. Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

Điều kiện	Nội dung
	$|x| \geq 0$, $|x| \geq x$, $|x| \geq -x$
a > 0	$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
	$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ hoặc $x \geq a$
	$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng với mọi giá trị của x?

a) $8x > 4x$; b) $4x > 8x$; c) $8x^2 > 4x^2$; d) $8 + x > 4 + x$.

Giải

a) Sai với $x \leq 0$; b) Sai với $x \geq 0$;

c) Sai khi $x = 0$; d) Đúng với mọi giá trị của x.

2. Cho số x > 5, số nào trong các số sau đây là số nhỏ nhất?

$$A = \frac{5}{x}; \quad B = \frac{5}{x} + 1; \quad C = \frac{5}{x} - 1; \quad D = \frac{x}{5}$$

Giải

Với $x > 5$ ta có $\frac{5}{x} < 1$ do đó $\frac{5}{x} - 1 < 0$ còn $A > 0$, $B > 0$ và $D > 0$ nên C nhỏ nhất.

3. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

a) Chứng minh $(b - c)^2 < a^2$;

b) Từ đó suy ra $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

Giải

a) a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác nên $|b - c| < a \Rightarrow (b - c)^2 < a^2$

b) Từ $b + c > a$ suy ra $a(b + c) > a^2$ hay $ab + ac > a^2$ (1)

Tương tự: $bc + ba > b^2$ (2)

$ca + cb > c^2$ (3)

Cộng các vế tương ứng của (1), (2), (3) ta có: $2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2$

4. Chứng minh rằng: $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2, \forall x \geq 0, \forall y \geq 0$.

Giải

Xét hiệu: $(x^3 + y^3) - (x^2y + xy^2) = (x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y)$

$$= (x + y)(x^2 - 2xy + y^2) = (x + y)(x - y)^2 \geq 0, \forall x \geq 0, \forall y \geq 0$$

Do đó: $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2, \forall x \geq 0, \forall y \geq 0$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = y \geq 0$.

5. Chứng minh rằng: $x^4 - \sqrt{x^5} + x - \sqrt{x} + 1 > 0, \forall x \geq 0$.

Hướng dẫn: Đặt $\sqrt{x} = t$, xét hai trường hợp $0 \leq x < 1$; $x \geq 1$.

Giải

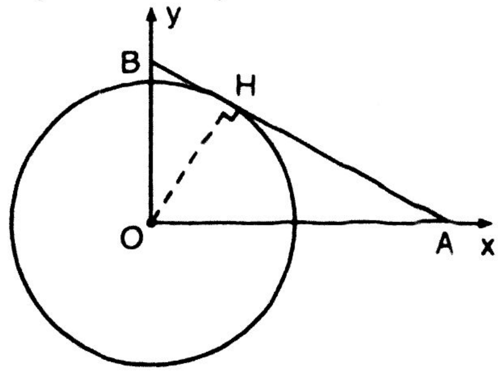
Đặt $\sqrt{x} = t$ $(t \geq 0)$ thì $x^4 - \sqrt{x^5} + x - \sqrt{x} + 1 = t^8 - t^5 + t^2 - t + 1$

* Khi $0 \leq x < 1$ thì $0 \leq t < 1$ và $t^8 - t^5 + t^2 - t + 1 = t^8 + t^2(1 - t^3) + (1 - t) > 0$

* Khi $x \geq 1$ thì $t \geq 1$ và $t^8 - t^5 + t^2 - t + 1 = t^5(t^3 - 1) + t(t - 1) + 1 > 0$

Vậy $x^4 - \sqrt{x^5} + x - \sqrt{x} + 1 > 0, \forall x \geq 0$.

6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, trên các tia Ox và Oy lần lượt lấy các điểm A và B thay đổi sao cho đường thẳng AB luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O bán kính 1. Xác định toạ độ của A và B để đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.



Giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

Ta có:

$HA.HB = OH^2 = 1$ (không đổi)

$AB = HA + HB \geq 2\sqrt{HA.HB} = 2$

$\Rightarrow AB \geq 2$

Dấu "=" xảy ra, tức $AB = 2 \Leftrightarrow HA = HB \Leftrightarrow \Delta OAB$ vuông cân ở O

$\Leftrightarrow$ các tam giác OHB và OHA vuông cân, có cạnh góc vuông bằng 1

$\Leftrightarrow OA = OB = \sqrt{2}$.

Vậy đoạn AB có độ dài nhỏ nhất khi $A(\sqrt{2}; 0)$ và $B(0; \sqrt{2})$.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. a) Cho 3 số a, b, c bất kì.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

b) Cho 3 số a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng: $-\dfrac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$

c) Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$.

Hướng dẫn: a) Nhân 2 vế cho 2 biến đổi về dạng:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

b) Áp dụng câu a) và hằng đẳng thức:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

c) Nhân 2 vế cho 4 biến đổi về dạng:

$$(2a - b)^2 + (2a - c)^2 + (2a - d)^2 + (2a - e)^2 \geq 0$$

2. a) Cho $a > b > 0$. Chứng minh: $a + \dfrac{1}{b(a-b)} \geq 3$

b) Cho $a \geq 1$. Chứng minh: $\sqrt{a-1} \leq \dfrac{a}{2}$

Hướng dẫn: a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số: $a - b$, b, $\dfrac{1}{b(a-b)}$

b) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số: 1 và $a - 1$.

3. a, b, c là số đo 3 cạnh tam giác có chu vi là 2p. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a}{b+c-a} + \dfrac{b}{a+c-b} + \dfrac{c}{a+b-c} \geq 3$;

b) $\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} \geq 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

Hướng dẫn: a) Đặt $x = b + c - a$; $y = a + c - b$; $z = a + b - c$ $(x, y, z > 0)$

Biến đổi về bất đẳng thức: $\dfrac{x+y}{z} + \dfrac{z+x}{y} + \dfrac{y+z}{x} \geq 6$

b) Áp dụng bất đẳng thức: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$ $(x, y > 0)$

4. a) Cho $y = 2x(1 - 3x)$ với $0 \leq x \leq \dfrac{1}{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của y.

b) Cho $y = 2x + \dfrac{1}{x-1}$ $(x > 1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của y.

Đáp số: a) $\max y = \dfrac{1}{6}$ khi $x = \dfrac{1}{6}$;

b) $\min y = 2(\sqrt{2} + 1)$ khi $x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Bất phương trình một ẩn

Bất phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng

$$f(x) < g(x) \qquad (f(x) \leq g(x)) \quad (1)$$

trong đó f(x) và g(x) là những biểu thức của x.

Ta gọi f(x) và g(x) lần lượt là vế trái và vế phải của bất phương trình (1). Số thực x_0 sao cho $f(x_0) < g(x_0)$ $(f(x_0) \leq g(x_0))$ là mệnh đề đúng được gọi là một nghiệm của bất phương trình (1).

Giải bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó, khi tập nghiệm rỗng thì ta nói bất phương trình vô nghiệm.

2. Hệ bất phương trình một ẩn

Hệ bất phương trình ẩn x gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng.

Mỗi giá trị của x đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Giải hệ bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

Để giải một hệ bất phương trình ta giải từng bất phương trình rồi lấy giao của các tập nghiệm.

3. Bất phương trình tương đương

Hai bất phương trình có cùng tập nghiệm (có thể rỗng) là hai bất phương trình tương đương và dùng kí hiệu "⇔" để chỉ sự tương đương của hai bất phương trình đó.

Tương tự, khi hai hệ bất phương trình có cùng một tập nghiệm ta cũng nói chúng tương đương với nhau và dùng kí hiệu "⇔" để chỉ sự tương đương đó.

4. Phép biến đổi tương đương

Để giải một bất phương trình (hệ bất phương trình) ta liên tiếp biến đổi nó thành những bất phương trình (hệ bất phương trình) tương đương cho đến khi được bất phương trình (hệ bất phương trình) đơn giản nhất mà ta có thể viết ngay tập nghiệm. Các phép biến đổi như vậy gọi là các phép biến đổi tương đương.

5. Cộng (trừ)

Cộng (trừ) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) < Q(x) + f(x)$$

6. Nhân (chia)

Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức luôn nhận giá trị dương (mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình) ta được một bất phương trình tương đương. Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức luôn nhận giá trị âm (mà không thay đổi điều kiện của bất phương trình) và đổi chiều bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) < Q(x).f(x) \text{ nếu } f(x) > 0, \forall x$$

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) > Q(x).f(x) \text{ nếu } f(x) < 0, \forall x$$

7. Bình phương

Bình phương hai vế của một bất phương trình có hai vế không âm mà không làm thay đổi điều kiện của nó ta được một bất phương trình tương đương.

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P^2(x) < Q^2(x) \text{ nếu } P(x) \geq 0, Q(x) \geq 0, \forall x$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Tìm các giá trị x thoả mãn điều kiện của mỗi bất phương trình sau

a) $\frac{1}{x} < 1 - \frac{1}{x+1}$;

b) $\frac{1}{x^2-4} \leq \frac{2x}{x^2-4x+3}$;

c) $2|x| - 1 + \sqrt[3]{x-1} < \frac{2x}{x+1}$;

d) $2\sqrt{1-x} > 3x + \frac{1}{x+4}$.

Giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 3; 2; -2\}$

c) Điều kiện: $x \neq -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

d) Điều kiện: $\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \setminus \{-4\}$

2. Chứng minh các bất phương trình sau vô nghiệm

a) $x^2 + \sqrt{x+8} \leq -3$;

b) $\sqrt{1 + 2(x-3)^2} + \sqrt{5 - 4x + x^2} < \frac{3}{2}$;

c) $\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{7 + x^2} > 1$.

Giải

a) Vì $x^2 \geq 0$ và $\sqrt{x+8} \geq 0, \forall x \geq -8$ nên $x^2 + \sqrt{x+8} \geq 0, \forall x \geq -8$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Vì $\sqrt{1+2(x-3)^2} \geq 1$ và $\sqrt{5-4x+x^2} = \sqrt{1+(x-2)^2} \geq 1$

với mọi x nên $\sqrt{1+2(x-3)^2} + \sqrt{5-4x+x^2} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Vì $\sqrt{1+x^2} < \sqrt{7+x^2}$ nên $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{7+x^2} < 0. \forall x \in \mathbb{R}$

Bất phương trình đã cho vô nghiệm.

3. Giải thích vì sao các cặp bất phương trình sau tương đương?

a) $-4x + 1 > 0$ và $4x - 1 < 0$;

b) $2x^2 + 5 \leq 2x - 1$ và $2x^2 - 2x + 6 \leq 0$;

c) $x + 1 > 0$ và $x + 1 + \dfrac{1}{x^2+1} > \dfrac{1}{x^2+1}$;

d) $\sqrt{x-1} \geq x$ và $(2x+1)\sqrt{x-1} \geq x(2x+1)$.

Giải

a) Nhân hai vế bất phương trình thứ nhất với -1 và đổi chiều ta được bất phương trình thứ hai (tương đương).

b) Chuyển vế và đổi dấu các hạng tử ta được bất phương trình tương đương.

c) Cộng vào hai vế bất phương trình với biểu thức $\dfrac{1}{x^2+1}$ không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình ta được bất phương trình tương đương.

d) Hai bất phương trình có điều kiện chung là $x \geq 1$. Trên tập các giá trị này của x thì biểu thức $2x + 1 > 0$ nên nhân hai vế bất phương trình thứ nhất với biểu thức $2x + 1$ ta được bất phương trình thứ hai (tương đương).

4. Giải các bất phương trình sau

a) $\dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{x-2}{3} < \dfrac{1-2x}{4}$;

b) $(2x - 1)(x + 3) - 3x + 1 \leq (x - 1)(x + 3) + x^2 - 5$.

Giải

a) $\dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{x-2}{3} < \dfrac{1-2x}{4} \Leftrightarrow \dfrac{3(3x+1)-2(x-2)}{6} - \dfrac{1-2x}{4} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{7x+7}{6} + \dfrac{2x-1}{4} < 0 \Leftrightarrow 14x + 14 + 6x - 3 < 0 \Leftrightarrow 20x < -11$

$\Leftrightarrow x < -\dfrac{11}{20}$. Vậy $S = \left(-\infty; -\dfrac{11}{20}\right)$

b) $(2x - 1)(x + 3) - 3x + 1 \le (x - 1)(x + 3) + x^2 - 5$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 - 3x + 1 \le x^2 + 2x - 3 + x^2 - 5$

$\Leftrightarrow 1 \le -5$ vô nghiệm. $S = \varnothing$

5. Giải các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} 6x + \dfrac{5}{7} < 4x + 7 \\ \dfrac{8x+3}{2} < 2x + 5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \dfrac{1}{3} \\ 2(x - 4) < \dfrac{3x - 14}{2}. \end{cases}$

Giải

a) $\begin{cases} 6x + \dfrac{5}{7} < 4x + 7 \\ \dfrac{8x+3}{2} < 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 7 - \dfrac{5}{7} \\ 8x + 3 < 4x + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < \dfrac{44}{7} \\ 4x < 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{22}{7} \\ x < \dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x < \dfrac{7}{4}$. Vậy $S = \left(-\infty; \dfrac{7}{4}\right)$

b) $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \dfrac{1}{3} \\ 2(x - 4) < \dfrac{3x - 14}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x > \dfrac{7}{3} \\ 4x - 16 < 3x - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{7}{39} \\ x < 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{7}{39} < x < 2$. Vậy: $S = \left(\dfrac{7}{39}; 2\right)$.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải các bất phương trình sau:

a) $2(x - 1) + x > \dfrac{x+3}{2} + 2;$

b) $(x + \sqrt{2})^2 \ge (x - \sqrt{2})^2 + 2;$

c) $\dfrac{x+2}{2} + \dfrac{x-2}{3} + \dfrac{x-1}{4} \ge 3 + \dfrac{x}{2}$

2. Giải và biện luận các phương trình:

a) $m^2x - 1 > x + m;$

b) $\dfrac{(m-1)x}{2(m+2)} > \dfrac{1-x}{2} - \dfrac{x-1}{m+2}$

3. Tìm số nguyên lớn nhất thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{4} - \dfrac{3(x-2)}{8} > \dfrac{5-3x}{2} \\ 3 - \dfrac{4x-1}{18} > \dfrac{x-1}{12} - \dfrac{4-5x}{9} \end{cases}$

Đáp số: $x = 4$.

4. Xác định m để hệ bất phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x + 4m^2 \le 2mx + 1 \\ 3x + 2 > 2x - 1 \end{cases}$.

Đáp số: m > – 2.

§3. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Nhị thức bậc nhất

Nhị thức bậc nhất đối với x là biểu thức dạng $f(x) = ax + b$, trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$.

2. Dấu của nhị thức bậc nhất

Nhị thức $f(x) = ax + b$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$, trái dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

Ta có bảng:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f(x) = ax+b		trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

3. Giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu:

Ở đây, ta chỉ xét các bất phương trình có thể đưa về một trong các dạng $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0; \frac{P(x)}{Q(x)} \le 0; \frac{P(x)}{Q(x)} \ge 0; \frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, trong đó P(x) và Q(x) là tích của những nhị thức bậc nhất. Để giải các bất phương trình như vậy, ta lập bảng xép dấu của phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Khi lập bảng xét dấu, nhớ rằng phải ghi tất cả các nghiệm của hai đa thức P(x) và Q(x) lên trục số. Trong hàng cuối, tại những điểm mà Q(x) = 0, ta dùng kí hiệu I I để chỉ tại đó bất phương trình đã cho không xác định.

4. Giải phương trình, bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối:

Cách 1: Một trong những cách giải bất phương trình hay bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối là sử dụng định nghĩa để khử dấu giá trị tuyệt đối. Ta thường phải xét phương trình hay bất phương trình trong nhiều khoảng (đoạn, nửa khoảng) khác nhau, trên đó mỗi biểu thức nằm trong dấu giá trị tuyệt đối đều có dấu xác định.

Cách 2: Sử dụng biến đổi tương đương:

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = \pm B \end{cases} \qquad\qquad |A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$$

$$|A| > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A > B \\ A < -B \end{array}\right.$$

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Xét dấu các biểu thức

a) $f(x) = (2x - 1)(x + 3)$;

b) $f(x) = (-3x - 3)(x + 2)(x + 3)$;

c) $f(x) = \dfrac{-4}{3x + 1} - \dfrac{3}{2 - x}$;

d) $f(x) = 4x^2 - 1$.

Giải

a) $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$; $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $-3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$; $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$-3x - 3$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x + 2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

c) $f(x) = \dfrac{-4(2 - x) - 3(3x + 1)}{(3x + 1)(2 - x)} = \dfrac{-5x - 11}{(3x + 1)(2 - x)}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{11}{5}$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$-5x - 11$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$3x + 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2 - x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

d) $f(x) = 4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x + 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Giải các bất phương trình:

a) $\dfrac{2}{x-1} \le \dfrac{5}{2x-1}$;

b) $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{(x-1)^2}$;

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+4} < \dfrac{3}{x+3}$;

d) $\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} < 1$.

Giải

a) Ta có: $\dfrac{2}{x-1} \le \dfrac{5}{2x-1} \Leftrightarrow \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{5}{2x-1} \le 0$

$$\Leftrightarrow \frac{4x - 2 - 5x + 5}{(x-1)(2x-1)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{-x+3}{(x-1)(2x-1)} \le 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		3		$+\infty$
$-x + 3$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2x - 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\dfrac{-x+3}{(x-1)(2x-1)}$		[redacted]		$-$		[redacted]	0	$-$	

Tập nghiệm bất phương trình là: $S = (\frac{1}{2}; 1) \cup [3; +\infty)$

b) $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{(x-1)^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x-1)^2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2 - x - 1}{(x-1)^2(x+1)} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x}{(x-1)^2(x+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)} < 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
x		−	|	−	0	+	|	+	|	+	
x − 3		−	|	−	|	−	|	−	0	+	
$(x-1)^2$		+	|	+	|	+	0	+	|	+	
x + 1		−	0	+	|	+	|	+	|	+	
$\dfrac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)}$		−	||		0	−	||	−	0		

Tập nghiệm bất phương trình là: $S = (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; 3)$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+4} < \dfrac{3}{x+3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+4} - \dfrac{3}{x+3} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+4)(x+3) + 2x(x+3) - 3x(x+4)}{x(x+3)(x+4)} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+12}{x(x+3)(x+4)} < 0$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-12		-4		-3		0		$+\infty$
x + 12		−	0	+	|	+	|	+	|	+	
x		−	|	−	|	−	|	−	0	+	
x + 3		−	|	−	|	−	0	+	|	+	
x + 4		−	|	−	0	+	|	+	|	+	
$\dfrac{x+12}{x(x+3)(x+4)}$			0	−	||		||	−	||		

Tập nghiệm bất phương trình là: $S = (-12; -4) \cup (-3; 0)$

d) $\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3x + 2}{(x-1)(x+1)} < 0$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
−3x + 2		+	|	+	|	−	0	−	
x − 1		−	|	−	0	−	|	+	
x + 1		−	0	+	|	+	|	+	
$\dfrac{-3x+2}{x^2-1}$			||	−	0		||	−	

Tập nghiệm bất phương trình là: $S = (-1; \frac{2}{3}) \cup (1; +\infty)$

3. Giải các bất phương trình

a) $|5x - 4| \geq 6$; b) $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right| < \left|\dfrac{10}{x-1}\right|$.

Giải

a) Ta có: $|5x - 4| \geq 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - 4 \geq 6 \\ 5x - 4 \leq -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -\dfrac{2}{5} \end{array}\right.$

Vậy: $S = (-\infty; -\dfrac{2}{5}] \cup [2; +\infty)$.

b) $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right| < \left|\dfrac{10}{x-1}\right| \Leftrightarrow \dfrac{1}{|x+2|} < \dfrac{2}{|x-1|}$ (1)

Điều kiện: $x \neq -2$ và $x \neq 1$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow |x - 1| < 2|x + 2| \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 4(x + 2)^2 < 0$

$\Leftrightarrow (x - 1 - 2x - 4)(x - 1 + 2x + 4) < 0 \Leftrightarrow (-x - 5)(3x + 3) < 0$

$\Leftrightarrow (x + 5)(3x + 3) > 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
$x + 5$		$-$	0	+		+	
$3x + 3$		$-$		$-$	0	+	
$(x + 5)(3x + 3)$		+	0	[redacted]	0	+	

$S = (-\infty; -5) \cup (-1; +\infty) \setminus \{1\} = (-\infty; -5) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $(5 - 3x)(2x + 1)$; b) $\dfrac{7 - 4x}{2x + 1}$; c) $(x^2 - 1)(1 - 3x)$; d) $3 - \dfrac{x + 2}{3x - 1}$.

2. Phân tích thành nhân tử rồi xét dấu đa thức sau:

a) $4 - 25x^2$; b) $-x^3 + 7x - 6$; c) $x^2 - x - 2\sqrt{2}$.

3. Xét dấu biểu thức:

a) $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 6x + 8}$; b) $\dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{1}{2x + 1}$; c) $\dfrac{|x| - 2}{x^2 + x + 2}$.

4. Giải các bất phương trình:

a) $\dfrac{2x - 1}{x + 1} > \dfrac{x + 1}{2x - 1}$; b) $|x + 2| + |x - 1| \geq 5$;

c) $|3x - 5| < 3$; d) $|x - 2| > 2x - 3$.

§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x,y có dạng tổng quát là

$$ax + by \leq c \ (1)$$

$$(ax + by < c;\ ax + by \geq c;\ ax + by > c)$$

trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.

2. Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm bất phương trình (1) được gọi là miền nghiệm của nó.

Quy tắc thực hành biểu diễn hình học tập nghiệm (hay biểu diễn miền nghiệm) của bất phương trình $ax + by \leq c$ như sau (tương tự cho bất phương trình $ax + by \geq c$).

Bước 1: Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ đường thẳng Δ: $ax + by = c$.

Bước 2: Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc Δ (ta thường lấy gốc toạ độ O).

Bước 3: Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh $ax_0 + by_0$ với c.

Bước 4: Kết luận

Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của $ax + by \leq c$.

Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ không chứa M_0 là miền nghiệm của $ax + by \leq c$.

3. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng. Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của các bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

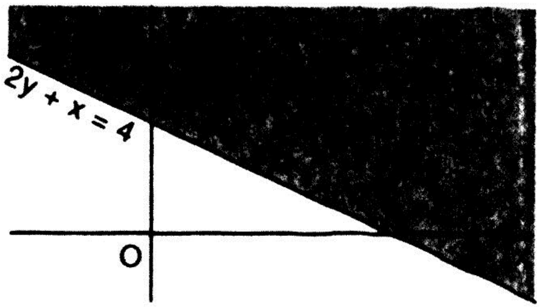
a) $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$; b) $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$.

Giải

a) $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$

$\Leftrightarrow 2y + x < 4$ (1)

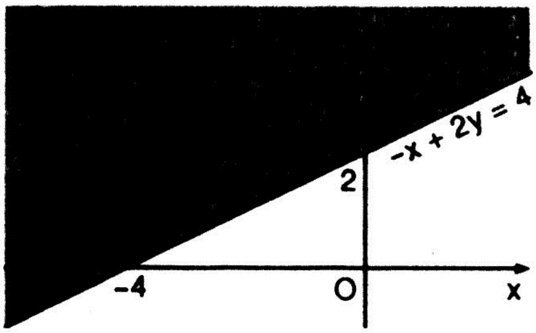
Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình (1), ta có miền nghiệm của (1) là nửa mặt phẳng (không kể bờ) không bị tô đậm.



b) $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$

$\Leftrightarrow -x + 2y < 4$ (2)

Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình (2), ta có miền nghiệm của (2) là nửa mặt phẳng (không kể bờ) không bị tô đậm.



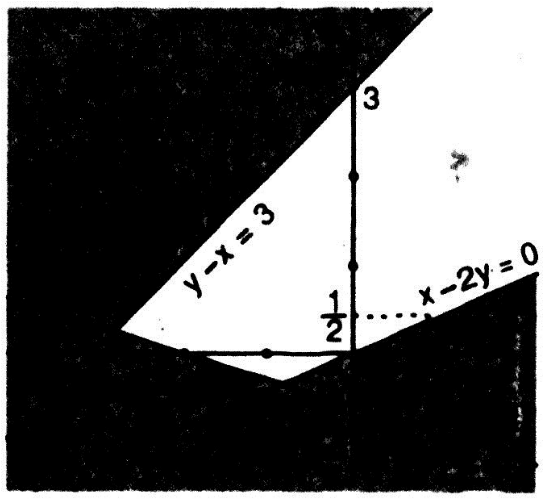
2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của các hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

a) $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} - 1 < 0 \\ x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3y}{2} \le 2 \\ x \ge 0. \end{cases}$

Giải

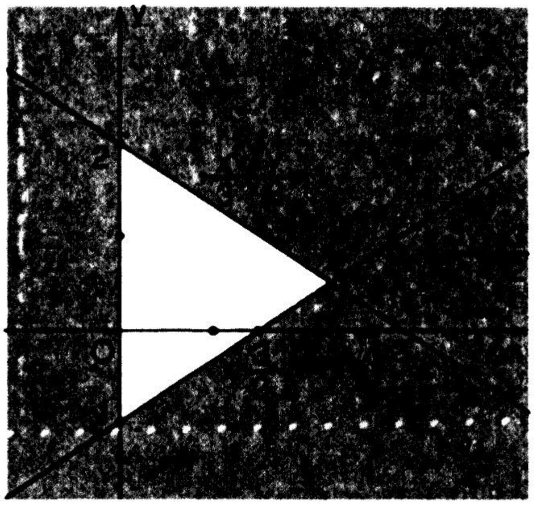
a) Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y > -2 \\ y - x < 3 \end{cases}$ là phần mặt phẳng không bị tô đậm (không kể các bờ) ở hình bên.



b. Miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} - 1 < 0 \\ x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3y}{2} \le 2 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} < 1 \\ x - \dfrac{3y}{2} \le \dfrac{3}{2} \\ x \ge 0 \end{cases}$$

là phần mặt phẳng không bị tô đậm (bỏ một bờ là đường thẳng $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1$) ở hình bên.



3. Có ba nhóm máy A, B, C dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng sau

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm	
		Loại I	Loại II
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm I lãi 3 nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm II lãi 5 nghìn đồng. Hãy lập phương án để việc sản xuất hai sản phẩm trên có lãi cao nhất.

Giải

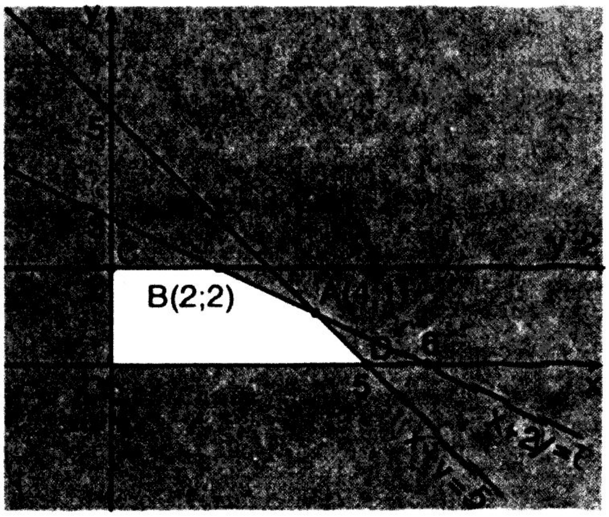
Giả sử hệ sản xuất x sản phẩm I và y sản phẩm II ($x \ge 0$, $y \ge 0$) thì tổng số tiền lãi thu được là $L = 3x + 5y$ (ngàn đồng) và x, y phải thoả mãn hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 2x + 2y \le 10 \\ 2y \le 4 \\ 2x + 4y \le 12 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \le 5 \\ y \le 2 \\ x + 2y \le 6 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Miền nghiệm của hệ (1) là miền của đa giác ABCOD với A(4; 1), B(2; 2), C(0; 2), O(0; 0), D(5; 0). Ta cũng biết L đạt max tại một trong các đỉnh này.

Ta có bảng

(x; y)	(2; 2)	(0; 2)	(0; 0)	(4; 1)	(5; 0)
L = 3x + 5y	16	10	0	17	15



Nhìn vào bảng ta thấy
max L = 17 đạt khi x = 4; y = 1.

Trả lời: Để có lãi cao nhất xí nghiệp cần lập phương án sản xuất các sản phẩm I và II theo tỉ lệ 4:1 (tức là cứ sản xuất được 4 sản phẩm I thì phải sản xuất được 1 sản phẩm II).

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x \geq y - 3 \\ 2y \geq 8 - x \\ y \leq 6 \end{cases}$

2. a) Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} \geq 1 \\ -\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} \geq 1 \end{cases}$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức T = 2x − 2y + 3 trên miền nghiệm ở câu a), T có giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của đa giác đó.

Đáp số: T = −17 tại x = 0, y = 10.

§5. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Tam thức bậc hai

Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$ trong đó a, b, c là những hệ số đã cho, $a \neq 0$.

2. Dấu của tam thức bậc hai

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

a) Nếu $\Delta < 0$ thì f(x) cùng dấu với hệ số a, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Nếu $\Delta = 0$ thì f(x) luôn cùng dấu với hệ số a, trừ khi $x = \frac{-b}{2a}$.

c) Nếu $\Delta > 0$ thì f(x) cùng dấu với hệ số a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$, trái dấu với hệ số a khi $x_1 < x < x_2$ trong đó x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của f(x).

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
af(x)		+	0	–	0	+	
f(x)		cùng dấu a	0	trái dấu a	0	cùng dấu a	

3. Bất phương trình bậc hai

Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình dạng $ax^2 + bx + c < 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$), trong đó a, b, c là những số thực đã cho, $a \neq 0$.

4. Giải bất phương trình bậc hai:

– Đưa bất phương trình về dạng: $f(x) > 0$ (hoặc $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$)

– Xét dấu biểu thức f(x).

– Chọn tập nghiệm tương ứng với chiều bất đẳng thức.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Xét dấu các tam thức bậc hai

a) $5x^2 - 3x + 1$; b) $-2x^2 + 3x + 5$;

c) $x^2 + 12x + 36$; d) $(2x - 3)(x + 5)$.

Giải

a) Ta có: $a = 5 > 0$ và $\Delta = 9 - 20 = -11 < 0$ nên $5x^2 - 3x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b) Ta có: $-2x^2 + 3x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-2x^2 + 3x + 5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2 \geq 0$ với mọi x

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
$x^2 + 12x + 36$		$+$	0	$+$	

d) $(2x - 3)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ x = -5 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-5		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$(2x - 3)(x + 5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Lập bảng xét dấu các biểu thức sau

a) $f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$;

b) $f(x) = (3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1)$;

c) $f(x) = (4x^2 - 1)(-8x^2 + x - 3)(2x + 9)$;

d) $f(x) = \dfrac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}$.

Giải

a) $3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ x = 3 \end{array}\right.$

$4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$3x^2 - 10x + 3$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$4x - 5$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{array}\right.$

$2x^2 - x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x^2 - 4x$		+		+	0	−		−	0	+	
$2x^2 - x - 1$		+	0	−		−	0	+		+	
$f(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

c) $4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$

$-8x^2 + x - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ vì ($a = -8 < 0, \Delta = -95 < 0$)

$2x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{9}{2}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2 - 1$		+		+	0	−	0	+	
$-8x^2 + x - 3$		−		−		−		−	
$2x + 9$		−	0	+		+		+	
$f(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

d) $3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

$3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$4x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{3}{4} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{4}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$3x^2 - x$		+		+		+	0	−	0	+		+		+	
$3 - x^2$		−	0	+		+		+		+		+	0	−	
$4x^2 + x - 3$		+		+	0	−		−		−	0	+		+	
$f(x)$		−	0	+	‖	−	0	+	0	−	‖	+	0	−	

3. Giải các bất phương trình sau

a) $4x^2 - x + 1 < 0$;

b) $-3x^2 + x + 4 \geq 0$;

c) $\dfrac{1}{x^2 - 4} < \dfrac{3}{3x^2 + x - 4}$;

d) $x^2 - x - 6 \leq 0$.

Giải

a) Ta có: $4x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ vì $a = 4 > 0$ và $\Delta = -15 < 0$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm: $S = \varnothing$

b) $-3x^2 + x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$-3x^2 + x + 4$		[redacted]	0	+	0	[redacted]	

Vậy: $S = \left[-1; \dfrac{4}{3}\right]$

c) $\dfrac{1}{x^2 - 4} < \dfrac{3}{3x^2 + x - 4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2 - 4} - \dfrac{3}{3x^2 + x - 4} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2 + x - 4 - 3x^2 + 12}{\left(x^2 - 4\right)\left(3x^2 + x - 4\right)} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x + 8}{\left(x^2 - 4\right)\left(3x^2 + x - 4\right)} < 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-8		-2		$-\frac{4}{3}$		1		2		$+\infty$
$x + 8$		$-$	0	+		+		+		+		+	
$x^2 - 4$		+		+	0	$-$		$-$		$-$	0	+	
$3x^2 + x - 4$		+		+		+	0	$-$	0	+		+	
$\dfrac{x+8}{\left(x^2-4\right)\left(3x^2+x-4\right)}$		$-$	0	[redacted]		$-$		[redacted]		$-$		[redacted]	

Tập nghiệm bất phương trình là: $S = (-\infty; -8) \cup \left(-2; -\dfrac{4}{3}\right) \cup (1; 2)$

4. Tìm các giá trị của tham số m để các phương trình sau vô nghiệm

a) $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0$; (1)

b) $(3 - m)x^2 - 2(m + 3)x + m + 2 = 0$. (2)

Giải

a) Với $m = 2$ thì (1) trở thành $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

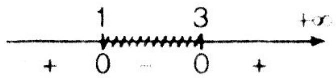
Phương trình có nghiệm.

Với $m \neq 2$, (1) vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = (2m - 3)^2 - (m - 2)(5m - 6) < 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 3 \end{array}\right.$$



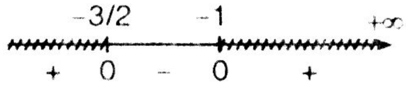
b) Với $m = 3$: (2) thành $-12x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{12}$

Phương trình có nghiệm.

Với $m \neq 3$: (2) vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = (m + 3)^2 - (3 - m)(m + 2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2m^2 + 5m + 3 < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < m < -1$$



C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leq 0 \\ x^2 - 8x + 15 \geq 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$;

c) $-4 \leq \dfrac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \leq 1$;

d) $-1 < \dfrac{10x^2 - 3x - 2}{-x^2 + 3x - 2} < 1$.

Đáp số: a) $S = [1; 3] \cup [5; 6]$;

b) $S = [-1; 1) \cup \left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right]$;

c) $S = \left[-4; -\dfrac{3}{5}\right] \cup [1; +\infty)$;

d) $S = \left(-\dfrac{2}{3}; 0\right) \cup \left(\dfrac{6}{11}; \dfrac{2}{3}\right)$.

2. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm:

$$x^2 + (m - 2)x - 2m + 3 = 0$$

Đáp số: $m \leq -2 - 2\sqrt{3}$ hoặc $m \geq -2 + 2\sqrt{3}$.

3. Chứng minh rằng các phương trình sau vô nghiệm dù m lấy bất kì giá trị nào:

a) $x^2 - 2(m + 1)x + 2m^2 + m + 3 = 0$;

b) $(m^2 + 1)x^2 + 2(m + 2)x + 6 = 0$.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

1. Sử dụng dấu bất đẳng thức để viết các mệnh đề sau:

a) x là số dương;

b) y là số không âm;

c) Với mọi số thực α, |α| là số không âm;

d) Trung bình cộng của hai số dương a và b không nhỏ hơn trung bình nhân của chúng.

Trả lời: a) $x > 0$; b) $y \geq 0$;

c) $|\alpha| \geq 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$; d) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\forall a > 0, \forall b > 0$

2. Có thể rút ra kết luận gì về dấu của hai số a và b biết

a) $ab > 0$; b) $\frac{a}{b} > 0$; c) $ab < 0$; d) $\frac{a}{b} < 0$?

Trả lời: a) a, b cùng dấu; b) a, b cùng dấu;

c) a, b trái dấu; d) a, b trái dấu.

3. Trong các suy luận sau, suy luận nào đúng?

(A) $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow xy < 1$; (B) $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} < 1$;

(C) $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow xy < 1$; (D) $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow x - y < 1$.

Trả lời: (C) đúng vì nếu $y < 0$ thì $xy < 0 < 1$, còn nếu $0 < y < 1$ thì $xy < 1$.

4. Khi cân một vật với độ chính xác 0,05kg, người ta cho biết kết quả là 26,4kg. Hãy chỉ ra khối lượng thực của vật đó nằm trong khoảng nào.

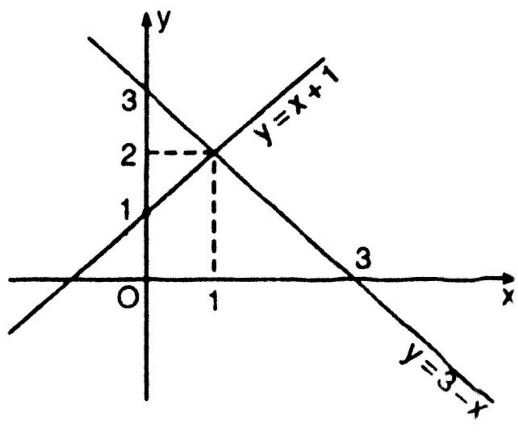
Trả lời: Gọi P là khối lượng thực của vật. Ta có $26,35 < P < 26,45$.

5. Trên cùng một mặt phẳng toạ độ, hãy vẽ đồ thị hai hàm số $y = f(x) = x + 1$ và $y = g(x) = 3 - x$ và chỉ ra các giá trị nào của x thoả mãn:

a) $f(x) = g(x)$; b) $f(x) > g(x)$; c) $f(x) < g(x)$.

Kiểm tra lại kết quả bằng cách giải phương trình, bất phương trình.

Giải



a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$

b) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x > 1$

c) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x < 1$

Kiểm tra lại:

a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x + 1 = 3 - x$
$\Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

b) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x + 1 > 3 - x$
$\Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > 1$

c) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x + 1 < 3 - x \Leftrightarrow 2x < 2 \Leftrightarrow x < 1$

6. Cho a, b, c là các số dương.

Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$.

Giải

Ta có: $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}$

$$=\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có:

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2.\sqrt{\frac{a}{c}.\frac{c}{a}}=2$$

Tương tự: $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$ và $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$

Từ đó suy ra: $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq 6$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c.

7. Cho a > 0, b > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Giải

Xét hiệu: $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{b}\right)^3-\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{ab}}$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)}{\sqrt{ab}}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}}\geq 0$$

$$\Rightarrow\quad \frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a, b đều dương và a = b.

8. a) Bằng cách sử dụng hằng đẳng thức $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ hãy xét dấu

$$f(x)=x^4-x^2+6x-9 \text{ và } g(x)=x^2-2x-\frac{4}{x^2-2x}.$$

b) Hãy tìm nghiệm nguyên của bất phương trình: $x(x^3-x+6)>9$.

Giải

a) $f(x)=x^4-(x-3)^2=(x^2+x-3)(x^2-x+3)$.

Vì $x^2-x+3>0$, $\forall x$ nên $f(x)$ luôn cùng dấu với dấu của tam thức x^2+x-3.

Xét dấu: $x^2+x-3\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

Tương tự, vì $g(x) = \dfrac{(x^2 - 2x)^2 - 4}{x^2 - 2x} = \dfrac{(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x - 2)}{x^2 - 2x}$

và $x^2 - 2x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

nên g(x) luôn cùng dấu với dấu của biểu thức $\dfrac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x}$. Do đó

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		0		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$x^2 - 2x - 2$		+	0	−	|	−	|	−	0	+	
$x^2 - 2x$		+	|	+	0	−	0	+	|	+	
g(x)		+	0	−	‖	+	‖	−	0	+	

b) $x(x^3 - x + 6) > 9 \Leftrightarrow x^4 - x^2 + 6x - 9 > 0 \Leftrightarrow x^4 - (x - 3)^2 > 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - x + 3)(x^2 + x - 3) > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 > 0$

$\Leftrightarrow x < \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ hoặc $x > \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{2}$.

Nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là x nguyên nhỏ hơn hoặc bằng −3 hoặc x nguyên lớn hơn hoặc bằng 2.

9. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, chứng minh rằng: $b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 > 0, \forall x$.

Giải

Xét $f(x) = b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$

Ta có: $\Delta = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$

$= (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)$

$= [(b + c)^2 - a^2][(b - c)^2 - a^2]$

$= (b + c + a)(b + c - a)(b - c + a)(b - c - a)$

$= -(a + b + c)(b + c - a)(a + b - c)(c + a - b) < 0$

(vì a, b, c là ba cạnh một tam giác nên a, b, c dương và tổng hai cạnh lớn hơn cạnh thứ ba). Do đó $f(x) > 0, \forall x$.

10. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} 3x + y \ge 9 \\ x \ge y - 3 \\ 2y \ge 8 - x \\ y \le 6. \end{cases}$$

Hướng dẫn

Vẽ các đường thẳng: $3x + y = 9$, $x = y - 3$, $2y = 8 - x$, $y = 6$ rồi lấy toạ độ của O(0;0) thế vào phương trình mỗi đường thẳng. Từ đó suy ra miền nghiệm của bất phương trình. Giao của các miền nghiệm này chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng trong các bài tập sau

11. Số -2 thuộc tập nghiệm của bất phương trình:

(A) $2x + 1 > 1 - x$; (B) $(2x + 1)(1 - x) < x^2$;

(C) $\dfrac{1}{1-x} + 2 \le 0$; (D) $(2 - x)(x + 2)^2 < 0$.

Trả lời: Lần lượt thay $x = -2$ vào các bất phương trình thì $x = -2$ thỏa (B). Chọn (B).

12. Bất phương trình $(x + 1)\sqrt{x} \le 0$ tương đương với bất phương trình

(A) $\sqrt{x(x+1)^2} \le 0$; (B) $(x+1)\sqrt{x} < 0$;

(C) $(x+1)^2\sqrt{x} \le 0$; (D) $(x+1)^2\sqrt{x} < 0$.

Trả lời: Hai bất phương trình $(x + 1)\sqrt{x} \le 0$ và $(x + 1)^2\sqrt{x} \le 0$ có cùng tập nghiệm $S = \{0\}$. Chọn (C).

13. Bất phương trình $mx^2 + (2m - 1)x + m + 1 < 0$ có nghiệm khi

(A) $m = 1$; (B) $m = 3$; (C) $m = 0$; (D) $m = 0,25$.

Trả lời: Với $m = 0$, ta có: $-x + 1 < 0$ có nghiệm $x > 1$. Chọn (C).

14. Hệ bất phương trình sau vô nghiệm

(A) $\begin{cases} x^2 - 2x \le 0 \\ 2x + 1 < 3x + 2 \end{cases}$; (B) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ \dfrac{1}{x+2} < \dfrac{1}{x+1} \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} x^2 - 5x + 2 < 0 \\ x^2 + 8x + 1 \le 0 \end{cases}$; (D) $\begin{cases} |x - 1| \le 2 \\ |2x + 1| \le 3. \end{cases}$

Trả lời: $x = 0$ là một nghiệm của (A); $x = 100$ là một nghiệm của (B); $x = 1$ là một nghiệm của (D).

(C) Vô nghiệm vì mọi $x \le 0$ không là nghiệm bất phương trình đầu, mọi $x > 0$ không là nghiệm bất phương trình sau. Chọn (C).

Chương V. THỐNG KÊ

§1. BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Bảng phân bố tần số - tần suất:

Số lần xuất hiện của mỗi giá trị trong mẫu số liệu được gọi là tần số của giá trị đó.

Tần suất f_i của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số n_i và kích thước mẫu N.

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

Người ta thường viết tần suất dưới dạng phần trăm.

2. Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp:

Để trình bày mẫu số liệu (theo một tiêu chí nào đó) được gọn gàng, súc tích, nhất là khi có nhiều số liệu, ta thực hiện việc ghép số liệu thành các lớp.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Tuổi thọ của 30 bóng đèn điện được thắp thử (đơn vị: giờ)

1180	1150	1190	1170	1180	1170
1160	1170	1160	1150	1190	1180
1170	1170	1170	1190	1170	1170
1170	1180	1170	1160	1160	1160
1170	1160	1180	1180	1150	1170

a) Lập bảng phân bố tần số và bảng phân bố tần suất.

b) Dựa vào kết quả của câu a), hãy đưa ra nhận xét về tuổi thọ của các bóng đèn nói trên.

Giải

a) Bảng phân bố tần số.

Tuổi thọ của 30 bóng đèn điện được thắp thử.

Tuổi thọ (giờ)	Tần số
1150	3
1160	6
1170	12
1180	6
1190	3
Cộng	30

Bảng phân bố tần suất.

Tuổi thọ của 30 bóng đèn điện được thắp thử.

Tuổi thọ (giờ)	Tần suất (%)
1150	10
1160	20
1170	40
1180	20
1190	10
Cộng	100 (%)

b) Trong 30 bóng đèn được thắp thử, ta thấy:

Chiếm tỉ lệ thấp nhất (10%) là những bóng đèn có tuổi thọ 1150 giờ hoặc những bóng đèn có tuổi thọ 1190 giờ;

Chiếm tỉ lệ cao nhất (40%) là những bóng đèn có tuổi thọ 1170 giờ;

Phần đông (80%) các bóng đèn có tuổi thọ từ 1160 giờ đến 1180 giờ.

2. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Độ dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành

Lớp của chiều dài (cm)	Tần số
[10; 20)	8
[20; 30)	18
[30; 40)	24
[40; 50]	10
Cộng	60

a) Lập bảng phân bố tần suất ghép lớp.

b) Dựa vào kết quả của câu a), hãy nêu rõ trong 60 lá dương xỉ được khảo sát:

Số lá có độ dài dưới 30cm chiếm bao nhiêu phần trăm?

Số lá có độ dài từ 30cm đến 50cm chiếm bao nhiêu phần trăm?

Giải

a) Bảng phân bố tần suất ghép lớp

Độ dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành

Lớp độ dài (cm)	Tần suất (%)
[10; 20)	13,3
[20; 30)	30,0
[30; 40)	40,0
[40; 50]	16,7
Cộng	100 (%)

b) Số lá có độ dài dưới 30cm chiếm: 13,3% + 30% = 43,3%;

Số lá có độ dài từ 30cm đến 50cm chiếm: 40% + 16,7% = 56,7%

3. Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau:

Khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch được ở nông trường T (đơn vị: g)

90	73	88	99	100	102	111	96	79	93
81	94	96	93	95	82	90	106	103	116
109	108	112	87	74	91	84	97	85	92

Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp, với các lớp sau:

[70; 80) ; [80; 90); [90; 100); [100; 110); [110; 120].

Giải

Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp

Khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch ở nông trường T.

Lớp khối lượng (gam)	Tần số	Tần suất (%)
[70; 80)	3	10
[80; 90)	6	20
[90; 100)	12	40
[100; 110)	6	20
[110; 120]	3	10
Cộng	30	100 (%)

4. Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Chiều cao của 35 cây bạch đàn (đơn vị: m)

6,6	7,5	8,2	8,2	7,8	7,9	9,0	8,9	8,2
7,2	7,5	8,3	7,4	8,7	7,7	7,0	9,4	8,7
8,0	7,7	7,8	8,3	8,6	8,1	8,1	9,5	6,9
8,0	7,6	7,9	7,3	8,5	8,4	8,0	8,8	

a) Lập bảng phân bố tần suất ghép lớp, với các lớp sau:

[6,5; 7,0); [7,0; 7,5); [7,5; 8,0); [8,0; 8,5); [8,5; 9,0); [9,0; 9,5]

b) Dựa vào kết quả của câu a), hãy nêu một nhận xét về chiều cao của 35 cây bạch đàn nói trên.

Giải

a) Bảng phân bố tần suất ghép lớp

Chiều cao của 35 cây bạch đàn

Lớp chiều cao (m)	Tần suất (%)
[6,5; 7,0)	5,7
[7,0; 7,5)	11,4
[7,5; 8,0)	25,7
[8,0; 8,5)	31,4
[8,5; 9,0)	17,2
[9,0; 9,5]	8,6
Cộng	100 (%)

b) Trong 35 cây bạch đàn được khảo sát, ta thấy:

Chiếm tỉ lệ thấp nhất (5,7%) là những cây có chiều cao từ 6,5m đến dưới 7m;

Chiếm tỉ lệ cao nhất (31,4%) là những cây có chiều cao từ 8m đến dưới 8,5m;

Hầu hết (85,7%) các cây bạch đàn có chiều cao từ 7m đến dưới 9m.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Doanh thu của 19 công ty trong năm vừa qua được cho như sau (đơn vị: triệu đồng):

17638	16162	18746	16602	17357	15420	19630
18969	17301	18322	18870	17679	18101	16598
20275	19902	17733	18405	18739		

Lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp, sử dụng sáu lớp:

[15000; 16000); [16000; 17000); [20000; 21000).

2. Kết quả của một kì thi môn Tiếng Anh của 32 học sinh được cho trong mẫu số liệu sau (thang điểm 100):

68	52	49	56	69	74	41	59
79	61	42	57	60	88	87	47
65	55	68	65	50	78	61	90
86	65	66	72	63	95	72	74

Lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp, sử dụng sáu lớp:

[40; 50); [50; 60),..., [90; 100).

§2. BIỂU ĐỒ

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

Có các dạng biểu đồ sau:

a) Biểu đồ tần số, tần suất hình cột,

b) Đường gấp khúc tần số, tần suất.

c) Biểu đồ tần suất hình quạt.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

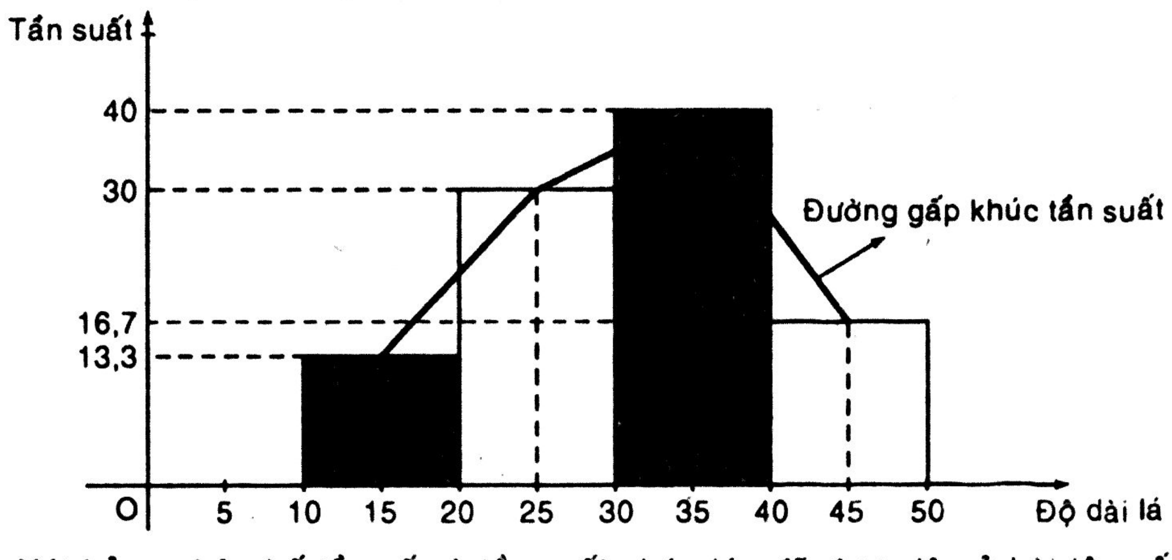
1. Hãy mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã được lập ở bài tập số 2 của §1 bằng cách vẽ biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất.

Giải

Bảng phân bố tần suất ghép lớp chiều dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành

Lớp chiều dài (cm)	Tần suất (%)
[10; 20)	13,3
[20; 30)	30,0
[30; 40)	40,0
[40; 50)	16,7
Cộng	100 (%)

Biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất về độ dài (cm) của 60 lá dương xỉ trưởng thành



2. Xét bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp đã được lập ở bài tập số 3 của §1.

a) Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột, đường gấp khúc tần suất.

b) Hãy vẽ biểu đồ tần số hình cột, đường gấp khúc tần số.

c) Dựa vào biểu đồ tần suất hình cột đã vẽ ở câu a), hãy nêu nhận xét về khối lượng của 30 củ khoai tây được khảo sát.

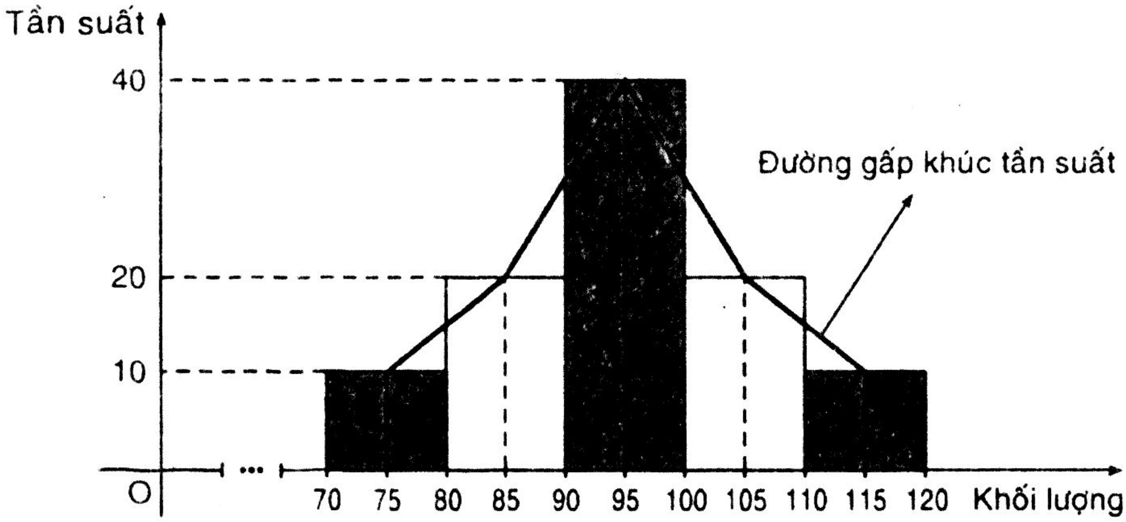
Giải

Bảng phân bố tần số và tần suất ghép

Khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch ở nông trường T.

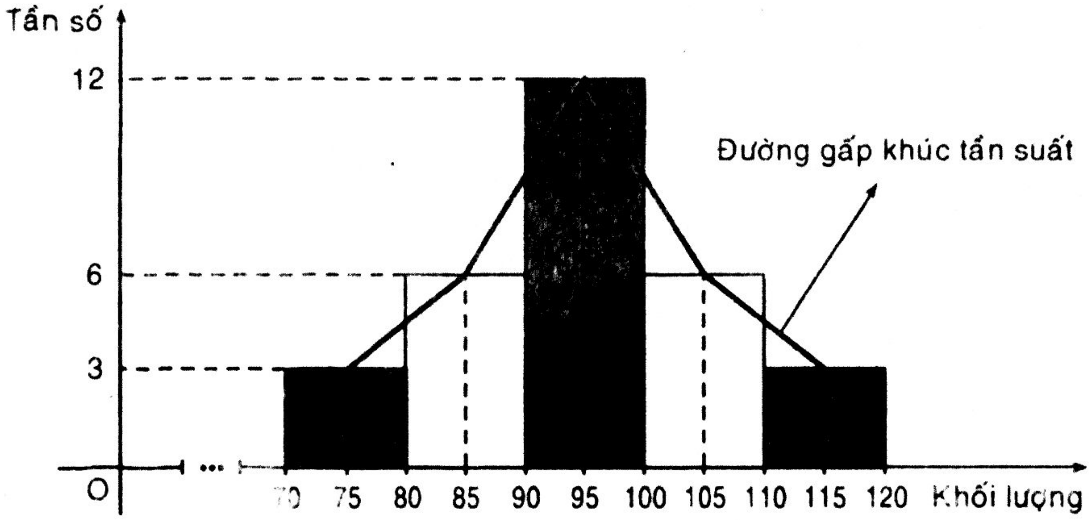
Lớp khối lượng (gam)	Tần số	Tần suất (%)
[70; 80)	3	10
[80; 90)	6	20
[90; 100)	12	40
[100; 110)	6	20
[110; 120)	3	10
Cộng		100(%)

a)



Biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất về khối lượng (g) của 30 củ khoai tây thu hoạch ở nông trường T.

b)



Biểu đồ tần số hình cột và đường gấp khúc tần số về khối lượng (g) của 30 củ khoai tây thu hoạch ở nông trường T.

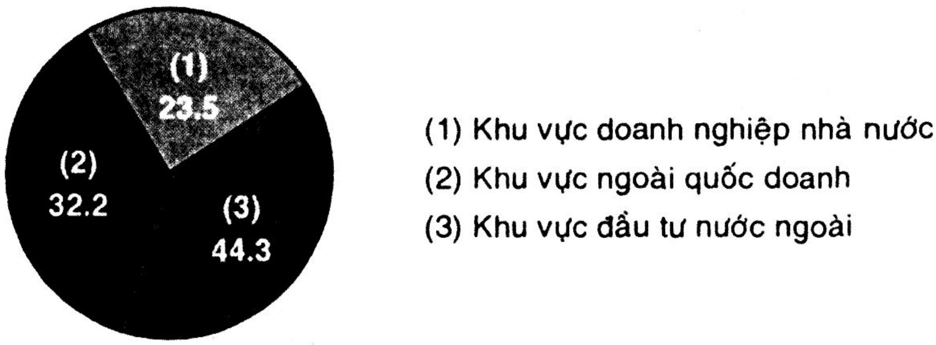
c) Trong 30 củ khoai tây được khảo sát ta thấy

Chiếm tỉ lệ thấp nhất (10%, ứng với mỗi cột trong hai cột thấp nhất của biểu đồ) là những củ có khối lượng từ 70g đến dưới 80g hoặc từ 110g đến 120g;

Chiếm tỉ lệ cao nhất (40%, ứng với cột cao nhất của biểu đồ) là những củ có khối lượng từ 90g đến 100g);

Đại đa số (80%, ứng với 3 cột cao trội lên của biểu đồ) các củ có khối lượng từ 80g đến 110g.

3. Dựa vào biểu đồ hình quạt dưới đây, hãy lập bảng cơ cấu như trong ví dụ 2, bài 2.



Biểu đồ hình quạt về cơ cấu giá trị sản xuất công nghiệp trong nước năm 2000, phân theo thành phần kinh tế (%)

Giải

Cơ cấu giá trị sản xuất công nghiệp trong nước năm 2000, phân theo thành phần kinh tế (%)

Các thành phần kinh tế	Số phần trăm
(1) Khu vực doanh nghiệp nhà nước	23,5
(2) Khu vực ngoài quốc doanh	32,2
(3) Khu vực đầu tư nước ngoài	44,3
Cộng	100(%)

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Hãy vẽ biểu đồ tần số hình cột và vẽ đường gấp khúc tần số ở bài tập 1 làm thêm §1.

2. Hãy vẽ biểu đồ tần số và tần suất hình cột ở bài tập 2 làm thêm §1.

§3. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. SỐ TRUNG VỊ. MỐT

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Số trung bình cộng (hay số trung bình)

Ta có thể tính số trung bình cộng của các số liệu thống kê theo các công thức sau đây:

Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k) = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k$$

trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i, n là số các số liệu thống kê ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$).

Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1c_1 + n_2c_2 + \ldots + n_kc_k) = f_1c_1 + f_2c_2 + \ldots + f_kc_k$$

trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i, n là số các số liệu thống kê ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$).

2. Số trung vị

Sắp thứ tự các số liệu thống kê thành dãy không giảm (hoặc không tăng). Số trung vị (của các số liệu thống kê đã cho), kí hiệu là M_e là số đứng giữa dãy nếu số phần tử là lẻ và là trung bình cộng của hai số đứng giữa dãy nếu số phần tử là chẵn.

3. Mốt

Mốt của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_0.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Tính số trung bình cộng của các bảng phân bố đã được lập ở các bài tập số 1, bài tập số 2 của §1.

Giải

a) Số trung bình cộng của bảng phân phối ở bài tập số 1 của §1 là:

$\bar{x} = 1150.0,1 + 1160.0,2 + 1170.0,4 + 1180.0,2 + 1190.0,1 = 1170$ giờ

b) Số trung bình cộng của bảng phân phối ở bài tập số 2 của §1 là:

$\bar{x} = 15.\frac{8}{60} + 25.\frac{18}{60} + 35.\frac{24}{60} + 45.\frac{10}{60} = 31$ cm

2. Trong một trường THPT, để tìm hiểu tình hình học môn Toán của hai lớp 10A, 10B, người ta cho hai lớp thi Toán theo cùng một đề thi và lập được hai bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây:

Điểm thi Toán của lớp 10A

Lớp điểm thi	Tần số
[0; 2)	2
[2; 4)	4
[4; 6)	12
[6; 8)	28
[8; 10]	4
Cộng	50

Điểm thi Toán của lớp 10B

Lớp điểm thi	Tần số
[0; 2)	4
[2; 4)	10
[4; 6)	18
[6; 8)	14
[8; 10]	5
Cộng	51

Tính các số trung bình cộng của hai bảng phân bố ở trên và nêu nhận xét về kết quả làm bài thi của hai lớp.

Giải

Trung bình cộng các điểm thi Toán của lớp 10A là

$$\bar{x} = 1.\frac{2}{50} + 3.\frac{4}{50} + 5.\frac{12}{50} + 7.\frac{28}{50} + 9.\frac{4}{50} \approx 6{,}1$$

Trung bình cộng các điểm thi Toán của lớp 10B là

$$\bar{y} = 1.\frac{4}{51} + 3.\frac{10}{51} + 5.\frac{18}{51} + 7.\frac{14}{51} + 9.\frac{5}{51} \approx 5{,}2$$

Vì $\bar{x} > \bar{y}$ nên kết quả làm bài thi môn Toán của học sinh ở lớp 10A cao hơn lớp 10B.

3. Điều tra tiền lương hàng tháng của 30 công nhân của một xưởng may, ta có bảng phân bố tần số như sau:

Tiền lương của 30 công nhân xưởng may

Tiền lương (nghìn đồng)	300	500	700	800	900	1000	Cộng
Tần số	3	5	6	5	6	5	30

Tìm mốt của bảng phân bố trên. Nêu ý nghĩa của kết quả đã tìm được.

Giải

Bảng phân bố đã cho có hai giá trị có tần số bằng nhau và lớn hơn tần số của những giá trị khác là $x_3 = 700$ và $x_5 = 900$. Trong trường hợp này, ta xem rằng có hai mốt là $M_0^{(1)} = 700$ nghìn đồng, $M_0^{(2)} = 900$ nghìn đồng

Kết quả vừa thu được cho thấy rằng trong 30 công nhân được khảo sát, số người có tiền lương hàng tháng là 700 nghìn đồng hoặc 900 nghìn đồng là nhiều nhất.

4. Tiền lương hàng tháng của 7 nhân viên trong một công ti du lịch là: 650, 840, 690, 720, 2500, 670, 3000 (đơn vị: nghìn đồng).

Tìm số trung vị của các số liệu thống kê đã cho. Nêu ý nghĩa của kết quả đã tìm được.

Giải

Sắp thứ tự các số liệu thống kê, ta thu được dãy tăng các số liệu sau: 650, 670, 690, 720, 840, 2500, 3000 (nghìn đồng).

Số trung vị M_e = 720 nghìn đồng .

Số các số liệu thống kê quá ít ($n = 7 < 10$), do đó không nên chọn số trung bình cộng làm đại diện cho các số liệu đã cho. Trong trường hợp này ta chọn số trung vị M_e = 720 nghìn đồng làm đại diện cho tiền lương hàng tháng của mỗi người trong 7 nhân viên đã được khảo sát.

5. Cho biết tình hình thu hoạch lúa vụ mùa năm 1980 của ba hợp tác xã ở địa phương V như sau

Hợp tác xã	Năng suất lúa(tạ/ha)	Diện tích trồng lúa(ha)
A	40	150
B	38	130
C	36	120

Hãy tính năng suất lúa trung bình của vụ mùa năm 1980 trong toàn bộ ba hợp tác xã kể trên.

Giải

Năng suất lúa trung bình là: $\bar{x} = \dfrac{40.150 + 38.130 + 36.120}{400} = 38{,}15$ tạ/ha.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm là 20). Kết quả được cho trong bảng sau đây:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	N = 100

a) Tính số trung bình.

b) Tính số trung vị và mốt. Nêu ý nghĩa của chúng.

2. Số tiền điện phải trả cho 50 hộ trong khu phố A được thống kê trong bảng phân bố tần số sau đây (đơn vị: nghìn đồng).

Lớp	Tần số
[375; 449]	6
[450; 524]	15
[525; 599]	10
[600; 674]	6
[675; 749]	9
[750; 824]	4
	N = 50

Tính số trung bình.

§4. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Tính phương sai theo các công thức sau dây

a) Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\left[n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + n_k(x_k - \bar{x})^2\right]$$

$$= f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + f_k(x_k - \bar{x})^2.$$

trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i, n là số các số liệu thống kê ($n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$); $\bar{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu đã cho.

b) Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\left[n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \ldots + n_k(c_k - \bar{x})^2\right]$$

$$= f_1(c_1 - \bar{x})^2 + f_2(c_2 - \bar{x})^2 + \ldots + f_k(c_k - \bar{x})^2.$$

trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i; n là số các số liệu thống kê ($n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$); $\bar{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu thống kê đã cho.

2. Căn bậc hai của phương sai gọi là độ lệch chuẩn, kí hiệu là $s_x = \sqrt{s_x^2}$

Phương sai s_x^2 và độ lệch chuẩn s_x đều được dùng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình cộng). Nhưng khi cần chú ý đến đơn vị đo thì ta dùng s_x, vì s_x có cùng đơn vị đo với dấu hiệu được nghiên cứu.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần số đã được lập ở bài tập 1 và của bảng phân bố tần số ghép lớp cho ở bài tập 2 của §1.

Giải

a) Trong bảng phân bố tần số ở bài tập 1

$\bar{x} = 1170 \Rightarrow s_x^2 = 0{,}1.(1150 - 1170)^2 + 0{,}2.(1160 - 1170)^2 +$

$+ 0{,}4(1170 - 1170)^2 + 0{,}2.(1180 - 1170)^2 + 0{,}1.(1190 - 1170)^2 = 120$

Độ lệch chuẩn $s_x = \sqrt{s_x^2} \approx 11$ giờ

b) Trong bảng phân bố tần số ở bài tập 2

$$\bar{x} = 31 \Rightarrow s_x^2 = \frac{8}{60}(15 - 31)^2 + \frac{18}{60}(25 - 31)^2 + \frac{24}{60}(35 - 31)^2 + \frac{10}{60}(45 - 31)^2 \approx 84$$

Độ lệch chuẩn $s \approx 9{,}2$ cm.

2. Hai lớp 10C, 10D của một trường Trung học phổ thông đồng thời làm bài thi môn Ngữ văn theo cùng một đề thi. Kết quả thi được trình bày ở hai bảng phân bố tần số sau đây

Điểm thi Ngữ văn của lớp 10C

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	3	7	12	14	3	1	40

Điểm thi Ngữ văn của lớp 10D

Điểm thi	6	7	8	9	Cộng
Tần số	8	18	10	4	40

a) Tính các số trung bình cộng, phương sai, độ lệch chuẩn của các bảng phân bố tần số đã cho.

b) Xét xem kết quả làm bài thi của môn Ngữ Văn ở lớp nào đồng đều hơn?

Giải

a) Trong dãy số liệu về điểm thi của lớp 10C ta có :

$$\bar{x} = \frac{1}{40}(3.5 + 7.6 + 12.7 + 14.8 + 3.9 + 1.10) \approx 7,2 \text{ điểm}$$

Phương sai $s_1^2 = \frac{1}{40}[3(5-7,2)^2 + 7.(6-7,2)^2 + 12(7-7,2)^2 +$

$$+ 14(8-7,2)^2 + 3(9-7,2)^2 + 1.(10-7,2)^2] \approx 1,3$$

Độ lệch chuẩn $s_1 \approx 1,13$.

Trong dãy số liệu về điểm thi của lớp 10D ta có :

$$\bar{y} = \frac{1}{40}(8.6 + 18.7 + 10.8 + 4.9) \approx 7,2 \text{ điểm}$$

$s_2^2 \approx 0,8$; $s_2 \approx 0,9$.

b) Các số liệu thống kê có cùng đơn vị đo, $\bar{x} \approx \bar{y} \approx 7,2$; $s_1^2 > s_2^2$, suy ra điểm số của các bài thi ở lớp 10D là đồng đều hơn.

3. Cho hai bảng phân bố tần số ghép lớp

Khối lượng của nhóm cá mè thứ 1

Lớp khối lượng (kg)	[0,6;0,8)	[0,8;1,0)	[1,0;1,2)	[1,2;1,4]	Cộng
Tần số	4	6	6	4	20

Khối lượng của nhóm cá mè thứ 2

Lớp khối lượng (kg)	[0,5;0,7)	[0,7;0,9)	[0,9;1,1)	[1,1;1,3)	[1,3;1,5]	Cộng
Tần số	3	4	6	4	3	20

a) Tính các số trung bình cộng của các bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.

b) Tính phương sai của các bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.

c) Xét xem nhóm cá nào có khối lượng đồng đều hơn?

Giải

a) Khối lượng trung bình của nhóm cá mè thứ 1 là:

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(4.0,7 + 6.0,9 + 6.1,1 + 4.1,3) = 1 \text{ kg}$$

của nhóm cá mè thứ 2 là $\bar{y} = 1$kg.

b) Trung bình cộng các bình phương số liệu thống kê

$$\overline{x^2} = \frac{1}{20}(4.0,7^2 + 6.0,9^2 + 6.1,1^2 + 4.1,3^2) = 1,042$$

$$\Rightarrow \quad s_1^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 1,042 - 1 = 0,042$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{20}(3.0,6^2 + 4.0,8^2 + 6.1^2 + 4.1,2^2 + 3.1,4^2) = 1,064$$

$$\Rightarrow \quad s_2^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 1,064 - 1 = 0,064$$

c) Nhóm cá thứ 1 có khối lượng đồng đều hơn.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Trong một đề tài nghiên cứu về bệnh A, người ta ghi lại tuổi của 50 bệnh nhân mắc bệnh này. Số liệu thống kê được trình bày trong bảng phân bố tần số sau đây:

Lớp	Tần số
[15; 19]	10
[20; 24]	12
[25; 29]	14
[30; 34]	9
[35; 39]	5
	N = 50

Tính số trung bình và độ lệch chuẩn.

2. Một cửa hàng sách thống kê số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà 60 khách hàng mua sách ở cửa hàng trong một ngày. Số liệu được ghi trong bảng phân bố tần số sau:

Lớp	Tần số
[40; 49]	3
[50; 59]	6
[60; 69]	19
[70; 79]	23
[80; 89]	9
	N = 60

Tính số trung bình và độ lệch chuẩn.

ÔN TẬP CHƯƠNG V

1 Kết quả điều tra 59 hộ gia đình ở một vùng dân cư về số con của mỗi hộ gia đình được ghi trong bảng sau

3	2	1	1	1	1	0	2	4	0	3	0
1	3	0	2	2	2	1	3	2	2	3	3
2	2	4	3	2	2	4	3	2	4	1	3
0	1	3	2	3	1	4	3	0	2	2	1
2	1	2	0	4	2	3	1	1	2	0	

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất;

b) Nêu nhận xét về số con của 59 gia đình đã được điều tra;

c) Tính số trung bình cộng, số trung vị, mốt của các số liệu thống kê đã cho.

Giải

a) Bảng phân bố tần số và tần suất

Số con của 59 hộ gia đình

Số con	0	1	2	3	4	Cộng
Tần số	8	13	19	13	6	59
Tần suất (%)	13,6	22,0	32,2	22,0	10,2	100(%)

b) Nhận xét: Trong 59 hộ gia đình được khảo sát, ta thấy:

Chiếm tỉ lệ thấp nhất (10,2%) là những gia đình có 4 con.

Chiếm tỉ lệ cao nhất (32,2%) là những gia dình có 2 con.

Phần lớn (76,2%) là những gia đình có từ 1 đến 3 con.

c) Số trung bình $\bar{x} = \frac{1}{59}(8.0 + 13.1 + 19.2 + 13.3 + 6.4) \approx 2$ con

Số trung bình $M_e = 2$(con); Mốt $M_0 = 2$ (con).

2 Cho các số liệu thống kê được ghi trong hai bảng sau đây:

Khối lượng (tính theo gam) của nhóm cá thứ 1

645	650	645	644	650	635	650	654
650	650	650	643	650	630	647	650
645	650	645	642	652	635	647	652

Khối lượng (tính theo gam) của nhóm cá thứ 2

640	650	645	650	643	645	650	650	642
640	650	645	650	641	650	650	649	645
640	645	650	650	644	650	650	645	640

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp theo nhóm cá thứ 1 với các lớp là [630; 635); [635; 640); [640; 645); [645; 650); [650; 655];

b) Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp theo nhóm cá thứ 2 với các lớp là [638; 642); [642; 646); [646; 650); [650; 654];

c) Mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã được lập ở câu a), bằng cách vẽ biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất;

d) Mô tả bảng phân bố tần số ghép lớp đã được lập ở câu b) bằng cách vẽ biểu đồ tần số hình cột và đường gấp khúc tần số;

e) Tính trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn của các bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp đã lập được.

Từ đó, xét xem nhóm cá nào có khối lượng đồng đều hơn.

Giải

a) **Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp theo nhóm cá thứ 1 với các lớp đã cho là:**

Khối lượng của nhóm cá thứ 1

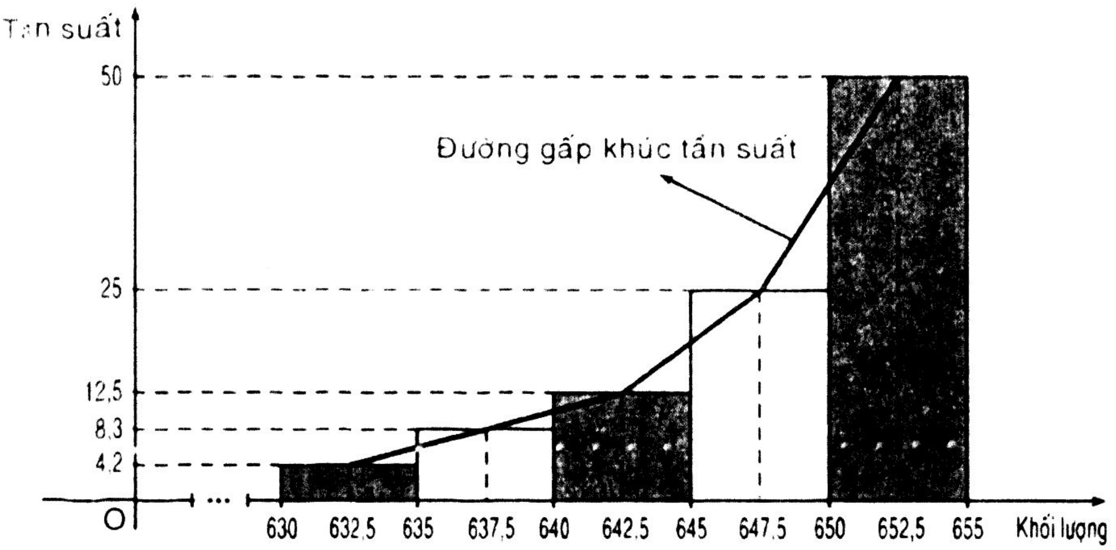
Lớp khối lượng (gam)	Tần số	Tần suất(%)
[630; 635)	1	4,2
[635; 640)	2	8,3
[640; 645)	3	12,5
[645; 650)	6	25,0
[650; 655]	12	50,0
Cộng	24	100(%)

b) **Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp theo nhóm cá thứ 2 là**

Khối lượng của nhóm cá thứ 2

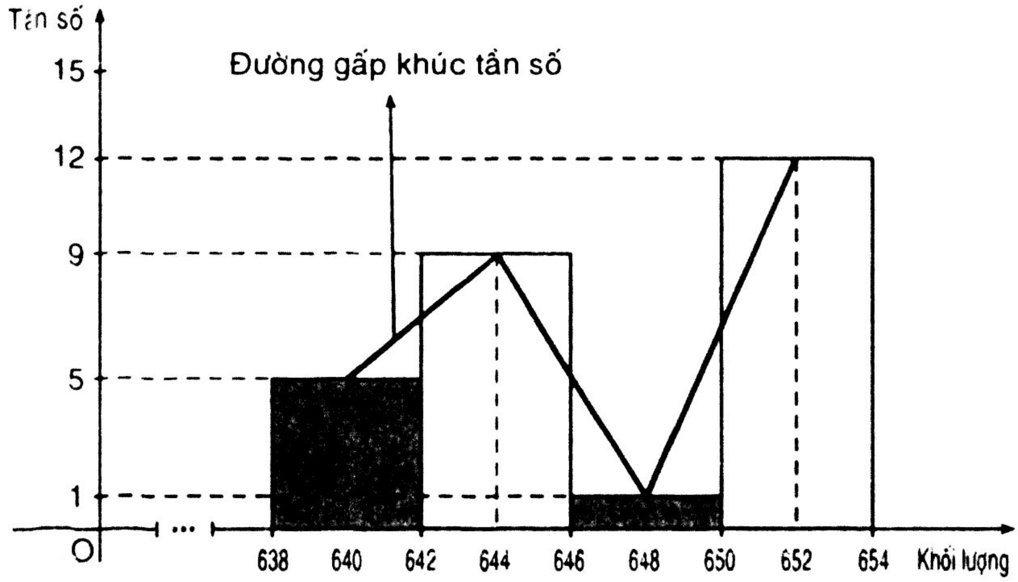
	Tần số	Tần suất(%)
[638; 642)	5	18,5
[642; 646)	9	33,3
[646; 650)	1	3,7
[650; 654]	12	44,5
Cộng	27	100(%)

c)



Biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất về khối lượng (g) của nhóm cá thứ 1

d)



Biểu đồ tần số hình cột và đường gấp khúc tần số

e) Ở nhóm cá thứ 1 ta có:

Số trung bình cộng:

$$\bar{x} = \frac{1}{24}(1.632,5 + 2.637,5 + 3.642,5 + 6.647,5 + 12.652,5) \approx 648\text{g}$$

Phương sai $s_x^2 = \frac{1}{24}[1.(632,5 - 648)^2 + 2.(637,5 - 648)^2 +$

$$+ 3.(642,5 - 648)^2 + 6(647,5 - 648)^2 + 12(652,5 - 648)^2] \approx 33,2$$

Độ lệch chuẩn $s_x = \sqrt{s_x^2} \approx 5,76$

Tương tự ở nhóm cá thứ 2 ta có: $\bar{y} \approx 649$g; $s_y^2 \approx 23,14$; $s_y \approx 4,81$

Hai nhóm cá có khối lượng được đo theo cùng một đơn vị đo, khối lượng trung bình của chúng xấp xỉ nhau. Nhóm cá thứ 2 có phương sai bé hơn. Từ đó suy ra rằng nhóm cá thứ 2 có khối lượng đồng đều hơn.

3. Cho các số liệu thống kê được ghi trong bảng sau:

Mức lương hàng năm của các cán bộ và nhân viên trong một công ti (đơn vị: nghìn đồng)

20910	76000	20350	20060
21410	20110	21410	21360
20350	21130	20960	125000

Tìm mức lương bình quân của các cán bộ và nhân viên trong công ti, số trung vị của các số liệu thống kê đã cho.

Nêu ý nghĩa của số trung vị.

Giải

Mức lương trung bình:

$$\bar{x} = \frac{1}{12}(20060 + 20110 + 2.20350 + 20910 + 20960 + 21130 + 21360 +$$

$$+ 2.21401 + 76000 + 125000) = 34087500 \text{ đồng}$$

Sắp thứ tự cho các số liệu đã cho, ta thu được dãy không giảm số liệu sau 20060, 20110, 20350, 20350, 20910, 20960, 21130, 21360, 21410, 21410, 76000, 125000 (nghìn đồng).

Từ đó ta có: $M_e = \dfrac{20960 + 21130}{2} = 21045$ (nghìn đồng)

Trong các số liệu thống kê đã cho có sự chênh lệch nhau rất lớn, nên số trung vị (M_e = 21045000đ) được chọn làm đại diện cho mức lương hàng năm của mỗi người trong 12 cán bộ và nhân viên của công ti đã được khảo sát.

4. Người ta đã tiến hành thăm dò ý kiến của khách hàng về các mẫu 1, 2, 3, 4, 5 của một loại sản phẩm mới được sản xuất ở một nhà máy. Dưới đây là bảng phân bố tần số theo số phiếu tín nhiệm dành cho các mẫu kể trên.

Mẫu	1	2	3	4	5	Cộng
Tần số	2100	1860	1950	2000	2090	10000

a) Tìm mốt của bảng phân bố tần số đã cho.

b) Trong sản xuất, nhà máy nên ưu tiên cho mẫu nào?

Giải

a) Tần số cao nhất là 2100 ứng với mẫu 1. Vậy mốt là mẫu 1.

b) Trong sản xuất, nhà máy ưu tiên cho mẫu 1.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng trong các bài tập sau:

5. Cho bảng phân bố tần số.

Tiền thưởng (triệu đồng) cho cán bộ và nhân viên trong một công ti.

Tiền thưởng	2	3	4	5	6	Cộng
Tần số	5	15	10	6	7	43

Mốt của bảng phân bố tần số đã cho là

(A) 2 triệu đồng; (B) 6 triệu đồng;

(C) 3 triệu đồng; (D) 5 triệu đồng.

Trả lời: Tần số cao nhất là 15 ứng với tiền thưởng 3 triệu đồng. Chọn (C).

6. Cho bảng phân bố tần số

Tuổi của 169 đoàn viên thanh niên

Tuổi	18	19	20	21	22	Cộng
Tần số	10	50	70	29	10	169

Số trung vị của bảng phân bố tần số đã cho là

(A) 18 tuổi; (B) 20 tuổi; (C) 19 tuổi; (D) 21 tuổi.

Giải

169 lẻ, số ở giữa từ 1 đến 169 là 85. Ta có $x_{85} = 20 \Rightarrow M_e = 20$ tuổi. Chọn (B).

7. Cho dãy số liệu thống kê: 21, 23, 24, 25, 22, 20.

Số trung bình cộng của các số liệu thống kê đã cho là

(A) 23,5; (B) 22; (C) 22,5; (D) 14.

Trả lời: $\bar{x} = \frac{1}{6}(20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25) = 22{,}5$. Chọn (C).

8. Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Phương sai của các số liệu thống kê đã cho là

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

Trả lời: $\bar{x} = 4$

$$s_x^2 = \frac{1}{7}[(1-4)^2 + (2-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2 + (7-4)^2] = 4.$$

Chọn (D).

9. Ba nhóm học sinh gồm 10 người, 15 người, 25 người. Khối lượng trung bình của mỗi nhóm lần lượt là: 50 kg, 38 kg, 40 kg. Khối lượng trung bình của cả ba nhóm học sinh là

(A) 41,4 kg; (B) 42,4 kg; (C) 26 kg; (D) 37 kg.

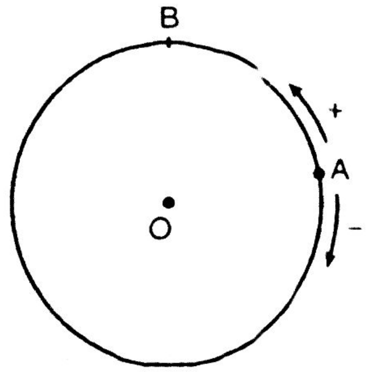
Trả lời: $\bar{x} = \frac{1}{50}(10.50 + 15.38 + 25.40) = 41{,}4$ kg. Chọn (A).

Chương VI. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

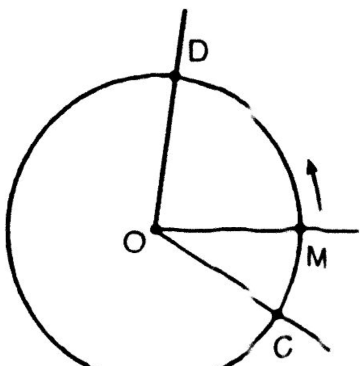
1. Đường tròn định hướng và cung lượng giác



Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại gọi là chiều âm. Ta quy ước chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều dương.

Với hai điểm A, B đã cho trên đường tròn định hướng ta có vô số cung lượng giác điểm đầu A, điểm cuối B. Mỗi cung như vậy đều được kí hiệu là $\overset{\curvearrowright}{AB}$.

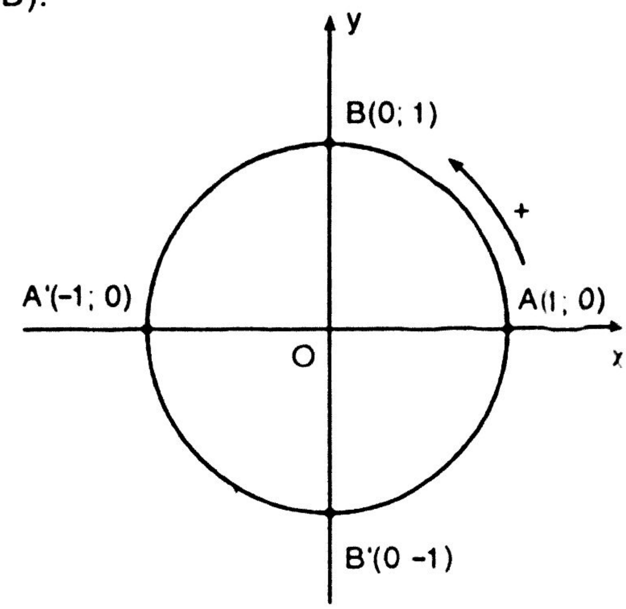
2. Góc lượng giác



Trên đường tròn định hướng cho một cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{CD}$. Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ C tới D tạo nên cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{CD}$ nói trên. Khi đó tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OC tới vị trí OD. Ta nói tia OM tạo ra một *góc lượng giác*, có tia đầu là OC, tia cuối là OD. Kí hiệu góc lượng giác đó là (OC,OD).

3. Đường tròn lượng giác

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy đường tròn lượng giác là đường tròn định hướng tâm O bán kính R = 1.



4. Độ và rađian

a) Đơn vị rađian

Trên đường tròn tuỳ ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là cung có số đo 1 rad.

b) Quan hệ giữa độ và rađian

$$1^0 = \frac{\pi}{180}\text{rad và } 1\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$$

Với $\pi \approx 3,14$ thì $1^0 \approx 0,01745$ rad và 1 rad = $57^0 17' 45''$.

c) Bảng chuyển đổi thông dụng

Độ	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
Rađian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

d) Độ dài của một cung tròn

Trên đường tròn bán kính R, cung nửa đường tròn có số đo là π rad và có độ dài là πR. Vậy

Cung có số đo là α rad của đường tròn bán kính R có độ dài $l = R\alpha$.

5. Số đo của một cung lượng giác

Số đo của một cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ ($A \neq M$) là một số thực, âm hay dương.

Kí hiệu số đo của cung $\overset{\frown}{AM}$ là sđ $\overset{\frown}{AM}$.

$$\text{sđ}\overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$= a^0 + k.360^0,\ k \in \mathbb{Z}$$

6. Số đo của một góc lượng giác

Số đo của góc lượng giác (OA, OC) là số đo của cung lượng giác $\overset{\frown}{AC}$ tương ứng.

7. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Chọn điểm gốc A(1; 0) làm điểm đầu của tất cả các cung lượng giác trên đường tròn lượng giác. Để biểu diễn cung lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác ta cần chọn điểm cuối M của cung này. Điểm cuối M được xác định bởi hệ thức sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo khác nhau trên đường tròn lượng giác, có thể xảy ra trường hợp các điểm cuối của chúng trùng nhau không? Khi nào trường hợp này xảy ra?

Trả lời: Các điểm cuối trùng nhau khi các số đo hơn kém nhau một bội của 2π.

2. Đổi số đo của các góc sau đây ra radian

a) 18^0; b) $57^030'$; c) -25^0; d) $-125^045'$.

Giải

Ta có: $1^0 \approx 0{,}01745$

a) $18^0 \approx 18.0{,}01745 \approx 0{,}3142$ rad

b) $57^030' \approx 57{,}5.0{,}01745 \approx 1{,}0036$ rad

c) $-25^0 \approx -25.0{,}01745 \approx -0{,}4363$ rad

d) $-125^045' \approx -125{,}75.0{,}01745 \approx -2{,}1948$ rad.

3. Đổi các số đo của các cung sau đây ra độ, phút, giây

a) $\frac{\pi}{18}$; b) $\frac{3\pi}{16}$; c) -2; d) $\frac{3}{4}$.

Giải

a) $\frac{\pi}{18} = \frac{180^0}{18} = 10^0$ b) $\frac{3\pi}{16} = \frac{3.180^0}{16} = 33^045'$

c) $-2 = -2.\frac{180^0}{\pi} \approx -114^035'30''$ d) $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}.\frac{180^0}{\pi} \approx 42^058'19''$

4. Một đường tròn có bán kính 20cm. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo:

a) $\frac{\pi}{15}$; b) 1,5; c) 37^0.

Giải

Áp dụng công thức $l = R.\alpha$

a) $l = 20.\frac{\pi}{15} \approx 4{,}19$cm; b) $l = 20.1{,}5 = 30$cm

c) $\alpha = 37^0 = 37.0{,}01745 \approx 0{,}65$ rad $\Rightarrow l = 20.0{,}65 = 12{,}91$ cm.

5. Trên đường tròn lượng giác hãy biểu diễn các cung có số đo

a) $-\frac{5\pi}{4}$; b) 135^0; c) $\frac{10\pi}{3}$; d) -225^0.

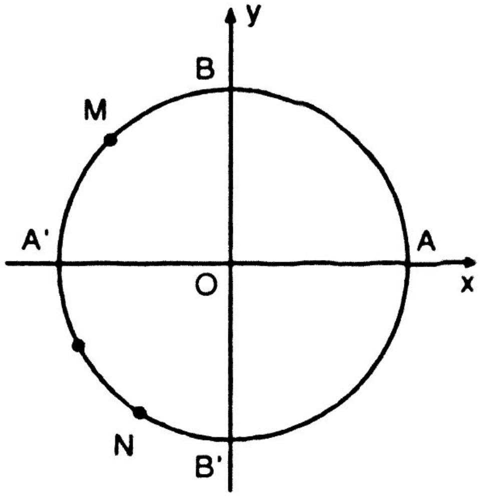
Giải

a) Cung $-\frac{5\pi}{4}$ là $\overset{\frown}{AM}$ (M là trung điểm của $\overset{\frown}{A'B}$).

b) Cung 135^0 cũng là cung $\overset{\frown}{AM}$ ở trên.

c) Cung $\frac{10\pi}{3}$ là $\overset{\frown}{AN}$ (với $\overset{\frown}{A'N} = \frac{2}{3}\overset{\frown}{A'B'}$)

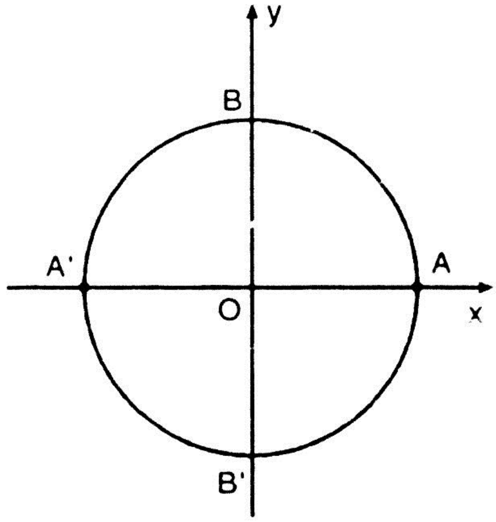
d) Cung -225^0 cũng là cung $\overset{\frown}{AN}$ ở trên.



6. Trên đường tròn lượng giác gốc A, xác định các điểm M khác nhau, biết rằng cung $\overset{\frown}{AM}$ có số đo tương ứng là (trong đó k là một số nguyên tuỳ ý).

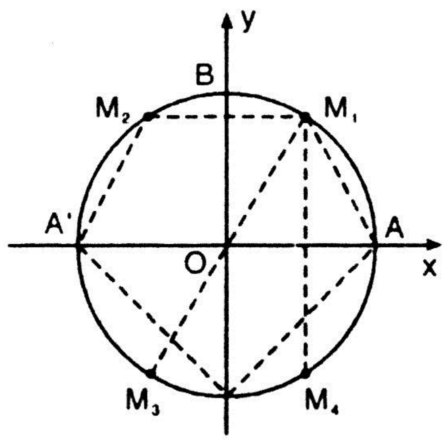
a) $k\pi$; b) $k\frac{\pi}{2}$; c) $k\frac{\pi}{3}$.

Giải



a) Cung $\overset{\frown}{AM}$ có số đo là $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì điểm M trùng với A (nếu k chẵn) hoặc trùng với A' (nếu k lẻ).

b) Cung $\overset{\frown}{AM}$ có số đo $k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì điểm M trùng với A nếu $k = 4n$, $n \in \mathbb{Z}$; M trùng với B nếu $k = 4n + 1$; M trùng với A' nếu $k = 4n + 2$; M trùng với B' nếu $k = 4n + 3$, $n \in \mathbb{Z}$.



c) Cung $\overset{\frown}{AM}$ có số đo $k\frac{\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì điểm M trùng với A nếu $k = 6n$ ($n \in \mathbb{Z}$); M trùng với M_1 nếu $k = 6n + 1$; M trùng với M_2 nếu $k = 6n + 2$; M trùng với A' nếu $k = 6n + 3$; M trùng với M_3 nếu $k = 6n + 4$; M trùng với M_4 nếu $k = 6n + 5$.

7 Trên đường tròn lượng giác cho điểm M xác định bởi sđ$\overset{\frown}{AM} = \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là điểm đối xứng của M qua trục Ox, trục Oy và gốc toạ độ. Tìm số đo của các cung $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$, $\overset{\frown}{AM_3}$.

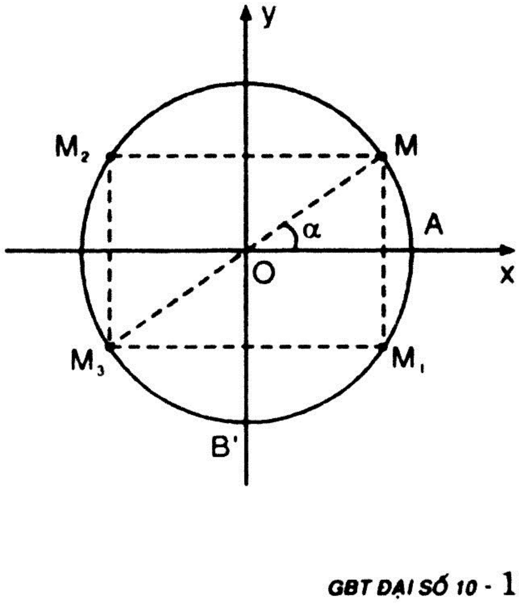
Giải

sđ$\overset{\frown}{AM} = \alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ suy ra

sđ$\overset{\frown}{AM_1} = -\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

sđ$\overset{\frown}{AM_2} = \pi - \alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

sđ$\overset{\frown}{AM_3} = \alpha + \pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. a) Đổi số đo độ của các cung tròn sau thành số đo radian (chính xác đến hàng phần nghìn) $21^0 30'$ và $75^0 54'$.

   b) Đổi số đo radian của các cung tròn sau ra số đo độ (chính xác đến phút): 2,5 rad và $\frac{2}{\pi}$ rad (có thể dùng máy tính bỏ túi).

2. Chứng minh rằng:

   a) Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo là $\frac{10\pi}{3}$ và $\frac{22\pi}{3}$ thì có cùng tia cuối.

   b) Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo là 645^0 và -435^0 thì có cùng tia cuối.

§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Định nghĩa

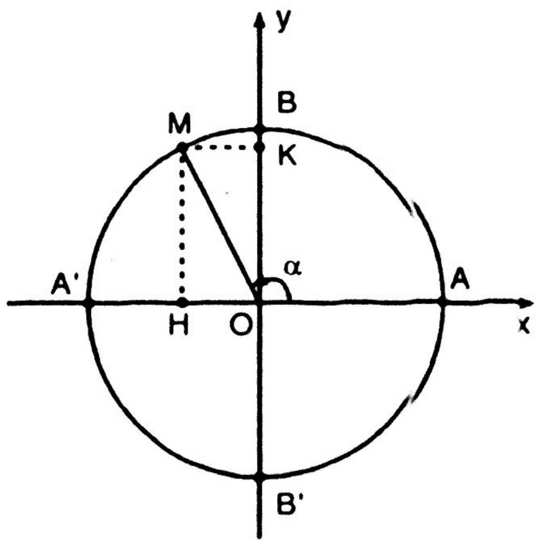
Trên đường tròn lượng giác cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ (còn viết $\overset{\frown}{AM} = \alpha$)

$\sin\alpha = \overline{OK}$

$\cos\alpha = \overline{OH}$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (với $\cos\alpha \neq 0$)

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (với $\sin\alpha \neq 0$)



Các giá trị sinα, cosα, tanα, cotα được gọi là các giá trị lượng giác của cung α.

Ta cũng gọi trục tung là trục sin, còn trục hoành là trục côsin.

2. Hệ quả

a) Vì các góc lượng giác $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ cùng xác định một điểm M trên đường tròn lượng giác nên ta có:

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha;\ \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$$

b) Với mọi α, ta luôn có: $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$; $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

c) $\tan\alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\cot\alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha;\ \cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha,\ k \in \mathbb{Z}$

d) Dấu giá trị hàm số lượng giác

Góc phần tư / Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

3. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot\alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

4. Công thức lượng giác cơ bản

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha},\quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha},\quad \alpha \neq k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$

d) $\tan\alpha.\cot\alpha = 1,\quad \alpha \neq \dfrac{k\pi}{2},\quad k \in \mathbb{Z}$

5. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

a) Hai góc đối nhau: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$; $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

b) Hai góc hơn kém nhau π: $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$; $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$

$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$; $\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha$

c) Hai góc bù nhau: $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$; $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

d) Hai góc phụ nhau: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$; $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Có cung α nào mà $\sin\alpha$ nhận các giá trị tương ứng sau đây không?

a) $-0,7$; b) $\frac{4}{3}$; c) $-\sqrt{2}$; d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Giải

a) Vì $-1 < -0,7 < 1$ nên có cung α sao cho $\sin\alpha = -0,7$.

b) Vì $\frac{4}{3} > 1$ nên không có cung α nào thỏa $\sin\alpha = \frac{4}{3}$.

c) $-\sqrt{2} < -1$ nên không có α thỏa $\sin\alpha = -\sqrt{2}$.

d) Vì $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ nên không có α thỏa $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. Các đẳng thức sau có thể đồng thời xảy ra không?

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ và $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$;

c) $\sin\alpha = 0,7$ và $\cos\alpha = 0,3$.

Giải

a) Không, vì không thoả mãn hằng đẳng thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

b) Có, vì $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1$;

c) Không vì $(0,7)^2 + (0,3)^2 \neq 1$.

3. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác

a) $\sin(\alpha - \pi)$; b) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; c) $\tan(\alpha + \pi)$; d) $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

Giải

a) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi < \alpha - \pi < -\frac{\pi}{2}$ suy ra điểm cuối của cung $\alpha - \pi$ thuộc cung (III) trên đường tròn lượng giác nên $\sin(\alpha - \pi) < 0$

b) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < -\alpha < 0 \Rightarrow \pi < \frac{3\pi}{2} - \alpha < \frac{3\pi}{2}$ suy ra điểm cuối của cung $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ thuộc cung (III)

Do đó $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) < 0$

c) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi < \pi + \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \pi + \alpha \in (III) \Rightarrow \tan(\pi + \alpha) > 0.$

d) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{2} < \pi \Rightarrow \alpha + \frac{\pi}{2} \in (II) \Rightarrow \cot(\alpha + \frac{\pi}{2}) < 0$

4. Tính các giá trị lượng giác của góc α, nếu

a) $\cos\alpha = \frac{4}{13}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\sin\alpha = -0{,}7$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

c) $\tan\alpha = -\frac{15}{7}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

d) $\cot\alpha = -3$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Giải

a) Nếu $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì $\sin\alpha > 0$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{169} = \frac{153}{169}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{3\sqrt{17}}{13}, \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3\sqrt{17}}{4}, \cot\alpha = \frac{4}{3\sqrt{17}}$$

b) Nếu $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ thì $\cos\alpha < 0$. Ta có:

$\cos^2\alpha = 1 - 0{,}49 = 0{,}51 \Rightarrow \cos\alpha \approx -0{,}71$ (làm tròn)

$\tan\alpha \approx 0{,}99$; $\cot\alpha \approx 1{,}01$.

c) Nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$.

$$\frac{1}{\cos^2\pi} = 1 + \tan^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{49}{274} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{7}{\sqrt{274}}$$

$$\sin\alpha = \tan\alpha.\cos\alpha = \frac{15}{\sqrt{274}}, \cot\alpha = -\frac{7}{15}$$

d) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \sin\alpha < 0,\ \cos\alpha > 0$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{1 + \cot^2\alpha} = \frac{1}{10} \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\alpha = \sin\alpha.\cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}; \tan\alpha = -\frac{1}{3}$$

5. Tìm α, biết:

a) $\cos\alpha = 1$; b) $\cos\alpha = -1$; c) $\cos\alpha = 0$;

d) $\sin\alpha = 1$; e) $\sin\alpha = -1$; f) $\sin\alpha = 0$.

Giải

a) $\alpha = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

b) $\alpha = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

d) $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $\alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

f) $\alpha = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a) $A = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$;

b) $B = \cos(x - \pi) + \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

2. Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a) $\cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}$;

b) $\sin A = -\sin(2A + B + C)$;

c) $\tan A = -\tan(B + C)$

3. Xác định dấu của sinα, cosα, tanα biết:

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$

$3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}$; $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$

4. Chứng minh rằng:

a) $\frac{\tan^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cot^2\alpha - \cos^2\alpha} = \tan^6\alpha$;

b) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan\alpha + \tan^2\alpha + \tan^3\alpha$.

§3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Công thức cộng

a) Công thức cộng đối với sin và cosin:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\beta.\sin\alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\beta.\sin\alpha$$

b) Công thức cộng đối với tang:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta};\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$$

2. Công thức nhân đôi:

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

3. Công thức biến đổi tích thành tổng và biến đổi tổng thành tích:

a) Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

b) Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Tính:

a) $\cos225^0$, $\sin240^0$, $\cot(-15^0)$, $\tan75^0$; b) $\sin\frac{7\pi}{12}, \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right), \tan\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

Giải

a) $\cos225^0=\cos(180^0+45^0)=-\cos45^0=-\frac{\sqrt2}{2}$

$\sin240^0=\sin(180^0+60^0)=-\sin60^0=-\frac{\sqrt3}{2}$

$$\cot(-15^0) = -\cot 15^0 = -\frac{-1}{\tan(45^0 - 30^0)} = -\frac{1 + \tan 45^0.\tan 30^0}{\tan 45^0 - \tan 30^0} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3} - 1} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3}$$

$$\tan 75^0 = \tan(45^0 + 30^0) = \frac{\tan 45^0 + \tan 30^0}{1 - \tan 45^0.\tan 30^0} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

b) $\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\tan\frac{13\pi}{12} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$$

2. Tính:

a) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, biết $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

c) $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$, biết $\sin a = \frac{4}{5}$, $0^0 < a < 90^0$ và $\sin b = \frac{2}{3}$, $90^0 < b < 180^0$

Giải

a) Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Suy ra: $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\alpha.\cos\frac{\pi}{3} - \sin\alpha.\sin\frac{\pi}{3}$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{3} - 1\right)$$

b) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \tan\alpha < 0 \Rightarrow \tan\alpha = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = -2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\alpha.\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{-2\sqrt{2} - 1}{1 - 2\sqrt{2}} = \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}.$$

c) $0^0 < a < 90^0 \Rightarrow \cos a > 0$, $90^0 < b < 180^0 \Rightarrow \cos b < 0$.

$$\cos a = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5},\quad \cos b = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{-\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = -\frac{3\sqrt{5} + 8}{15}$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b = -\frac{6 + 4\sqrt{5}}{15}$$

3. Rút gọn các biểu thức

a) $\sin(a + b) + \sin(\frac{\pi}{2} - a)\sin(-b)$;

b) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + \frac{1}{2}\sin^2 a$;

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) - \sin(a - b)$.

Giải

a) $\sin(a + b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(-b) = \text{sinacosb} + \text{sinbcosa} - \text{cosasinb}$

$= \text{sinacosb}$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + \frac{1}{2}\sin^2 a$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos a - \sin\frac{\pi}{4}\sin a\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos a + \sin\frac{\pi}{4}\sin a\right) + \frac{1}{2}\sin^2 a$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos a - \sin a)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos a + \sin a) + \frac{1}{2}\sin^2 a$$

$$= \frac{1}{2}(\cos^2 a - \sin^2 a) + \frac{1}{2}\sin^2 a = \frac{1}{2}\cos^2 a$$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) - \sin(a - b) = \text{sinacosb} - \text{sinacosb} + \text{sinbcosa}$

$= \text{cosasinb}$

4. Chứng minh các đẳng thức

a) $\dfrac{\cos(a - b)}{\cos(a + b)} = \dfrac{\cot a.\cot b + 1}{\cot a.\cot b - 1}$;

b) $\sin(a + b)\sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$;

c) $\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$.

Giải

a) $\dfrac{\cos(a - b)}{\cos(a + b)} = \dfrac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \dfrac{\sin a \sin b(\cot a \cot b + 1)}{\sin a \sin b(\cot a \cot b - 1)} = \dfrac{\cot a \cot b + 1}{\cot a \cot b - 1}$

b) $\sin(a+b)\sin(a-b) = (\sin a\cos b + \cos a\sin b)(\sin a\cos b - \cos a\sin b)$

$= \sin^2 a\cos^2 b - \cos^2 a\sin^2 b$

$= \sin^2 a(1 - \sin^2 b) - \sin^2 b(1 - \sin^2 a)$

$= \sin^2 a - \sin^2 a\sin^2 b - \sin^2 b + \sin^2 a\sin^2 b$

$= \sin^2 a - \sin^2 b$

$= (1 - \cos^2 a) - (1 - \cos^2 b) = \cos^2 b - \cos^2 a.$

c) $\cos(a+b)\cos(a-b) = (\cos a\cos b - \sin a\sin b)(\cos a\cos b + \sin a\sin b)$

$= \cos^2 a\cos^2 b - \sin^2 a\sin^2 b$

$= \cos^2 a(1 - \sin^2 b) - (1 - \cos^2 a)\sin^2 b$

$= \cos^2 a - \sin^2 b = 1 - \sin^2 a - (1 - \cos^2 b)$

$= \cos^2 b - \sin^2 a$

5. Tính sin2a, cos2a, tan2a, biết

a) $\sin a = -0{,}6$ và $\pi < a < \dfrac{3\pi}{2}$; b) $\cos a = -\dfrac{5}{13}$ và $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$;

c) $\sin a + \cos a = \dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{3\pi}{4} < a < \pi$.

Giải

a) $\pi < a < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos a < 0 \Rightarrow \cos a = -\sqrt{1-\sin^2 a} = -0{,}8$

Do đó $\sin 2a = 2\sin a\cos a = 2(-0{,}6).(-0{,}8) = 0{,}96$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 1 - 2(-0{,}6)^2 = 0{,}28$

$\tan 2a = \dfrac{\sin 2a}{\cos 2a} = \dfrac{0{,}96}{0{,}28} \approx 3{,}43$

b) $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi \Rightarrow \sin a > 0 \Rightarrow \sin a = \sqrt{1-\cos^2 a} = \dfrac{12}{13}$

Do đó: $\sin 2a = 2\sin a\cos a = 2.\left(-\dfrac{5}{13}\right).\dfrac{12}{13} = -\dfrac{120}{169}$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 2.\left(-\dfrac{5}{13}\right)^2 - 1 = -\dfrac{119}{169}$

$\tan 2a = \dfrac{\sin 2a}{\cos 2a} = \dfrac{120}{119}$

c) $(\sin a + \cos a)^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 1 + \sin 2a = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \sin 2a = -\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{3\pi}{4} < a < \pi \Rightarrow \dfrac{3\pi}{2} < 2a < 2\pi \Rightarrow \cos 2a > 0$

$\Rightarrow \cos 2a = \sqrt{1-\sin^2 2a} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$; $\tan 2a = \dfrac{\sin 2a}{\cos 2a} = -\dfrac{3}{\sqrt{7}}$

6 Cho $\sin 2a = -\frac{5}{9}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính sina và cosa.

Giải

$\frac{\pi}{2} < a < \pi \Rightarrow \sin a > 0, \cos a < 0$

Ta có $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a = -\frac{5}{9} \Rightarrow (\sin a + \cos a)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin a + \cos a = \pm\frac{2}{3}$$

a) Trường hợp $\sin a + \cos a = \frac{2}{3}$ ta có hệ $\begin{cases} \sin a + \cos a = \frac{2}{3} \\ \sin a.\cos a = -\frac{5}{18} \end{cases}$

suy ra sina và cosa là nghiệm của phương trình $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{18} = 0$.

Vì sina > 0, cosa < 0 nên $\sin a = \frac{2+\sqrt{14}}{6}$, $\cos a = \frac{2-\sqrt{14}}{6}$.

b) Trường hợp $\sin a + \cos a = -\frac{2}{3}$ ta có hệ $\begin{cases} \sin a + \cos a = -\frac{2}{3} \\ \sin a.\cos a = -\frac{5}{18} \end{cases}$

suy ra sina và cosa là nghiệm của phương trình: $x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{18} = 0$

Vì sina > 0 và cosa < 0 nên $\sin a = \frac{\sqrt{14}-2}{6}$, $\cos a = -\frac{2+\sqrt{14}}{6}$

Vậy: $\sin a = \frac{2+\sqrt{14}}{6}$, $\cos a = \frac{2-\sqrt{14}}{6}$ hoặc

$\sin a = \frac{\sqrt{14}-2}{6}$, $\cos a = \frac{\sqrt{14}+2}{6}$

7. Biến đổi thành tích các biểu thức sau

a) 1 − sinx; b) 1 + sinx; c) 1 + 2cosx; d) 1 − 2sinx.

Giải

a) $1 - \sin x = \sin\frac{\pi}{2} - \sin x = 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

b) $1 + \sin x = \sin\frac{\pi}{2} + \sin x = 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

c) $1+2\cos x=2\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)$.

d) $1-2\sin x=2\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{6}-\sin x\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)$.

8. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}$.

Giải

$$A=\frac{(\sin x+\sin 5x)+\sin 3x}{(\cos x+\cos 5x)+\cos 3x}=\frac{2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x}{2\cos 3x\cos 2x+\cos 3x}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=\tan 3x$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. a) Tính sin2a biết $\sin a-\cos a=\frac{1}{5}$;

b) Chứng minh: $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=2\tan 2\alpha$

2. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A=\cos 20^0\cos 40^0\cos 60^0\cos 80^0$;

b) $B=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$;

c) $C=\sin 6^0\sin 42^0\sin 66^0\sin 78^0$

Đáp số: a) $A=\frac{1}{16}$; b) $B=\frac{1}{8}$; c) $C=\frac{1}{16}$

ÔN TẬP CHƯƠNG VI

1. Tính:

a) $\sin\alpha$ nếu $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ và $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

b) $\cos\alpha$ nếu $\tan\alpha=2\sqrt{2}$ và $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

c) $\tan\alpha$ nếu $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$ và $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

d) $\cot\alpha$ nếu $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$ và $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Giải

a) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\Rightarrow\sin\alpha>0\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

b) $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = -\dfrac{1}{3}$

c) $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \cot\alpha < 0 \Rightarrow \cot\alpha = -\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

d) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \tan\alpha < 0 \Rightarrow \tan\alpha = -\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = -\sqrt{15} \Rightarrow \cot\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

2. Rút gọn các biểu thức:

a) $\dfrac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$;

b) $\tan\alpha\left(\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)$;

c) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}$;

d) $\dfrac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha}$.

Giải

a) $\dfrac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \dfrac{2\sin 2\alpha - 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha + 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha} = \dfrac{2\sin 2\alpha(1-\cos 2\alpha)}{2\sin 2\alpha(1+\cos 2\alpha)}$

$$= \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha$$

b) $\tan\alpha\left(\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right) = \tan\alpha.\dfrac{1+\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha}$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\frac{2\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha$$

c) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)} = \dfrac{\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]^2}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right) - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}$

$$= \frac{1+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)} = \frac{1+\cos 2\alpha}{-\sin 2\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha}{-2\sin\alpha\cos\alpha} = -\cot\alpha$$

d) $\dfrac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha} = \dfrac{2\cos 4\alpha.\sin\alpha}{2\cos 4\alpha} = \sin\alpha.$

3. Không sử dụng máy tính, hãy tính:

a) $\cos\frac{22\pi}{3}$; b) $\sin\frac{23\pi}{4}$; c) $\sin\frac{25\pi}{3}-\tan\frac{10\pi}{3}$; d) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$

Giải

a) $\cos\frac{22\pi}{3}=\cos\left(7\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

b) $\sin\frac{23\pi}{4}=\sin\left(6\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sin\frac{25\pi}{3}-\tan\frac{10\pi}{3}=\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\tan\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Không sử dụng máy tính, hãy chứng minh:

a) $\sin75^0+\cos75^0=\frac{\sqrt{6}}{2}$; b) $\tan267^0+\tan93^0=0$;

c) $\sin65^0+\sin55^0=\sqrt{3}\cos5^0$; d) $\cos12^0-\cos48^0=\sin18^0$.

Giải

a) $\sin75^0+\cos75^0=\sin(45^0+30^0)+\cos(45^0+30^0)$

$=\sin45^0\cos30^0+\sin30^0\cos45^0+\cos45^0\cos30^0-\sin45^0\sin30^0$

$=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\tan267^0+\tan93^0=\tan(360^0-93^0)+\tan93^0=-\tan93^0+\tan93^0=0$.

c) $\sin65^0+\sin55^0=\sin(60^0+5^0)+\sin(60^0-5^0)$

$=\sin60^0.\cos5^0+\sin5^0\cos60^0+\sin60^0\cos5^0-\cos60^0\sin5^0$

$=2\sin60^0.\cos5^0=2.\frac{\sqrt{3}}{2}\cos5^0=\sqrt{3}\cos5^0$.

d) $\cos12^0-\cos48^0=-2\sin30^0\sin(-18^0)=2.\frac{1}{2}\sin18^0=\sin18^0$

5. Chứng minh các đồng nhất thức

a) $\frac{1-\cos x+\cos2x}{\sin2x-\sin x}=\cot x$; b) $\frac{\sin x+\sin\frac{x}{2}}{1+\cos x+\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$

c) $\frac{2\cos2x-\sin4x}{2\cos2x+\sin4x}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$; d) $\tan x-\tan y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x.\cos y}$.

Giải

a) $\dfrac{1-\cos x+\cos 2x}{\sin 2x-\sin x}=\dfrac{2\cos^2 x-\cos x}{2\sin x\cos x-\sin x}=\dfrac{\cos x(2\cos x-1)}{\sin x(2\cos x-1)}=\cot x$

b) $\dfrac{\sin x+\sin\dfrac{x}{2}}{1+\cos x+\cos\dfrac{x}{2}}=\dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}}{2\cos^2\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}}=\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}\left(2\cos\dfrac{x}{2}+1\right)}{\cos\dfrac{x}{2}\left(2\cos\dfrac{x}{2}+1\right)}=\tan\dfrac{x}{2}$;

c) $\dfrac{2\cos 2x-\sin 4x}{2\cos 2x+\sin 4x}=\dfrac{2\cos 2x(1-\sin 2x)}{2\cos 2x(1+\sin 2x)}=\dfrac{(\cos x-\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)^2}$

$$=\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^2=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

d) $\tan x-\tan y=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{\sin y}{\cos y}=\dfrac{\sin x\cos y-\sin y\cos x}{\cos x\cos y}=\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$.

6. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x

a) $A=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$; b) $B=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$;

c) $C=\sin^2 x+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$; d) $D=\dfrac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}.\cot x$.

Giải

a) $A=\sin\dfrac{\pi}{4}\cos x+\sin x\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{4}\cos x-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin x$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x=0$

b) $B=\cos\dfrac{\pi}{6}\cos x+\sin\dfrac{\pi}{6}\sin x-\sin\dfrac{\pi}{3}\cos x-\sin x\cos\dfrac{\pi}{3}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x=0$

c) $C=\sin^2 x+\cos^2\dfrac{\pi}{3}\cos^2 x-\sin^2\dfrac{\pi}{3}\sin^2 x$

$=\sin^2 x+\dfrac{1}{4}\cos^2 x-\dfrac{3}{4}\sin^2 x=\dfrac{1}{4}(\sin^2 x+\cos^2 x)=\dfrac{1}{4}$

d) $D=\dfrac{2\sin^2 x+2\sin x\cos x}{2\cos^2 x+2\sin x\cos x}.\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{2\sin x(\sin x+\cos x)}{2\cos x(\cos x+\sin x)}.\dfrac{\cos x}{\sin x}=1$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng trong các bài tập sau

6. Giá trị $\sin\frac{47\pi}{6}$ là

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (B) $\frac{1}{2}$; (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (D) $-\frac{1}{2}$

Trả lời: $\sin\frac{47\pi}{6} = \sin(8\pi - \frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$. Chọn (D).

7. Cho $\cos a = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ với $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$. Giá trị tana là

(A) $\frac{-4}{\sqrt{5}}$; (B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; (C) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$; (D) $-\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Trả lời: $\pi < a < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \tan a > 0 \Rightarrow \tan a = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 a} - 1} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Chọn (B).

8. Cho $a = \frac{5\pi}{6}$. Giá trị của biểu thức $\cos 3a + 2\cos(\pi - 3a).\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 1,5a\right)$ là

(A) $\frac{1}{4}$; (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (C) 0; (D) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

Trả lời: $\cos 3a + 2\cos(\pi - 3a)\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 1,5a\right) = \cos 3a - \cos 3a(1 - \sin 3a) = \frac{1}{2}\sin 6a$

Với $a = \frac{5\pi}{6}$ thì $\frac{1}{2}\sin 6a = \frac{1}{2}\sin 5\pi = 0$. Chọn (C).

9. Giá trị của biểu thức $A = \dfrac{2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1}{1 + 8\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}}$ là

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (B) $\frac{-\sqrt{3}}{4}$; (C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; (D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Trả lời: $A = \dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{1 + 2\sin^2\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Chọn (D).

10. Cho $\cot a = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $B = \dfrac{4\sin a + 5\cos a}{2\sin a - 3\cos a}$ là

(A) $\frac{1}{17}$; (B) $\frac{5}{9}$; (C) 13; (D) $\frac{2}{9}$.

Trả lời: $B = \dfrac{\sin a(4+5\cot a)}{\sin a(2-3\cot a)} = \dfrac{4+5\cot a}{2-3\cot a} = \dfrac{4+\frac{5}{2}}{2-\frac{3}{2}} = 13$. Chọn (C).

11. Cho tana = 2. Giá trị của biểu thức $C = \dfrac{\sin a}{\sin^3 a + 2\cos^3 a}$ là

(A) $\dfrac{5}{12}$; (B) 1; (C) $-\dfrac{8}{11}$; (D) $-\dfrac{10}{11}$.

Trả lời: $C = \dfrac{\frac{\sin a}{\cos^3 a}}{\tan^3 a + 2} = \dfrac{\tan a\left(1+\tan^2 a\right)}{\tan^3 a + 2} = \dfrac{2.5}{10} = 1$. Chọn (B).

ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+3x+4} - \sqrt{-x^2+8x-15}$.

a) Tìm tập xác định A của hàm số f(x).

b) Giả sử $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \le 5\}$

Hãy xác định các tập A\B và $\mathbb{R} \setminus (A \setminus B)$.

Giải

a) f(x) xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x+4 \ge 0 \\ -x^2+8x-15 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 3 \le x \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \le x \le 5$. Vậy A = [3; 5].

b) $A \setminus B = [3; 4]$, $\mathbb{R} \setminus (A \setminus B) = (-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$.

2. Cho phương trình: $mx^2 - 2x - 4m - 1 = 0$

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị $m \ne 0$, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm giá trị của m để −1 là một nghiệm của phương trình. Sau đó tìm nghiệm còn lại.

Giải

a) Với $m \ne 0$ ta có $\Delta' = 1 + m(4m+1) = 4m^2 + m + 1 > 0, \forall m$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) $x = -1$ là nghiệm của phương trình khi và chỉ khi

$$m + 2 - 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}.$$

Khi đó phương trình $\frac{1}{3}x^2 - 2x - \frac{7}{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 7 \end{array}\right.$

Nghiệm còn lại là $x_2 = 7$.

3. Cho phương trình: $x^2 - 4mx + 9(m - 1)^2 = 0$

a) Xét xem với giá trị nào của m, phương trình trên có nghiệm.

b) Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho, hãy tính tổng và tích của chúng. Tìm một hệ thức giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m.

c) Xác định m để hiệu các nghiệm của phương trình bằng 4.

Giải

a) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = 4m^2 - 9(m - 1)^2 = (5m - 3)(3 - m) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} \leq m \leq 3$$

b) $S = x_1 + x_2 = 4m$ (1)

$P = x_1x_2 = 9(m - 1)^2$ (2)

Từ (1) ta có $m = \frac{x_1 + x_2}{4}$, thế giá trị của m vào (2) ta có

$$x_1x_2 = 9\left(\frac{x_1 + x_2}{4} - 1\right)^2 \Leftrightarrow 9(x_1 + x_2 - 4)^2 - 16x_1x_2 = 0.$$

Đây là hệ thức giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m.

c) Ta có: $4 = |x_1 - x_2| \Leftrightarrow 16 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

$$\Leftrightarrow 16 = 16m^2 - 36(m - 1)^2 \Leftrightarrow 5m^2 - 18m + 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \frac{13}{5} \end{array}\right.$$

4. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $5(x - 1) < x^5 - 1 < 5x^4(x - 1)$, nếu $x - 1 > 0$;

b) $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 \geq 0$, biết rằng $x + y \geq 0$;

c) $\sqrt{4a + 1} + \sqrt{4b + 1} + \sqrt{4c + 1} < 5$,

Biết rằng a, b, c cùng lớn hơn $-\frac{1}{4}$ và $a + b + c = 1$.

Giải

a) Với $x > 1$ ta có $x^5 - 1 - 5(x - 1) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - 5) > 0$

do đó $x^5 - 1 > 5(x - 1)$

$$5x^4(x - 1) - (x^5 - 1) = (x - 1)[4x^4 - (x^3 + x^2 + x + 1)] > 0$$

do đó $5x^4(x - 1) > x^5 - 1$.

b) Vì $A = x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 = x^5 - x^4y + y^5 - xy^4$

$= (x - y)(x^4 - y^4) = (x - y)^2(x + y)(x^2 + y^2)$

nên $A \geq 0$ nếu $x + y \geq 0$.

c Với $a \geq -\frac{1}{4}, b \geq -\frac{1}{4}, c \geq -\frac{1}{4}$, ta có:

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < \sqrt{4a^2+4a+1} + \sqrt{4b^2+4b+1} + \sqrt{4c^2+4c+1}$$

Với $a + b + c = 1$, ta có

$$\sqrt{4a^2+4a+1} + \sqrt{4b^2+4b+1} + \sqrt{4c^2+4c+1}$$
$$= (2a + 1) + (2b + 1) + (2c + 1) = 2(a + b + c) + 3 = 5.$$

Vậy $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$.

5. Giải hệ phương trình sau bằng cách đưa về hệ phương trình dạng tam giác

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 5y - z = 9 \\ 5x - 2y - 3z = -3. \end{cases}$$

Giải

Đưa về hệ phương trình dạng tam giác

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 5y - z = 9 \\ 5x - 2y - 3z = -3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -4y - 7z = 6 \\ -17y - 13z = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ -4y - 7z = 6 \\ -67z = 134 \end{cases}$$

Giải phương trình cuối ta được $z = -2$. Thay $z = -2$ vào phương trình thứ hai ta có $-4y + 14 = 6 \Leftrightarrow y = 2$

Thay $z = -2$, $y = 2$ vào phương trình đầu và giải ra ta được $x = -1$.

Vậy nghiệm của hệ là $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -2. \end{cases}$

6. a Xét dấu biểu thức: $f(x) = 2x(x + 2) - (x + 2)(x + 1)$.

b Lập bảng biến thiên và vẽ trong cùng một hệ toạ độ vuông góc các đồ thị của các hàm số sau: $y = 2x(x + 2)$ (C_1)

$y = (x + 2)(x + 1)$ (C_2).

Tính toạ độ các giao điểm A và B của (C_1) và (C_2).

c Tính các hệ số a, b, c để hàm số: $y = ax^2 + bx + c$ có giá trị lớn nhất bằng 8 và đồ thị của nó đi qua A và B.

Giải

a $f(x) = 2x(x + 2) - (x + 2)(x + 1) = (x + 2)(2x - x - 1) = (x + 2)(x - 1)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x) = (x + 2)(x - 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

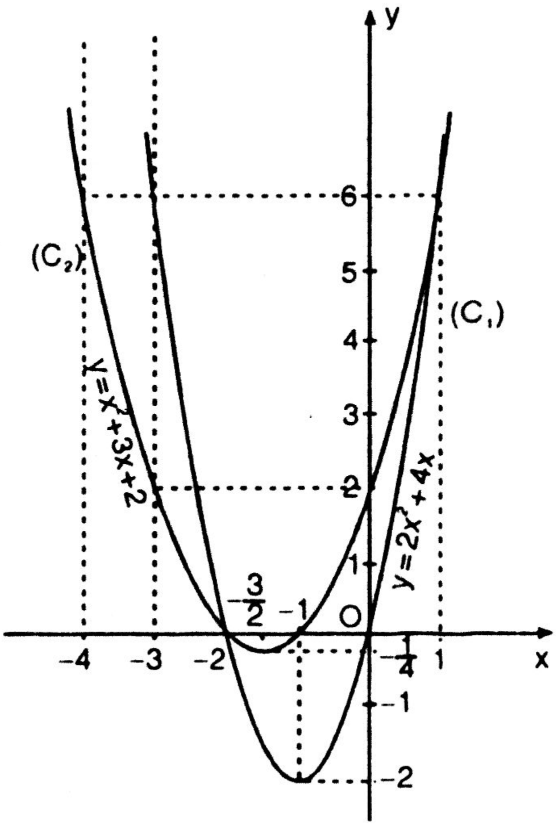
b) Bảng biến thiên: $y = 2x(x + 2) = 2x^2 + 4x$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$y = (x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị:



Toạ độ của giao điểm A và B của (C_1) và (C_2) là nghiệm phương trình:

$$2x(x + 2) = (x + 2)(x + 1) \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = x^2 + 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra hai giao điểm là A(–2; 0), B(1; 6).

c) Gọi $(\mathcal{P})$ là đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$

$$A, B \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ a + b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 2 & (1) \\ c = 8 - 2b & (2) \end{cases}$$

$y = ax^2 + bx + c$ có giá trị lớn nhất bằng 8.

Để đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đi qua A và B ta phải có

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 4ac - b^2 = 32a \quad (3) \end{cases}$$

Thay (1), (2) vào (3) ta được $9b^2 - 16b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = \dfrac{16}{9} \end{array}\right.$

Với $b = 0$ thì $a = -2$, $c = 8$.

Với $b = \dfrac{16}{9}$ thì $a = -\dfrac{2}{9}$, $c = \dfrac{40}{9}$

7. Chứng minh các hệ thức sau

a) $\dfrac{1-2\sin^2 a}{1+\sin 2a} = \dfrac{1-\tan a}{1+\tan a}$;

b) $\dfrac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a} = \tan 3a$;

c) $\dfrac{\sin^4 a - \cos^4 a + \cos^2 a}{2(1-\cos a)} = \cos^2\dfrac{a}{2}$;

d) $\dfrac{\tan 2x.\tan x}{\tan 2x - \tan x} = \sin 2x$.

Giải

a) $\dfrac{1-2\sin^2 a}{1+\sin 2a} = \dfrac{\cos^2 a - \sin^2 a}{(\cos a + \sin a)^2} = \dfrac{\cos a - \sin a}{\cos a + \sin a} = \dfrac{1-\tan a}{1+\tan a}$.

b) $\dfrac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a} = \dfrac{2\sin 3a\cos 2a + \sin 3a}{2\cos 3a\cos 2a + \cos 3a} = \dfrac{\sin 3a(2\cos 2a + 1)}{\cos 3a(2\cos 2a + 1)} = \tan 3a$

c) $\dfrac{\sin^4 a - \cos^4 a + \cos^2 a}{2(1-\cos a)} = \dfrac{\sin^2 a - \cos^2 a + \cos^2 a}{4\sin^2\dfrac{a}{2}} = \dfrac{4\sin^2\dfrac{a}{2}\cos^2\dfrac{a}{2}}{4\sin^2\dfrac{a}{2}} = \cos^2\dfrac{a}{2}$.

d) $\dfrac{\tan 2x\tan x}{\tan 2x - \tan x} = \dfrac{\sin 2x\sin x}{\cos 2x\cos x}.\dfrac{\cos 2x\cos x}{\sin 2x\cos x - \cos 2x\sin x}$

$= \dfrac{\sin 2x\sin x}{\sin(2x - x)} = \sin 2x$

8. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\dfrac{1+\sin 4a - \cos 4a}{1+\cos 4a + \sin 4a}$;

b) $\dfrac{1+\cos a}{1-\cos a}\tan^2\dfrac{a}{2} - \cos^2 a$;

c) $\dfrac{\cos 2x - \sin 4x - \cos 6x}{\cos 2x + \sin 4x - \cos 6x}$.

Giải

a) $\dfrac{1+\sin 4a - \cos 4a}{1+\cos 4a + \sin 4a} = \dfrac{1 + 2\sin 2a\cos 2a - 1 + 2\sin^2 2a}{1 + 2\cos^2 2a - 1 + 2\sin 2a\cos 2a}$

$= \dfrac{2\sin 2a(\cos 2a + \sin 2a)}{2\cos 2a(\cos 2a + \sin 2a)} = \tan 2a$.

b) $\dfrac{1+\cos a}{1-\cos a}.\tan^2\dfrac{a}{2}-\cos^2 a=\dfrac{2\cos^2\frac{a}{2}}{2\sin^2\frac{a}{2}}\tan^2\dfrac{a}{2}-\cos^2 a=1-\cos^2 a=\sin^2 a$

c) $\dfrac{\cos 2x-\sin 4x-\cos 6x}{\cos 2x+\sin 4x-\cos 6x}=\dfrac{2\sin 4x\sin 2x-\sin 4x}{2\sin 4x\sin 2x+\sin 4x}$

$$=\dfrac{\left(\sin 2x-\frac{1}{2}\right)\sin 4x}{\left(\sin 2x+\frac{1}{2}\right)\sin 4x}=\dfrac{\sin 2x-\sin 30^0}{\sin 2x+\sin 30^0}$$

$$=\dfrac{2\cos(x+15^0)\sin(x-15^0)}{2\sin(x+15^0)\cos(x-15^0)}=\tan(x-15^0)\cot(x+15^0)$$

9. Tính:

a) $4(\cos 24^0+\cos 48^0-\cos 84^0-\cos 12^0)$;

b) $96\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{48}\cos\dfrac{\pi}{48}\cos\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{6}$;

c) $\tan 9^0-\tan 63^0+\tan 81^0-\tan 27^0$

Giải

a) $4(\cos 24^0+\cos 48^0-\cos 84^0-\cos 12^0)=4(2\sin 54^0\sin 30^0-2\sin 30^0\sin 18^0)$

$$=4(\sin 54^0-\sin 18^0)=8\cos 36^0\sin 18^0$$

$$=\dfrac{8\sin 18^0\cos 18^0\cos 36^0}{\cos 18^0}=\dfrac{4\sin 36^0\cos 36^0}{\sin 72^0}=2.$$

b) $96\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{48}\cos\dfrac{\pi}{48}\cos\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{6}=48\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{6}$

$$=24\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{6}=12\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{6}=6\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{3}=9.$$

c) $\tan 9^0-\tan 63^0+\tan 81^0-\tan 27^0=\dfrac{\sin 9^0}{\cos 9^0}+\dfrac{\cos 9^0}{\sin 9^0}-\left(\dfrac{\sin 27^0}{\cos 27^0}+\dfrac{\cos 27^0}{\sin 27^0}\right)$

$$=\dfrac{1}{\sin 9^0\cos 9^0}-\dfrac{1}{\sin 27^0\cos 27^0}=\dfrac{2}{\sin 18^0}-\dfrac{2}{\sin 54^0}=\dfrac{4\cos 36^0\sin 18^0}{\sin 18^0\sin 54^0}=4.$$

10. Rút gọn

a) $\cos\dfrac{x}{5}\cos\dfrac{2x}{5}\cos\dfrac{4x}{5}\cos\dfrac{8x}{5}$;

b) $\sin\dfrac{x}{7}+2\sin\dfrac{3x}{7}+\sin\dfrac{5x}{7}$.

Giải

a) $A=\cos\dfrac{x}{5}\cos\dfrac{2x}{5}\cos\dfrac{4x}{5}\cos\dfrac{8x}{5}$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{x}{5}A = 2\sin\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5}\cos\frac{2x}{5}\cos\frac{4x}{5}\cos\frac{8x}{5} = \sin\frac{2x}{5}\cos\frac{2x}{5}\cos\frac{4x}{5}\cos\frac{8x}{5}$$

$$= \frac{1}{4}\sin\frac{8x}{5}\cos\frac{8x}{5} = \frac{1}{8}\sin\frac{16x}{5}.\ \text{Suy ra: } A = \frac{\sin\frac{16x}{5}}{16\sin\frac{x}{5}}.$$

b) $\sin\frac{x}{7} + 2\sin\frac{3x}{7} + \sin\frac{5x}{7} = 2\sin\frac{3x}{7}\cos\frac{2x}{7} + 2\sin\frac{3x}{7}$

$$= 2\sin\frac{3x}{7}\left(\cos\frac{2x}{7} + 1\right) = 4\sin\frac{3x}{7}\cos^2\frac{x}{7}.$$

11. Chứng minh rằng trong một tam giác ABC ta có

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$ $\left(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \text{ cùng khác } \frac{\pi}{2}\right)$.

b) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A.\sin B.\sin C$.

Giải

a) $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} \Rightarrow -\tan C = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$

$\Rightarrow \tan A\tan B\tan C - \tan C = \tan A + \tan B$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$

b) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A + B)\cos(A - B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin C[\cos(A - B) + \cos C] = 2\sin C[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

$= 4\sin C[-\sin A.\sin(-B)] = 4\sin A\sin B\sin C$.

12. Không sử dụng máy tính, hãy tính

$$\frac{\sin 40^0 - \sin 45^0 + \sin 50^0}{\cos 40^0 - \cos 45^0 + \cos 50^0} - \frac{6(\sqrt{3} + 3\tan 15^0)}{3 - \sqrt{3}\tan 15^0}.$$

Giải

$$A = \frac{\sin 40^0 - \sin 45^0 + \sin 50^0}{\cos 40^0 - \cos 45^0 + \cos 50^0} - \frac{6(\sqrt{3} + 3\tan 15^0)}{3 - \sqrt{3}\tan 15^0}$$

$$= \frac{\left(\sin 40^0 + \sin 50^0\right) - \sin 45^0}{\left(\cos 40^0 + \cos 50^0\right) - \cos 45^0} - \frac{6\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \tan 15^0\right)}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\tan 15^0}$$

$$= \frac{2\sin 45^0\cos 5^0 - \sin 45^0}{2\cos 45^0\cos 5^0 - \cos 45^0} - \frac{6(\tan 30^0 + \tan 15^0)}{1 - \tan 30^0\tan 15^0}$$

$$= \frac{\sin 45^0\left(2\cos 5^0 - 1\right)}{\cos 45^0\left(2\cos 5^0 - 1\right)} - 6\tan(30^0 + 15^0)$$

$= \tan 45^0 - 6\tan 45^0 = -5$.

MỤC LỤC

CHƯƠNG I. MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP

CHƯƠNG II. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

CHƯƠNG III. PHƯƠNG TRÌNH. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

CHƯƠNG IV. BẤT ĐẲNG THỨC. BẤT PHƯƠNG TRÌNH

CHƯƠNG V. THỐNG KÊ

CHƯƠNG VI. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại : (04) 3971 4896 - Fax : (04) 3971 4899

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc : **PHÙNG QUỐC BẢO**
Tổng biên tập : **PHẠM THỊ TRÂM**
Biên tập : Bích Hạnh
Trình bày : Diệu Tâm
Bìa : Công ty Sách Hoa Hồng
Đối tác liên kết xuất bản : Công ty Sách Hoa Hồng

GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10

Mã số : 1L-162ĐH2010
In 5000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty CP In Tiền Giang.
Số xuất bản: 290-2010/CXB/11-50/ĐHQGHN, ngày 01 4/2010.
Quyết định xuất bản số : 162LK-TN/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2010.